

UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI

Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice

Catedra de Mecanică



REZUMAT TEZĂ DE DOCTORAT

**Dinamica Mașinilor Rotative în Sisteme
Neinertiale**

Dynamics of Rotating Machinery in Non-inertial Frames

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:

**Prof. Dr. Ing.
Ion STROE**

AUTOR:

**C.S.III Ing.
Cristian Mihail STĂNICĂ**

București, 2020

CUPRINS

	Pag.
INTRODUCERE	3
CAPITOLUL 1	
STADIUL ACTUAL ÎN DOMENIU	3
1.1. DESCRIERE GENERALĂ A DOMENIULUI DINAMICII ROTOARELOR	3
1.2. MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL ROTATIV AVÂND O AXĂ FIXĂ ÎN RAPORT CU UN SISTEM DE REFERINȚĂ INERȚIAL	4
1.3. MIȘCAREA DE TRANSLAȚIE A SOLIDULUI RIGID MODELAT CA DISC ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL SUPUS LA MIȘCĂRI DE ROTAȚIE	5
CAPITOLUL 2	
ECUAȚIA DE MIȘCARE ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL	7
2.1. ECUAȚIA DE MIȘCARE A SOLIDULUI RIGID ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL	7
2.2. INFLUENȚA FORȚEI AXIALE DIN ARBORE ASUPRA MIȘCĂRII ROTORULUI ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL. FORMULAREA ANALITICĂ	10
2.3. INFLUENȚA MOMENTULUI DE TORSIUNE DIN ARBORE ASUPRA MIȘCĂRII ROTORULUI ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL. FORMULAREA ANALITICĂ	10
2.4. INFLUENȚA DEZECHILIBRULUI ASUPRA ROTORULUI ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL, FORMULAREA ANALITICĂ	11
CAPITOLUL 3	
CLASIFICAREA ROTOARELOR DUPĂ ELASTICITATEA ARBORELUI ÎN RAPORT CU LAGĂRELE	11
3.1. FORMULĂRILE SIMPLIFICATE DE TIP ARBORE RIGID, LAGĂRE RIGIDE. METODE DE APLICARE	12
3.2. SIMULAREA ROTOARELOR CU CARACTERISTICĂ ELASTICĂ NELINIARĂ	14
3.2.1. Vibrația fără preîncărcare	16
3.2.2 Vibrația cu preîncărcare	18
CAPITOLUL 4	
METODA ELEMENTULUI FINIT ÎN ANALIZA MAȘINILOR ROTATIVE ÎN SISTEM NEINERȚIAL	19
4.1 FORMULAREA CU ELEMENTE FINITE DE TIP BARĂ	19
4.2. FORMULAREA ECUAȚIILOR CE GUVERNEAZĂ INFLUENȚA MOMENTULUI DE TORSIUNE TRANSMIS ASUPRA ARBORELUI	21
4.3. TEORIA BAREI ÎN FORMULAREA TIMOSHENKO	22
4.4 INFLUENȚA MOMENTULUI DE TORSIUNIE TRANSMIS ASUPRA FRECVENȚELOR DE VIBRAȚIE LATERALĂ A BAREI ÎN FORMULAREA TIMOSHENKO	22
4.5 CALCULUL MOMENTELOR CRITICE DE TORSIUNE LA FLAMBAJUL	

DE TORSIUNE A BARELOR FOLOSIND FORMULAREA TIMOSHENKO	25
4.6 CALCULUL ÎN CONTEXTUL DEFORMAȚIILOR MARI	27
CAPITOLUL 5	
APLICAȚII NUMERICE	28
5.1 DOUĂ CAZURI DE REFERINȚĂ DIN LITERATURA DOMENIULUI DINAMICII ROTOARELOR	28
5.1.1. Rotor cu un singur disc, analiza în sistem de referință inerțial	28
5.1.2. Rotor cu trei discuri, analiza în sistem de referință inerțial	30
5.2 ROTOR ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL SOLICITAT LA ACCELERAȚIE PE DIRECȚIA AXEI LAGĂRELOR ROTORULUI	32
5.2.1. Rotor cu un disc	33
5.2.2. Rotor cu trei discuri	33
5.3 ROTOR ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL SUPUS ACCELERAȚIILOR DATORATE UNUI VECTOR DE ROTAȚIE PERPENDICULAR PE AXA LAGĂRELOR	35
5.3.1. Rotor cu un disc, rotație în jurul lagărului axial	35
5.3.2. Rotor cu un disc, rotație în jurul centrului de masă al discului	35
5.3.3. Rotor cu un disc, rotație în jurul capătului opus lagărului axial	36
5.3.4. Rotor cu trei discuri, rotație în jurul lagărului axial	36
5.3.5. Rotor cu trei discuri, rotație în jurul centrului de masă al rotorului	37
5.3.6. Rotor cu trei discuri, rotație în jurul capătului opus lagărului axial al rotorului	39
5.4 ROTOR ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL SUPUS ACCELERAȚIILOR DATORATE UNUI VECTOR DE ROTAȚIE COLINIAR CU AXA LAGĂRELOR	40
5.4.1. Rotor cu un disc, rotație directă	40
5.4.2. Rotor cu un disc, rotație inversă	41
5.4.3. Rotor cu trei discuri, rotație directă	41
5.4.4. Rotor cu trei discuri, rotație inversă	43
5.5 DETERMINAREA ANVELOPEI NEINERȚIALE DE FUNCȚIONARE A ROTORULUI	44
CONCLUZII	46
C.1. CONCLUZII GENERALE	46
C.2. CONTRIBUȚII ORIGINALE	46
C.3. PERSPECTIVE DE DEZVOLTARE ULTERIOARĂ	48
BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ	50

CUVINTE CHEIE

Rotor, dinamica rotoarelor, neinerțial, sistem de referință, vibrație, răspuns în frecvență, element finit.

INTRODUCERE

Practic toate mașinile construite de om și utilizate în domeniul transportului prezintă agregate și motoare bazate pe acțiunea unor ansamble rotorice. Constrângerile de siguranță în exploatarea vehiculelor impun dezvoltarea metodelor de calcul la turații supracritice și în sisteme neinerțiale.

Cedările de componente ale rotorului trebuie să fie prevăzute prin calcul și să permită oprirea în siguranță a vehiculului. Astfel, în domenii cum ar fi domeniul aeronautic se impune, pentru acceptarea la zbor a unui sistem de propulsie, efectuarea cu succes a testelor ce presupun defectarea în timpul funcționării a ansamblului rotoric.

Pentru toate situațiile descrise mai sus, în prezent sunt puse la punct metode de calcul potrivite cu particularitățile fiecărei situații analizate.

Punctul de plecare în fundamentarea fizică a metodelor de calcul îl constituie ecuația de mișcare Lagrange. Aceasta a fost folosită de primii teoreticieni Voinea R. și Stroe I. [1] pentru descrierea dinamicii rotoarelor în sistem de referință neinerțial. Apoi mai târziu, în cadrul dezvoltării teoriei elementului finit de către Arne Vollan și Louis Komzsik în lucrarea [2] s-a abordat forma completă a ecuației de mișcare Lagrange considerând și termenii corespunzători energiei disipative.

CAPITOLUL 1

STADIUL ACTUAL ÎN DOMENIU

1.1 DESCRIERE GENERALĂ A DOMENIULUI DINAMICII ROTOARELOR

Către sfârșitul secolului al XIX-lea, Rankine face prima dezvoltare teoretică a dinamicii rotoarelor pornind de la necesitatea proiectării turbinelor cu aburi și pune în evidență existența primei turații critice pentru toate rotoarele. Datorită faptului că se considera că dezechilibrul existent în rotor generează o forță centrifugă proporțională cu turația (și peste prima turație critică) se recomanda în mod incorect ca toate rotoarele să fie proiectate cu domeniul de funcționare sub prima turație critică.

Mai târziu DeLaval și Osborne Reynolds aduc contribuții experimentale importante ce permit lui Jeffcott în 1919 să elaboreze primul model teoretic corect al dinamicii rotoarelor cu reprezentarea corectă a fenomenelor ce apar la turații supercritice.[3] Seria surprizelor continuă cu descoperirea lui Kimball, A. L. despre rolul amortizării interne a rotorului asupra funcționării instabile [4] a rotoarelor la turații supercritice. Acest fapt contravine intuiției conform căreia amortizarea întotdeauna conduce la atenuarea vibrațiilor și nu poate fi chiar sursa acestor vibrații. Apariția mașinilor rotative de mare turație în cadrul aplicațiilor aerospațiale din secolul XX a determinat descoperirea de efecte adiționale în cadrul etanșărilor, efectul Lomakin [5] și pentru interacțiunea rotoarelor cu fluidul înconjurător, forța Alford.[6]

La nivel internațional, în anul 1992 este făcut un pas decisiv privind dinamica mașinilor rotative prin publicarea de către Voinea R. și Stroe I. a metodologiei de calcul în sistem de referință neinerțial [1], metodologie care este folosită și în prezent și care face obiectul dezvoltării în detaliu în lucrarea prezentă. Această metodologie rămâne până în prezent cea mai generală și cuprinzătoare abordare teoretică a neinerțialității în domeniul mașinilor rotative. În plan național preocuparea în această direcție este continuată de Stroe I. evidențiată în articolul [7] cu un caracter aplicativ puternic privind protejarea instalațiilor industriale de mare valoare cum ar fi turbinele de mare putere de efectele cutremurelor de pământ. Din punctul de vedere al metodei elementului finit cea mai cuprinzătoare abordare a subiectului mașinilor rotative în sistem de referință neinerțial la momentul actual este realizată de Vollan A. în cartea „Computational Techniques of Rotor Dynamics with the Finite Element Method” [2]. Dacă Friswell [8] dedica un capitol acestei abordări în sistem neinerțial, Vollan fundamentează întreaga teorie, toată cartea sa, pe principiul neinerțialității.

1.2 MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL ROTATIV AVÂND O AXĂ FIXĂ ÎN RAPORT CU UN SISTEM DE REFERINȚĂ INERȚIAL

Pentru a înțelege principiile care guvernează funcționarea mașinilor rotative se folosește ca piatră de temelie legea a doua a mișcării enunțată de Newton. Acest principiu stabilește că, într-un sistem de referință inerțial, suma tuturor forțelor ce acționează asupra unui obiect fizic este egală cu produsul dintre masa acelui obiect și accelerația sa.

$$\{F\} = m \cdot \{a\} \quad (1.1)$$

În mod uzual rotoarele sunt proiectate și analizate în sistemul de referință neinerțial legat de rotor astfel încât componentele acestuia să poată fi analizate folosind tehnicile obișnuite ale teoriei clasice. În sensul acesta principiul al doilea al dinamicii enunțat de Newton este adaptat pentru înțelegerea fenomenelor care au loc în cazul unui sistem de referință neinerțial caracterizat de o viteză de rotație definită de vectorul $\{\Omega\}$ [rad/sec].

$$m \left(\frac{d^2 \{r\}}{dt^2} \right)_{inert} + \left[-m \left(\frac{d^2 \{r\}}{dt^2} \right) - m \cdot 2 \cdot \{\Omega\} \times \left(\frac{d \{r\}}{dt} \right) - m \cdot \{\Omega\} \times (\{\Omega\} \times \{r\}) - m \cdot \frac{d \{\Omega\}}{dt} \times \{r\} \right]_{rot} = 0. \quad (1.2)$$

Din forma dedusă mai sus rezultă că traiectoria unui punct material de masă m în sistem de referință neinerțial rotativ poate fi determinată prin adăugarea la legea a doua a lui Newton a trei forțe fictive: forța centrifugă, forța Coriolis și forța de transport.

$$\text{forța centrifugă} = -m \cdot \{\Omega\} \times (\{\Omega\} \times \{r\}) \quad (1.3)$$

$$\text{forța Coriolis} = -m \cdot 2 \cdot \{\Omega\} \times \left(\frac{d\{r\}}{dt} \right)_{rot} \quad (1.4)$$

$$\text{forța de transport} = -m \cdot \frac{d\{\Omega\}}{dt} \times \{r\} \quad (1.5)$$

1.3 MIȘCAREA DE TRANSLAȚIE A SOLIDULUI RIGID MODELAT CA DISC ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL SUPUS LA MIȘCĂRI DE ROTAȚIE

Punctul de plecare în fundamentarea fizică a metodelor de calcul în sisteme de referință neinerțiale îl constituie ecuația de mișcare Lagrange. În cuprinsul lucrării s-a folosit teoria dezvoltată în scopul aplicării pe elemente finite de către Voinea R. și Stroe I. în lucrarea [1]. Spre deosebire de majoritatea lucrărilor în domeniul mașinilor rotative în acest capitol se va considera că rotorul analizat descrie nu doar o mișcare de rotație în raport cu un sistem de referință inerțial ci și o mișcare neuniformă de translație.

În cadrul acestei metode se consideră discul rotorului rigid și concentrând toată masa rotorului iar arborele flexibil și fără masă. În capitolele și paragrafele următoare se va dezvolta mai detaliat lucrarea [9] publicată de autor în scopul susținerii acestei teze.

În figura de mai jos se pot observa cele trei sisteme de coordonate utilizate pentru a formula ecuațiile Lagrange și apoi ecuațiile de echilibru dinamic pentru rotorul studiat.

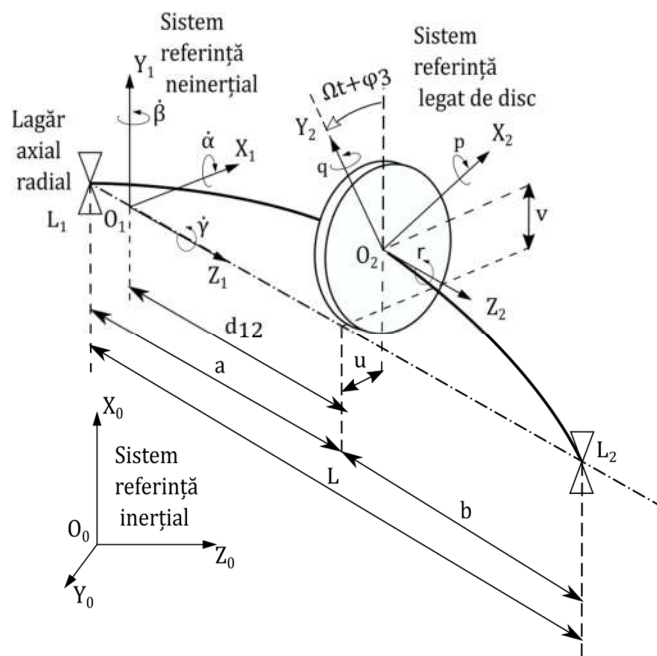


Figura 1.1. Rotor în sistem de referință neinerțial.

Folosind o transformare Euler de tip XYZ cu unghiurile $\varphi_1, \varphi_2, \Phi_3$ ($s_{1,2} = \sin \varphi_{1,2}$, $c_{1,2} = \cos \varphi_{1,2} \dots$) pentru sistemul de referință legat de disc, viteza de rotație a discului în raport cu sistemul de referință inerțial (exprimată în sistemul neinerțial legat de disc) este

$$\bar{\omega}_{20} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \bar{\omega}_{2Euler} + \bar{\omega}_{12} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2 s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \end{Bmatrix} + T_{2-1} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}. \quad (1.6)$$

După efectuarea înmulțirii și adunării rezultă

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_3(\dot{\varphi}_2 + \dot{\gamma}s_1 + \dot{\beta}c_1) + c_3(s_2(\dot{\beta}s_1 + \dot{\gamma}c_1) + c_2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\alpha})) \\ s_3(s_2(c_1\dot{\gamma} - s_1\dot{\beta}) - c_2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\alpha})) + c_3(\dot{\gamma}s_1 + \dot{\beta}c_1 + \dot{\varphi}_2) \\ s_2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\alpha}) + c_2(\dot{\gamma}c_1 - \dot{\beta}s_1) + \dot{\Phi}_3 \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Pentru a afla viteza de translație a centrului de masă al discului rotorului se observă că originea sistemului de referință $O_2X_2Y_2Z_2$ se află exact în centrul de masă al discului. Astfel, notând cu index d viteza discului și cu indice 0,1,2 variabilele asociate cu cele trei sisteme de coordonate se obține pentru viteza de translație a discului,

$$\bar{v}_{d0} = \bar{v}_{20} = \bar{v}_{21} + \bar{v}_{10} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1O_2}. \quad (1.8)$$

Considerând distanța dintre originile O_1 și O_2 ca fiind d_{12} , folosind notația u, v, w pentru deplasările centrului de masă al discului în sistemul de referință $O_1X_1Y_1Z_1$ atunci rezultă,

$$\begin{Bmatrix} v_{xd0} \\ v_{yd0} \\ v_{zd0} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{u}_d \\ \dot{v}_d \\ \dot{w}_d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{x10} \\ v_{y10} \\ v_{z10} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} & \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} & 0 & -\dot{\alpha} \\ -\dot{\beta} & \dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_d \\ v_d \\ d_{12} + w_d \end{Bmatrix}}_{\text{viteza de transport}} \quad (1.9)$$

După efectuarea înmulțirii și adunării matricelor din dreapta rezultă

$$\begin{Bmatrix} v_{xd0} \\ v_{yd0} \\ v_{zd0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_d + v_{x10} + \dot{\beta}(d_{12} + w_d) - \dot{\gamma}v_d \\ \dot{v}_d + v_{y10} + \dot{\gamma}u_d - \dot{\alpha}(d_{12} + w_d) \\ \dot{w}_d + v_{z10} + \dot{\alpha}v_d - \dot{\beta}u_d \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

În sistemul de ecuații de mai sus, deoarece w_d și \dot{w}_d sunt mult mai mici în raport cu u_d, v_d, \dot{u}_d și \dot{v}_d , acestea pot fi neglijate în etapa finală a calculului vibrațiilor laterale a arborelui mașinii rotative.

CAPITOLUL 2

ECUAȚIA DE MIȘCARE ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL

2.1 ECUAȚIA DE MIȘCARE A SOLIDULUI RIGID ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL

Considerând expresiile vitezelor și forțelor deduse în capitolele anterioare se pot formula ecuațiile Lagrange. În acest scop se determină mai întâi Lagrangeanul corespunzător aplicației.

$$L = E - V. \quad (2.1)$$

Cu E este notată energia cinetică ce este alcătuită la rândul ei din energia cinetică de translație E_t și energia cinetică de rotație E_r . Cu V este notată energia potențială.

$$E = E_t + E_r, \quad E = \frac{m_d}{2} (v_{xd0}^2 + v_{yd0}^2 + v_{zd0}^2) + \frac{1}{2} [I_d (p^2 + q^2) + I_p r^2]. \quad (2.2)$$

Energia cinetică este determinată considerând ecuațiile (1.7) și (1.10) în ecuația de mai sus (unde p, q, r sunt componentele vitezei unghiulare ω_{20} definită în (1.6)).

Energia potențială rezultă folosind termenii din (2.23).

$$V = \frac{k_{tor} \varphi_3^2}{2} + \frac{k_{44} (\varphi_2^2 + \varphi_1^2)}{2} + k_{14} (u \varphi_2 - v \varphi_1) + \frac{k_{ax} w^2}{2} + \frac{k_{11} (v^2 + u^2)}{2} + \frac{F_{ax}}{2 \cdot a} (u^2 + v^2) + \frac{F_{ax} \cdot a}{2 \cdot 5,844} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \quad (2.3)$$

$$\left(F_{ax} = \frac{E \cdot A}{a} \cdot w \right)$$

Introducând ecuațiile (2.1), (2.2) și (2.3) în ecuațiile Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (2.4)$$

se obține un sistem de ecuații liniare în funcție de coordonatele generalizate q_k (vezi notația (2.13)) ce poate fi rezolvat prin metode clasice relativ rapide cum ar fi metoda vectorilor și valorilor proprii dacă se aproximează termenii mici cu termeni liniari iar termenii mici de ordin superior se neglijează.

Apoi organizându-le în formă matriceală rezultă ecuația de mișcare. După efectuarea derivărilor în (2.4) și folosind aproximările termenilor mici rezultă

$$\ddot{u} \cdot m_d - 2 \cdot m_d \cdot \dot{\gamma} \cdot \dot{v} + u \cdot \left(-\dot{\gamma}^2 m_d - \dot{\beta}^2 m_d + k_{11} + \frac{F_{ax}}{a} \right) + v \cdot (\dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot m_d) + \varphi_2 \cdot k_{14} + m_d \cdot d_{12} \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\gamma} = 0 \quad (2.5)$$

$$\ddot{v} \cdot m_d + 2 \cdot m_d \cdot \dot{\gamma} \cdot \dot{u} + v \cdot \left(-\dot{\gamma}^2 m_d - \dot{\alpha}^2 m_d + k_{11} + \frac{F_{ax}}{a} \right) + u \cdot (\dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot m_d) - \varphi_1 \cdot k_{14} + m_d \cdot d_{12} \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\gamma} = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 \cdot I_d + \dot{\varphi}_2 \cdot (I_p \Omega + I_p \dot{\gamma} - 2I_d \dot{\gamma}) + \\ + \varphi_1 \cdot \left(I_p \dot{\gamma} \cdot \Omega + k_{44} + I_p \dot{\gamma}^2 - I_d \dot{\gamma}^2 - I_p \dot{\beta}^2 + I_d \dot{\beta}^2 + \frac{F_{ax} \cdot a}{5,844} \right) + \\ + \varphi_2 \cdot (I_p \dot{\alpha} \dot{\beta} - I_d \dot{\alpha} \dot{\beta}) - k_{14} \cdot v + I_p \cdot \dot{\beta} (\Omega + \dot{\gamma}) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 \cdot I_d + \dot{\varphi}_1 \cdot (-I_p \Omega - I_p \dot{\varphi}_3 - I_p \dot{\gamma} + 2I_d \dot{\gamma}) + \\ + \varphi_2 \cdot \left(I_p \dot{\gamma} \cdot \Omega + k_{44} + I_p \dot{\gamma}^2 - I_d \dot{\gamma}^2 - I_p \dot{\alpha}^2 + I_d \dot{\alpha}^2 + \frac{F_{ax} \cdot a}{5,844} \right) + \\ + \varphi_1 \cdot (I_p \dot{\alpha} \dot{\beta} - I_d \dot{\alpha} \dot{\beta}) + k_{14} u - I_p \dot{\alpha} \cdot (\Omega + \dot{\gamma}) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Forma matriceală pentru ecuațiile (2.5), (2.6), (2.7) și (2.8) devine

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{q}\} + (\Omega \cdot [G] + \dot{\gamma} \cdot [C_d]) \{\dot{q}\} + ([K] + \dot{\alpha}^2 [K_{d1}] + \dot{\beta}^2 [K_{d2}] + \dot{\gamma}^2 [K_{d3}] + \\ + \dot{\alpha} \dot{\beta} [K_{d4}] + \dot{\gamma} \cdot \Omega [K_{d5}] + F_{ax} \cdot [K_{ax}]) \{q\} - \{F\} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Folosind notațiile

$$[C_{Tot}] = \Omega \cdot [G] + \dot{\gamma} \cdot [C_d], \quad (2.10)$$

$$[K_{Tot}] = [K] + \dot{\alpha}^2 [K_{d1}] + \dot{\beta}^2 [K_{d2}] + \dot{\gamma}^2 [K_{d3}] + \dot{\alpha} \dot{\beta} [K_{d4}] + \dot{\gamma} \cdot \Omega [K_{d5}] + F_{ax} \cdot [K_{ax}]. \quad (2.11)$$

ecuația de echilibru dinamic se poate scrie simplificat

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C_{Tot}] \{\dot{q}\} + [K_{Tot}] \{q\} - \{F\} = \{0\}. \quad (2.12)$$

$$\text{Unde } \{q\} = \{u, v, \varphi_1, \varphi_2\}^T. \quad (2.13)$$

Pentru rezolvarea ecuației de mișcare în formă matriceală de mai sus, în primul rând se observă că termenul $\{F\}$ este constant și deci rezultatul va fi compus dintr-o soluție constantă la care se adaugă soluția sistemului de ecuații omogen. Din punctul de vedere al determinării caracteristicilor dinamice cum ar fi frecvențele naturale de vibrație în domeniul liniar este suficientă rezolvarea sistemului de ecuații omogene. Este de remarcat că poziția de

echilibru în jurul căreia are loc evoluția dinamică se determină rezolvând în cazul acesta ecuația statică

$$[K_{Tot}]\{q\} = \{F\}. \quad (2.14)$$

Rezolvarea ecuației omogene se face folosind notațiile următoare

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [C_T] & [K_T] \\ [-I] & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

și căutând o soluție de forma

$$\{X\} = \{Y\} \cdot e^{\lambda t}, \quad \{\dot{X}\} = \lambda \cdot \{Y\} \cdot e^{\lambda t}. \quad (2.18)$$

Astfel partea omogenă a ecuației (2.12) devine

$$[A]\{\dot{X}\} + [B]\{X\} = \{0\}. \quad (2.19)$$

Înlocuind (2.18) în (2.19), apoi multiplicând cu $-[A]^{-1}$ rezultă

$$-\lambda \cdot \{Y\} \cdot e^{\lambda t} - [A]^{-1}[B]\{Y\} \cdot e^{\lambda t} = \{0\}. \quad (2.20)$$

Se simplifică termenul $e^{\lambda t}$ și se obține forma clasică a unei probleme de vectori și valori proprii

$$-[A]^{-1}[B]\{Y\} = \lambda \cdot \{Y\}, \quad (2.21)$$

a cărei soluție este alcătuită din perechi de numere complexe λ și perechi de matrice coloană de numere complexe $\{Y\}$. Fiecare pereche este alcătuită dintr-un număr (set de numere) complex și conjugatul său. Pentru a regăsi soluția la problema inițială (2.12) se reține jumătatea inferioară $\{y\}$ a vectorilor proprii reprezentați de matricele coloană $\{Y\}$ astfel încât

$$\{q\}(t) = \{y\} \cdot e^{\lambda t} + \{y\}^* \cdot e^{\lambda^* t}. \quad (2.22)$$

Partea imaginară a valorilor proprii λ reprezintă frecvențele proprii de vibrație ale rotorului iar matricele coloană $\{y\}$ reprezintă formele de vibrație ale rotorului.

2.2 INFLUENȚA FORȚEI AXIALE DIN ARBORE ASUPRA MIȘCĂRII ROTORULUI ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL. FORMULAREA ANALITICĂ

O sursă indirectă de modificare a rigidității pentru grinzi în general o poate constitui forța de întindere sau compresiune care acționează în în lungul grinzii și care, asemeni unei corzi de vioară care prin forța de întindere își variază frecvența proprie de vibrație, poate duce la modificarea substanțială a frecvențelor naturale de vibrație.

Astfel se obține matricea de rigiditate diferențială ce exprimă contribuția forței axiale la deplasarea centrului de masă al discului.

$$[K_{ax}] = F_{ax} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{5.844} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{5.844} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

2.3 INFLUENȚA MOMENTULUI DE TORSIUNE DIN ARBORE ASUPRA MIȘCĂRII ROTORULUI ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL. FORMULAREA ANALITICĂ

La arborii zvelți sau când se dorește un calcul foarte precis, este importantă considerarea momentului de torsiune transmis de rotor și mai precis de arborele rotorului. Momentul de torsiune este un vector care își păstrează direcția coaxială cu axa lagărelor de-a lungul arborelui. În consecință, atunci când arborele suferă deformații de încovoiere, vectorul moment de torsiune se descompune în două componente, una tangențială la arborele rotorului și una perpendiculară pe arbore. Componenta perpendiculară a momentului de torsiune acționează în sensul amplificării deformației arborelui reducând astfel, în mod aparent, rigiditatea arborelui. Practic, în prezența unei încărcări la torsiune mari, arborele pare că se înmoaie, fenomen care poate evolua, în cazul arborilor zvelți, până la flambajul la torsiune și distrugerea arborelui.

În ce privește vibrațiile, deoarece întotdeauna momentul de torsiune are ca efect amplificarea deplasării pe direcția laterală pe care își exercită influența va genera în cadrul ecuației de echilibru dinamic o matrice de rigiditate cu semnul minus, care va reduce rigiditatea arborelui.

$$[K_{tor}] = -M_{tor} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{a+2b}{3a^2b} & 0 & 0 \\ \frac{a+2b}{3a^2b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

2.4 INFLUENȚA DEZECHILIBRULUI ASUPRA MIȘCĂRII ROTORULUI ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL. FORMULAREA ANALITICĂ

Pentru determinarea forței generate de dezechilibrul rotorului în sistem de referință neinerțial se va determina energia cinetică a dezechilibrului. Se notează $m_e \cdot e$ dezechilibrul rotorului. Dezechilibrul nu posedă energie potențială și deci doar cu ajutorul energiei cinetice se pot formula ecuațiile Lagrange (2.1) (2.4).

În final se poate scrie forța dată de dezechilibrul în rotor

$$-\{F_{dez}\} = m_e e \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\Omega t) - [(\dot{\gamma} + \Omega)^2 + \dot{\beta}^2] \cos(\Omega t) \\ \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\Omega t) - [(\dot{\gamma} + \Omega)^2 + \dot{\alpha}^2] \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.25)$$

Cu aceasta se poate calcula răspunsul în frecvență al rotorului pe domeniul de funcționare în sistemul de referință neinerțial. Această cauză de vibrații va fi analizată în detaliu în capitolul cinci, destinat aplicațiilor numerice.

O altă caracteristică importantă în calculul deplasărilor laterale la rotoare este abaterea de la perpendicularitate a discurilor rotorului în raport cu axa de rotație a arborelui, în raport cu axa lagărelor. Studiul așezării înclinate a discurilor în rotor nu va fi tratat în această lucrare ci reprezintă un subiect ce va fi dezvoltat într-o lucrare viitoare.

CAPITOLUL 3

CLASIFICAREA ROTOARELOR DUPĂ ELASTICITATEA ARBORELUI ÎN RAPORT CU LAGĂRELE

În general atunci când deformațiile cele mai mari în timpul funcționării se produc în arborele rotorului, rotorul este numit „rotor flexibil”. În contrast cu cazul rotorului flexibil este cazul în care deformațiile majore în funcționarea mașinii rotative au loc la nivelul lagărelor, caz în care rotorul este numit „rotor rigid”. În scopul analizei și proiectării ansamblor rotorice, de mare folos este diagrama turațiilor critice care poate fi exprimată în

funcție de rigiditatea lagărelor sau de zveltețea arborelui. Ambii parametri au un impact direct asupra turațiilor critice.

Pentru a formula ecuația de mișcare se observă din figura 1.1 că orice forță sau moment care acționează la nivelul centrului de masă al rotorului, acționează mai întâi asupra arborelui și apoi prin intermediul arborelui acționează asupra lagărelor. Deci sistemul poate fi modelat ca o înseriere de elemente elastice conform figurii următoare.

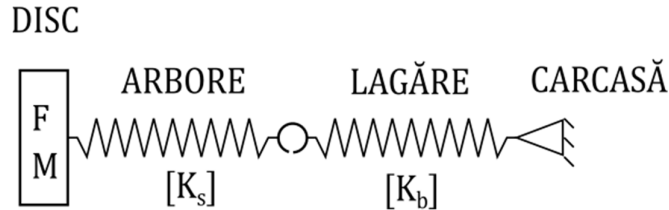


Figura 3.1. Modelarea schematică a ansamblului rotoric privind matricele de rigiditate cu evidențierea relației dintre termenii ecuației de mișcare.

Astfel elasticitatea echivalentă poate fi exprimată conform resorturilor înseriate de unde rezultă matricea de rigiditate $[K]$

$$[K]^{-1} = [K_s]^{-1} + [K_b]^{-1}, \Rightarrow [K] = \left([K_s]^{-1} + [K_b]^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.1)$$

În cazul rotorului rigid matricea $[K_s]$ are termenii mult mai mari decât matricea $[K_b]$ și în cadrul relației (3.1) $[K_s]$ se poate neglija fără a afecta în mare măsură rezultatele finale la rezolvarea ecuației de mișcare. În celălalt caz când rotorul este numit ca fiind flexibil matricea de rigiditate a lagărelor se poate neglija.

Pentru evaluarea în etapa de proiectare preliminară a caracteristicii de rotor flexibil sau rigid se folosește diagrama turațiilor critice. Aceasta se construiește variind rigiditatea lagărelor (k_1, k_2), termenii în $[K_b]$ sau zveltețea arborelui (L/d). [10, 11]

3.1 FORMULĂRILE SIMPLIFICATE DE TIP ARBORE RIGID, LAGĂRE RIGIDE. METODE DE APLICARE

În abordările practice ale problemelor de proiectare industrială este indicată în multe cazuri simplificarea modelării rotoarelor în sensul eliminării gradelor de libertate corespunzătoare deformației arborelui sau a lagărelor. Pe baza studiilor lui Stroe I. și Crăița C. [10, 11], metoda acestora este adusă la nivelul fundamental al punctului material (eliminând funcțiile de formă) și îmbogățită cu contribuția autorului în simularea rotoarelor flexibile în plus față de cele rigide. Reducerea teoretică la nivelul punctului material

deschide posibilitatea utilizării teoriei pentru orice dezvoltare ulterioară în special în domeniul elementului finit care are la baza conceptul de „nod” alături de cel de „element”.

În literatura de specialitate se consideră că un arbore de mașină rotativă este flexibil dacă înmagazinează peste 70% din energia potențială de vibrație a mașinii rotative și se consideră că arborele este rigid dacă energia potențială procentuală în arbore este mai mică de 30% din energia totală la vibrație.[12] În cazul în care avem energia potențială în arbore între 30% și 70% din energia totală de vibrație atunci arborele se consideră ca fiind „arbore intermediar”. În funcție de aplicație fiecare tipologie de arbore poate fi de dorit sau de evitat. Contrar intuiției, o mașină rotativă robustă nu va avea în mod automat lagăre rigide. În general o flexibilitate conferită lagărelor conduce la o fiabilitate sporită pentru mașina rotativă. [13]

Considerând înscrierea elasticității celor două subansamble, subansamblul arbore și subansamblul lagăre conform figurii de mai sus se obține matricea de rigiditate a întregului ansamblu rotor.

$$[K_{sb}]^{-1} = [K_s]^{-1} + [K_b]^{-1}, \Rightarrow [K_{sb}] = ([K_s]^{-1} + [K_b]^{-1})^{-1}. \quad (3.2)$$

Acest raționament se poate codifica sub forma unui vector boolean

$$RF = [b_1 \ b_2] \quad (3.3)$$

în care variabilele b_1 și b_2 pot lua valorile 1 sau 0 și cu ajutorul lor se poate rescrie ecuația (3.2) astfel încât avem

$$\begin{aligned} [K_{sb}] &= (b_1 \cdot [K_s]^{-1} + b_2 \cdot [K_b]^{-1})^{-1} \\ RF = [1, 0] &\Rightarrow \text{rotor flexibil,} \\ RF = [0, 1] &\Rightarrow \text{rotor rigid,} \\ RF = [1, 1] &\Rightarrow \text{rotor intermediar.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pentru evaluarea energiei potențiale se pot folosi relațiile

$$V_s = 1/2 \cdot \{F\}^T [K_s]^{-1} \{F\}, \quad V_b = 1/2 \cdot \{F\}^T [K_b]^{-1} \{F\} \quad (3.5)$$

$$V_s \% = \frac{V_s}{V_s + V_b} \cdot 100, \quad V_b \% = \frac{V_b}{V_s + V_b} \cdot 100. \quad (3.6)$$

Se observă din (3.4) că dacă avem rotor rigid sau flexibil atunci matricea de rigiditate echivalentă va fi chiar matricea de rigiditate a lagărelor respectiv a arborelui. În final ecuația de mișcare în sistem de referință neinertial (2.9) se poate rescrie considerând (3.4)

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{q}\} + (\Omega \cdot [G] + \dot{\gamma} \cdot [C_d])\{\dot{q}\} + ([K_{sb}] + \dot{\alpha}^2 [K_{d1}] + \dot{\beta}^2 [K_{d2}] + \dot{\gamma}^2 [K_{d3}] + \\ + \dot{\alpha}\dot{\beta} [K_{d4}] + \dot{\gamma} \cdot \Omega [K_{d5}] + F_{ax} \cdot [K_{ax}])\{q\} - \{F\} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2 SIMULAREA ROTOARELOR CU CARACTERISTICĂ ELASTICĂ NELINIARĂ

În prezent algoritmi de calcul uzuali privind frecvențele proprii de vibrație la mașinile rotative sunt algoritmi de calcul în domeniul liniar. Astfel că pentru a se simula funcționarea rotorului se face liniarizarea ecuațiilor diferențiale.

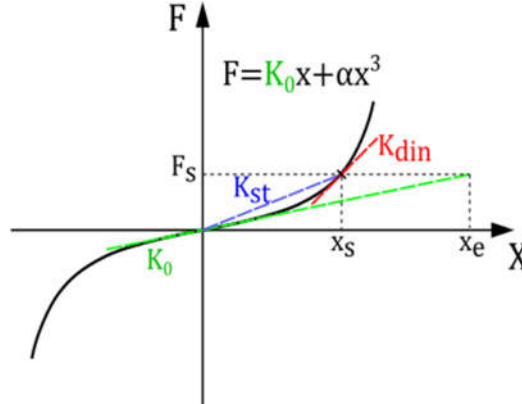


Figura 3.2. Caracteristica elastică a unui lagăr nelinier modelat ca o funcție polinom de gradul trei.

Datorită dificultății în a obține rezultate folosind algoritmi neliniari se preferă întotdeauna pe cât este posibil folosirea de algoritmi de calcul liniari.

Din punct de vedere practic una dintre cele mai simple reprezentări ale unei caracteristici neliniare este un polinom de gradul trei conform figurii 3.2. Urmărind figura 3.2 se observă că panta tangentei pentru $x=0$ reprezintă rigiditatea folosită uzual, în ipoteza micilor deplasări, în calculul liniar atât static cât și dinamic. Dacă asupra lagărului se acționează cu o forță relativ mare F_s atunci rigiditatea lagărului nu mai poate fi aproximată prin tangenta în $x=0$ cu panta K_0 ci se folosește un factor de corecție $\alpha \cdot x^2$ care se aduna la K_0 , dependent de deplasarea efectuată.

$$\begin{aligned} K_{st} &= K_0 + \alpha \cdot x^2, \\ F_s &= K_{st} \cdot x_s = (K_0 + \alpha \cdot x_s^2) \cdot x_s = K_0 x_s + \alpha \cdot x_s^3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Atunci când se analizează întreg rotorul și se folosește notația matriceală

$$[K_{st}] = [K_0] + [K_G], \quad (3.9)$$

unde matricea $[K_G]$ este o matrice de corecție a formulării liniare și se numește matricea de rigiditate geometrică.

$$K_{din} = \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=x_s} = \left(\frac{d}{dx} (K_0 x + \alpha \cdot x^3) \right)_{x=x_s} = K_0 + 3\alpha \cdot x_s^2. \quad (3.10)$$

Din ecuația de mai sus (3.10) este evident că mai trebuie adăugat factorul de corecție $3\alpha \cdot x_s^2$ la K_0 care este folosit uzual pentru calculul dinamic liniar. Atunci când este considerat calculul pe întreg ansamblul rotoric cu toate lagărele se folosește forma matriceală:

$$[K_{din}] = [K_0] + [K_D], \quad (3.11)$$

unde matricea $[K_D]$ este matricea de rigiditate diferențială folosită pentru calculul dinamic liniar corespunzător deplasării x_s și aceasta înglobează toți factorii de corecție corespunzători pentru toate lagărele neliniare.

În figura 3.3 de mai jos sunt redată în mod schematic etapele de calcul implicate în prezența lagărelor cu caracteristică neliniară.

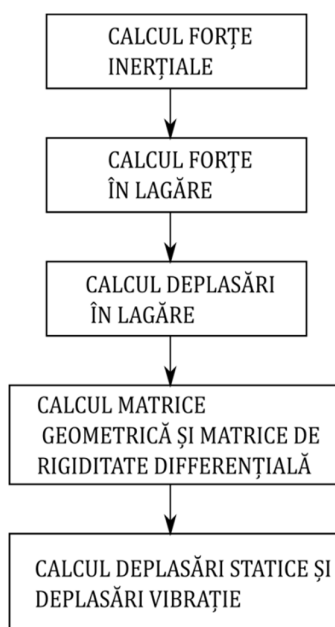


Figura 3.3. Procedura de calcul pentru cazurile când există preîncărcarea rotorului.

Soluționarea deplină în cazul rotoarelor cu caracteristică elastică neliniară se poate face folosind metode numerice iterative în timp cum ar fi Wilson-teta modificat pentru caracteristici elastice neliniare. În acest scop a fost creat de către autor un solver neliniar ce este folosit în simulările care sunt redată mai jos. Ideea de bază a metodelor iterative în general, este aproximarea ecuației diferențiale prin serii Taylor. Plecând de la această idee de bază și adăugând și alte tehnici numerice sunt obținute solvelele bazate pe metoda Runge-Kutta sau Wilson-teta.

3.2.1 Vibrația fără preîncărcare

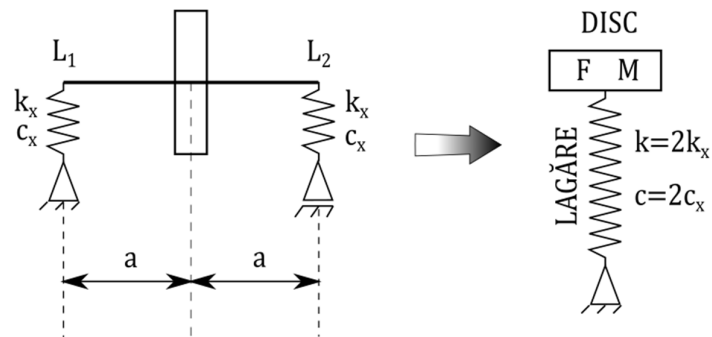


Figura 3.4. Echivalarea rotorului cu arbore rigid cu un resort prevăzut cu o masă.

În cazul fără preîncărcare nu există forțe constante cum ar fi propria greutate care să acționeze asupra rotorului. Se consideră că singura forță care acționează este una cu caracteristică sinusoidală cum ar fi forța centrifugă datorată dezechilibrului rotorului. Pentru cazul cu preîncărcare a fost aleasă accelerația laterală de 9.8 m/s^2 pentru a demonstra caracterul extins de aplicație depășind domeniul neinerțial și afectând toate rotoarele în câmp gravitațional.

Aplicație practică.

Se consideră același rotor din figura 1.1, $a=b$, $|O_1O_2|=d_{12}=0$. Turația de funcționare este între 0 și 3000 rpm. Se consideră arborele rigid cu masa neglijabilă în raport cu discul. Masa discului este $m = 259.16 \text{ Kg}$. Se consideră rigiditatea lagărelor $K=1E7 \text{ [N/m]}$, rigiditate cubică $\alpha=6E14$, amortizarea $C=25 \text{ [N/m]}$, dezechilibrul rotorului $m_e=5.1e-4 \text{ [Kg.m]}$ și forța statică laterală $F_{st} = m_d \cdot 9.8 \text{ [N]}$. (aplicată în cazul cu preîncărcare)

Se dorește calculul răspunsului în frecvență, în sistem de referință inerțial pentru comparație și în sistem neinerțial cu preîncărcare. Astfel în cazul prezent când caracteristicile lagărelor sunt omogene este suficientă rezolvarea ecuației pe direcția Ox.

Ecuația de echilibru dinamic pentru cazul inerțial este

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x + \alpha \cdot x^3 = m e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.12)$$

În cele ce urmează s-au considerat mai multe valori ale dezechilibrului m_e în ordine crescătoare cu scopul de a evidenția evoluția domeniilor de rezonanță ale rotorului. S-a constatat că, spre deosebire de cazul liniar, domeniul în care are loc vibrația cu amplitudini crescute este mult mai mare în relație directă cu mărimea forței sinusoidale (forța centrifugă dată de dezechilibrul rotorului). Suplimentar față de acest fenomen mai apare și fenomenul armonicilor superioare prin care o forță armonică cu o anumită frecvență de oscilație produce rezonanța rotorului nu numai la acea frecvență ci și la multiplii ei. De exemplu, când rotorul este excitat cu o forță ce variază cu 44 Hz rotorul va vibra și cu o frecvență de 88 Hz deși amplitudinea corespunzătoare vibrației la 88 Hz este mult mai mică decât cea corespunzătoare frecvenței de 44 Hz.

Tabel 3.1. Amplitudinile maxime ale vibrației pentru turație crescătoare și descrescătoare.

Nr.caz	Val. dezechil. [Kg·m]	Frecv. max. ascend. [Hz]	Frecv. max descend [Hz]	Amplit max ascendm [mm]	Amplit. max descend [mm]
1	1.0E-5	47	44	4.8E-5	1.1E-5
2	1.4E-5	52	44	9.1E-5	1.9E-5
3	1.6E-5	54	44	0.1	1.4E-5
4	1.8E-5	59	44	0.13	1.9E-5
5	2.0E-4	62	44	0.15	2.4E-5
6	2.2E-4	69	44	0.18	1.6E-5
7	2.4E-4	76	44	0.21	1.6E-5
8	2.6E-4	87	44	0.26	2.6E-5
9	2.8E-4	nominal	nominal	0.42	0.42

În tabelul de mai sus sunt rezumate rezultatele obținute. Pentru cazul 1 (figura următoare asociată) se evidențiază existența unui domeniu de rezonanță între frecvențele de 44 și 50 Hz. Amplitudinea maximă a vibrației este de 4,8E-5 m.

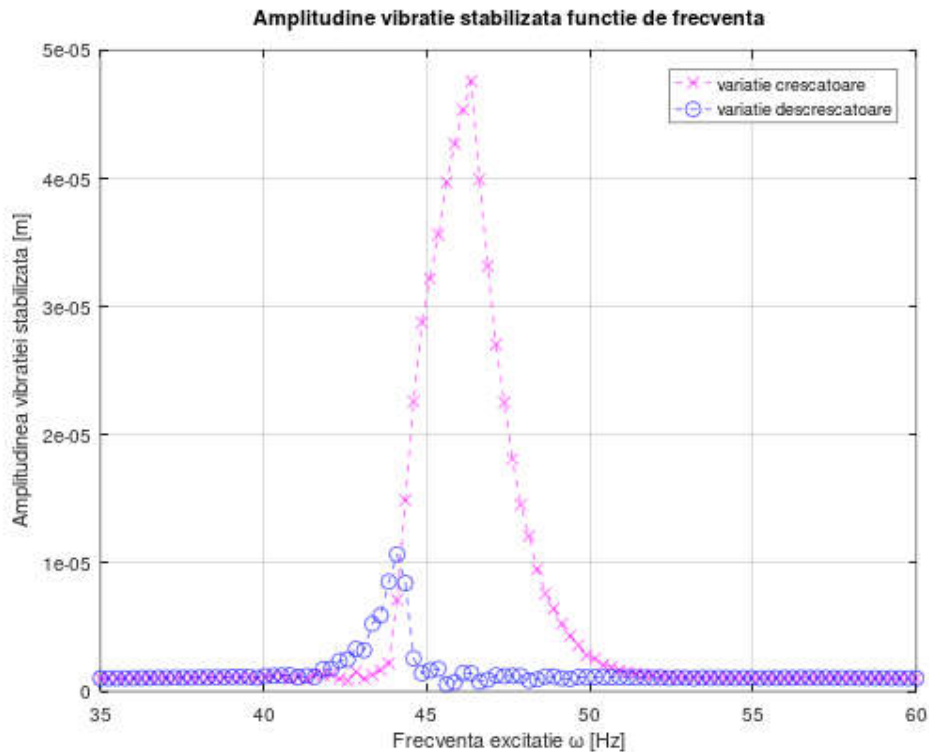


Figura 3.5. Cazul 1. Amplitudinea de vibrație stabilizată în prezența unui dezechilibru de 1.0e-5 [Kg·m].

Se observă comportarea diferită a rotorului atunci când are loc variația crescătoare a frecvenței forței de excitație față de cazul când există o variație descrescătoare a frecvenței forței de excitație (care este sincronă cu turația). În cazurile tratate aici fiind implicat dezechilibrul rotorului, creșterea frecvenței forței de excitație are loc prin simpla creștere a turației rotorului respectiv descreșterea frecvenței de excitație fiind realizată prin scăderea turației. Pentru cazul fără preîncărcare lagăre neliniare cu caracteristică polinom cubic,

răspunsul în frecvență se manifestă sub forma unui lob care se mărește spre dreapta odată cu creșterea forței sinusoidale de excitație. În cazul rotoarelor această forță apare datorită dezechilibrului. În concluzie pentru rotoarele solicitate la forța de dezechilibru, în cazul lagărelor neliniare, vibrațiile se vor manifesta nu la o anumită frecvență ci într-o bandă de frecvențe care începe la aceeași valoare ca în cazul liniar și se încheie la o valoare care crește proporțional cu valoarea încărcării. Variația răspunsului discului rotorului se face în mod continuu în partea stângă a acestei benzi de frecvențe și printr-un salt brusc în partea dreaptă. Modul brusc în care se face acest salt pe partea dreaptă este atenuat în mod proporțional cu amortizarea existentă în lagăre.

3.2.2 Vibrația cu preîncărcare

Cazul în sistem de referință neinerțial în care avem o accelerație pe direcție laterală Ox de 9.8 m/s^2 . Se vor construi și diagramele turațiilor, frecvențelor critice în cele două cazuri de mai sus. (Valoarea aleasă evidențiază domeniul mai larg de aplicație a teoriei)

Ecuția de mișcare pentru cazul neinerțial cu accelerație laterală $a_L = 9,8 \text{ m/s}^2$ pe direcția Ox este

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x + \alpha \cdot x^3 = m \cdot a_L + m e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.13)$$

Pe direcția Oy se păstrează comportamentul inerțial dedus la punctul a) deoarece accelerația acționează numai pe direcția Ox și nu are efect asupra direcției Oy.

Tabel 3.2. Amplitudinile maxime ale vibrației pentru turație crescătoare și descrescătoare.

Nr.caz	Val. dezechil	Frecv. max. ascend.	Frecv. max descend	Amplit max ascend	Amplit. max descend
1	1E-4	67	65	6.5E-5	0.13
2	2.6E-4	67	65	8.4E-5	0.14
3	5.1E-4	nominal	nominal	0.5	0.5

Pentru situația în care există o preîncărcare prima modificare majoră apare la frecvența de rezonanță care suferă o creștere importantă. De la 44 Hz se observă creșterea la 65 Hz ceea ce reprezintă o creștere procentuală de 48%. O altă modificare surprinzătoare o constituie schimbarea formei caracteristicii domeniului de rezonanță din tipul „hardening” în tipul „softening” (caracteristică pentru cazurile când alfa este negativ în ecuația (3.13)). Practic se înregistrează un domeniu de rezonanță lărgit pe etapa descrescătoare a turației și implicit a frecvenței de excitație dată de forța centrifugă a dezechilibrului. Din figura asociată de mai jos se observă lărgirea spre stânga, în domeniul frecvențelor mai mici, a domeniului de rezonanță atunci când are loc creșterea forței de excitație respectiv a dezechilibrului din rotor. Pe de altă parte, din tabelul de mai sus, se observă că frecvența maximă la rezonanță pentru variația crescătoare a turației se apropie de cea pentru variația descrescătoare a turației odată cu creșterea dezechilibrului. În momentul când acestea ajung aproximativ la aceeași valoare are loc creșterea nelimitată a amplitudinii de vibrație odată cu turația. Practic domeniul de rezonanță se extinde la tot domeniul de turații mai mare decât turația corespunzătoare frecvenței de 65 Hz.

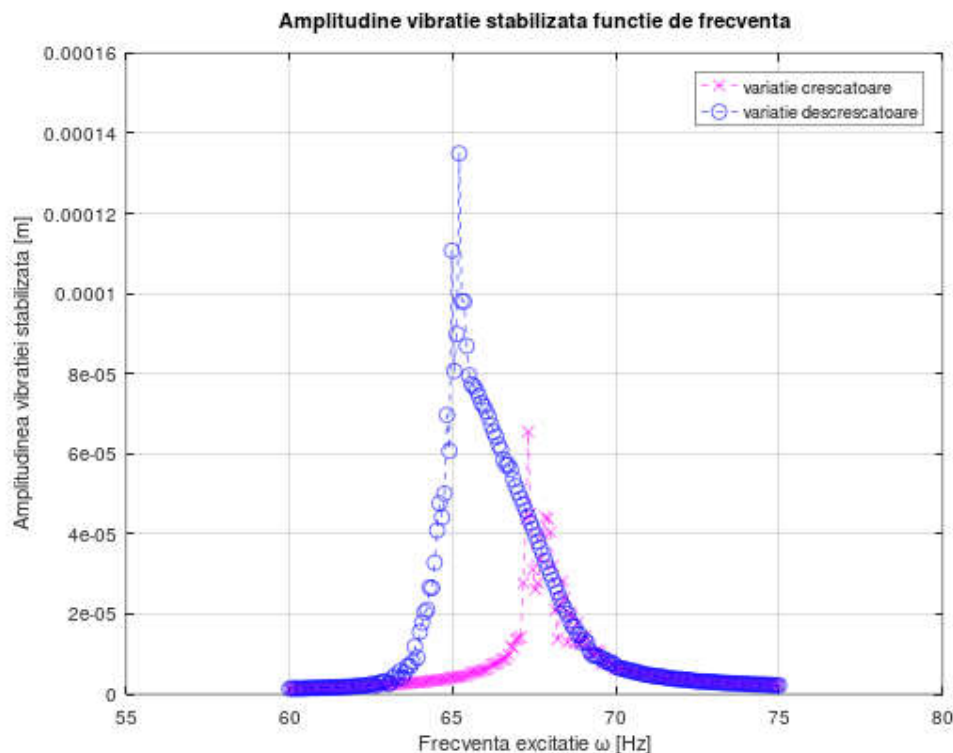


Figura 3.6. Cazul 1. Amplitudinea de vibrație stabilizată în prezența unei forțe constante laterale de 2539.8 [N] și dezechilibru de 1.0e-4 [Kg·m].

CAPITOLUL 4

METODA ELEMENTULUI FINIT ÎN ANALIZA MAȘINILOR ROTATIVE ÎN SISTEM NEINERȚIAL

4.1 FORMULAREA CU ELEMENTE FINITE DE TIP BARĂ

În scopul efectuării de calcule mai detaliate și mai precise în anumite cazuri se dezvoltă matricele deduse în capitolul anterior pentru aplicarea în domeniul elementelor finite. În general cele mai utilizate tipuri de elemente finite în domeniul dinamicii rotoarelor sunt celi de tip Euler și Timoshenko. Elementele de tip Timoshenko pot fi considerate ca o dezvoltare a celor de tip Euler având termeni și coeficienți suplimentari pentru simularea fenomenelor de lunecare specifică de-a lungul fibrelor arborelui rotorului.

Ideea de bază în formularea cu elemente finite este de a pleca de la o secțiune foarte subțire de arbore care este considerată un disc foarte mic de grosime ds și aflat la coordonata s în cadrul elementului finit ce discretizează rotorul. Pentru acest disc foarte subțire se pot defini mărimile caracteristice cum ar fi masa discului m_s , momentul de inerție geometrică I , momentul de inerție masic pe diametrul discului I_d și momentul de inerție după axa de rotație a discului I_p .

$$m_d = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot ds = \rho \cdot A \cdot ds. \quad (4.1)$$

$$I_d = \rho \cdot I \cdot ds, \quad (4.2)$$

$$I_p = 2 \cdot I_d. \quad (4.3)$$

Pentru un disc mic ds energia cinetică se formulează în mod identic conform relaţiilor (2.2). Pentru a obţine energia cinetică pe întregul element finit se face integrarea în raport cu variabila s pe toată lungimea L_e a elementului finit. Folosind funcţiile de formă, deplasările la coordonata s în lungul elementului finit se înlocuiesc cu deplasările în nodurile de la capetele elementului finit înmulţite cu funcţiile de formă corespunzătoare. Astfel în final integrarea are loc asupra funcţiilor de formă.

Ecuţia Lagrange în format matriceal are forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}_e\}} \right) - \frac{\partial V}{\partial \{q_e\}} = \{0\}. \quad (4.4)$$

Pentru a obţine energia corespunzătoare întregului element finit se face integrarea Lagrangeanului pe toată lungimea elementului finit. (4.6)(4.7)

În ce priveşte energia potenţială, o formulare valabilă pentru bara de tip Timoshenko şi implicit pentru cea de tip Euler este conform [12]

$$V = \frac{1}{2} \{q_e\}^T \left([K^e] + [K_{ax}^e] \right) \{q_e\} \quad (4.5)$$

$$[K^e] = [K_b^e] + [K_\beta^e]$$

Pe de altă parte din energia cinetică rezultă următorii termeni care iau forma unor matrice de rigiditate adiţionale:

$$[K_{di}^e] \{q_e\} = \int_0^{L_e} \left([\Psi(s)]^T \cdot [K_{dsi}] \cdot [\Psi(s)] \right) \{q_e\}, \quad i=1...5. \quad (4.6)$$

$$[K_{d1}^e] = -\rho A \int_0^{L_e} \left([\Psi(s)]^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [\Psi(s)] \right) ds - \quad (4.7)$$

$$- \rho I \int_0^{L_e} \left([\Psi(s)]^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [\Psi(s)] \right) ds.$$

Similar, folosind aceeaşi metodologie, se obţin şi expresiile celorlalte matrice de rigiditate neinerţiale asociate formulării cu elemente finite, detaliate în teza.

4.2 FORMULAREA ECUAȚIILOR CE GUVERNEAZĂ INFLUENȚA MOMENTULUI DE TORSIUNE TRANSMIS ASUPRA ARBORELUI

În cazul structurilor complexe este dificilă adăugarea forțelor ce sunt aplicate în nodurile elementelor finite în scopul formulării ecuației de mișcare. Principiul deplasărilor virtuale însoțit de aplicarea principiului D'Alembert contribuie la obținerea relativ ușor a ecuației de mișcare. Practic principiul D'Alembert presupune considerarea unei forțe inerțiale care este în echilibru cu celelalte forțe aplicate astfel încât suma tuturor forțelor ce acționează asupra punctului material este zero. În continuare principiul deplasărilor virtuale se enunță în felul următor: lucrul mecanic efectuat de un sistem de forțe aflat în echilibru și care se aplică unui sistem mecanic (punct material) este zero. Principiul lui Hamilton reprezintă o soluție de aplicare a principiului deplasărilor virtuale. În aplicarea acestuia se deosebesc cazurile forțelor conservative față de cele neconservative. Forțele conservative pot fi definite folosind o funcție potențial ceea ce face ca lucrul mecanic efectuat de acestea pentru deplasarea punctului material (nodului) să fie independent de traiectoria urmată între poziția inițială și cea finală (care sunt considerate fixe) și să poată fi determinat numai cunoscând funcția potențialului, poziția inițială și cea finală. Forțele neconservative sunt forțe care transmit energie mecanică în funcție de calea pe care se deplasează punctul material. În această categorie se pot încadra forțele disipative cum ar fi cele de frecare și forțele care aduc energie din exteriorul sistemului mecanic analizat.

Ecuția Lagrange pentru un grad de libertate

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial U}{\partial u} + c\dot{u} - f = 0 \quad (4.8)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} - f = 0} \quad (4.9)$$

unde D este funcția disipativă $D = \frac{1}{2} c\dot{u}^2$.

4.3 TEORIA BAREI ÎN FORMULAREA TIMOSHENKO

Energia pentru deformaţiile specifice

$$U_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{81} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

unde matricea din mijloc reprezintă matricea de rigiditate K în forma Timoshenko.

$$K_e = \frac{EI}{(1+\Phi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & 12 & -6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 \\ 0 & -6l & l^2(4+\Phi) & 0 & 0 & 6l & l^2(2-\Phi) & 0 \\ 6l & 0 & 0 & l^2(4+\Phi) & -6l & 0 & 0 & l^2(2-\Phi) \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & 6l & 0 \\ 0 & -6l & l^2(2-\Phi) & 0 & 0 & 6l & l^2(4+\Phi) & 0 \\ 6l & 0 & 0 & l^2(2-\Phi) & -6l & 0 & 0 & l^2(4+\Phi) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

4.4 INFLUENŢA MOMENTULUI DE TORSIUNE TRANSMIS ASUPRA FRECVENŢELOR DE VIBRAŢIE LATERALĂ A BAREI ÎN FORMULAREA TIMOSHENKO

O cerinţa dictată de aplicaţiile practice o reprezintă capacitatea de calcul a frecvenţelor laterale de vibraţie în funcţie de momentul de torsiune transmis prin arborele respectiv. La începutul dezvoltării teoriei dinamicii rotoarelor Greenhill 1883 [14] concluzionează că momentul de torsiune nu influenţează frecvenţele critice ale arborilor. Această ipoteză simplificatoare nu este general valabilă şi mai târziu în 1921 Southwell şi Gough [15] demonstrează că există cazuri particulare pentru care momentul de torsiune duce la scăderea frecvenţelor critice de vibraţie. În acest sens munca de pionierat a fost desfăşurată în special de Golomb M. şi Rosemberg R.M. [16] prin activitatea sistematică în domeniul experimental şi mai apoi de către Eshleman şi Eubanks prin eforturile de teoretizare pe care le-au desfăşurat [17].

Astfel Eshleman și Eubanks sunt primii care desfășoară un studiu sistematic general valabil pentru a determina domeniile de funcționare în care efectele momentului de torsiune trebuie considerate. De aceea aceștia au dezvoltat și publicat rezultatele studiului lor folosind mărimi adimensionale raportate la lungimea și raza arborilor studiați folosind așa numitul coeficient de zveltețe:

$$r = \frac{R}{2L} \quad (4.12)$$

Ca principiu de lucru Eshleman și Eubanks au folosit descompunerea după regula paralelogramului a vectorului moment de torsiune după cele două direcții ale elementului finit de bara: direcția axei de forfecare (ce este perpendiculară pe fața elementului finit) și direcția corespunzătoare planului feței element finit conform cu figurile de mai jos. Se consideră momentul T de torsiune aplicat la extremitatea elementului finit de lungime l și direcția de rotație în sensul axei Oz . Este dezvoltată metoda publicată de autor.[18]

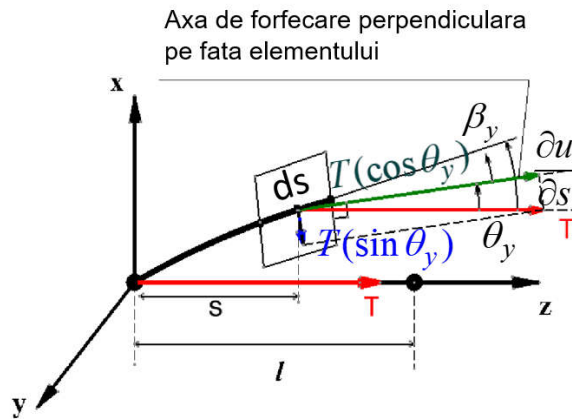


Figura 4.1. Momente și forțe dezvoltate pe elementul de bară

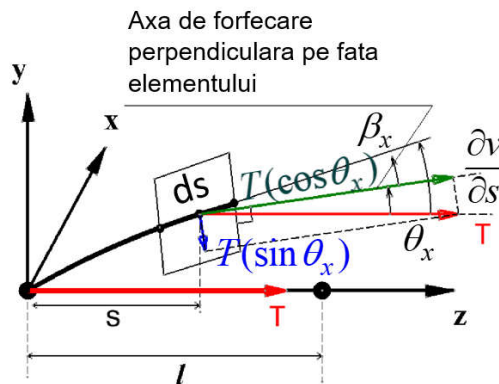


Figura 4.2. Momente și forțe dezvoltate pe elementul de bară

În scopul definirii ecuației de mișcare a elementului se folosește în cazul de față principiul lui Hamilton generalizat. Deoarece momentul de torsiune este neconservativ nu se poate aplica în cazul de față principiul Lagrange. Astfel avem :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K^e - P^e) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^e dt = 0 \quad (4.13)$$

În continuare se definește ultimul termen din ecuația de mai sus folosind notațiile:

$$T \theta_x = M_{tx} \quad (4.14)$$

$$T \theta_y = M_{ty} \quad (4.15)$$

$$\delta W^e = \int_0^l \left(-\delta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} M_{tx} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} M_{ty} \right) ds \quad (4.16)$$

Se aranjează în forma matriceală:

$$\delta W^e = \int_0^l \left(T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\ \delta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \end{bmatrix} \right) ds + \int_0^l \left(T \frac{\Phi l^2}{12} \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \\ \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\ \delta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \end{bmatrix} \right) ds \quad (4.17)$$

Considerând notația $\Psi(s) = \begin{bmatrix} \Psi_T(s) \\ \Psi_R(s) \end{bmatrix}$ cu partea corespunzătoare deplasărilor de translație $\Psi_T(s)$ și notând vectorul deplasărilor la capetele elementului finit cu q^e , ecuația (4.17) se transformă:

$$\begin{aligned} \delta W^e = & \{q^e\}^T \int_0^l \left(T [\Psi_T(s)]^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [\Psi_T(s)'''] \right) ds \cdot \delta \{q^e\} + \\ & + \{q^e\}^T \int_0^l \left(T \frac{\Phi l^2}{12} [\Psi_T(s)''']^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [\Psi_T(s)'''] \right) ds \cdot \delta \{q^e\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \delta W^e = & \left[\int_0^l \left(T [\Psi_T(s)''']^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [\Psi_T(s)'] \right) ds \cdot \{q^e\} \right]^T \cdot \delta \{q^e\} + \\ & + \left[\int_0^l \left(T \frac{\Phi l^2}{12} [\Psi_T(s)''']^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [\Psi_T(s)'''] \right) ds \cdot \{q^e\} \right]^T \cdot \delta \{q^e\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Se notează:

$$K_{T\alpha} = \int_0^l \left(T [\Psi_T(s)''']^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [\Psi_T(s)'] \right) ds \quad (4.20)$$

$$K_{T\beta} = \int_0^l \left(T \frac{\Phi l^2}{12} [\Psi_T(s)''']^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [\Psi_T(s)'''] \right) ds \quad (4.21)$$

Astfel ecuația (4.19) devine

$$\delta W^e = [K_{T\alpha} \cdot \{q^e\}]^T \cdot \delta \{q^e\} + [K_{T\beta} \cdot \{q^e\}]^T \cdot \delta \{q^e\} \quad (4.22)$$

$$\boxed{\delta W^e = [(K_{T\alpha} + K_{T\beta}) \cdot \{q^e\}]^T \cdot \delta \{q^e\}} \quad (4.23)$$

unde $K_{T\alpha}$ și $K_{T\beta}$ sunt matricele de rigiditate date de momentul de torsiune transmis prin arborele analizat conform cu teoria încovoierii barei în forma Timoshenko.

4.5 CALCULUL MOMENTELOR CRITICE DE TORSIUNE LA FLAMBAJUL DE TORSIUNE A BARELOR FOLOSIND FORMULAREA TIMOSHENKO

Se poate discuta despre flambaj la compresiune și flambaj la torsiunea arborelui rotorului. Limita de flambaj la compresiune poate fi determinată și folosind matricea de rigiditate [19] publicată de Kosmatka $[K_A^e]$ în formularea barei Timoshenko. Practic în momentul când termenii matricei de rigiditate Timoshenko $[K_B^e]$ se anulează cu termenii matricei de rigiditate Kosmatka, rigiditatea la încovoierea a arborelui devine nulă și are loc flambajul acestuia. Pe de altă parte, din punctul de vedere al flambajului la torsiune, în mod asemănător în momentul când termenii matricei de rigiditate Timoshenko se anulează cu termenii matricei de rigiditate dată de momentul de torsiune $[K_T^e]$ are loc flambajul la

torsiune. Astfel în formularea ecuaţiei de mişcare avem pentru formularea în sistem inerţial şi solicitare simplă la torsiune,

$$[K^e] = [K_B^e] - [K_T^e], \quad [K_T^e] = [K_{T\alpha}^e] + [K_{T\beta}^e]. \quad (4.24)$$

Indicele e denota formularea la nivel de element finit. Considerând momentul de torsiune notat cu T de forma

$$T = k \frac{EI}{L} \quad (4.25)$$

unde EI este rigiditatea la încovoiere a rotorului iar L este distanţa între lagărele care susţin rotorul, se poate face următoarea formulare în regim static

$$[K]\{q\} = 0 \quad (4.26)$$

$$([K_B] - [K_T])\{q\} = 0 \quad (4.27)$$

Se notează matricea de rigiditate dată de momentul de torsiune corespunzător limitei de flambaj

$$[K_T^F] = \frac{1}{k}[K_T] \quad (4.28)$$

Astfel ecuaţia (4.27) devine

$$([K_B] - k[K_T^F])\{q\} = 0 \quad (4.29)$$

$$([K_T^F]^{-1}[K_B] - k[I])\{q\} = 0 \quad (4.30)$$

Astfel ecuaţia (4.30) corespunde unei probleme cu vectori şi valori proprii unde valorile lui k folosite în ecuaţia (4.25) conduc la aflarea momentelor de torsiune critice pentru fenomenul de flambaj la torsiune. Conform cu Ziegler [20] pentru rotoare cu arbori simplu sprijiniţi pe lagăre scurte $k_1 = 2 \cdot \pi$ (se face menţiunea că în Ziegler pag.126,127 nu e înglobat şi numărul π în coeficientul k astfel încât în lucrarea [20] $k = 2$ care este mai apoi înmulţit explicit cu π pentru a ajunge la formula (4.25)). Aceasta permite calculul valorii maxime pentru momentul de torsiune T de la care începe să se manifeste fenomenul de flambaj la torsiune.

În cazul în care rotorul se află în mişcare de rotaţie stabilitatea la deplasări laterale este influenţată şi de forţele giroscopice. Acestea pot avea o influenţă stabilizatoare asupra tendinţei de vibraţie laterală în cazul în care precesia se desfăşoară în sensul de rotaţie sau destabilizatoare în cazul în care precesia are loc în sens invers.

Astfel pentru cazul general, ecuaţia de mişcare în sistem de referinţă neinerţial (2.9) devine

$$\begin{aligned}
 [M]\{\ddot{q}\} + (\Omega \cdot [G] + \dot{\gamma} \cdot [C_d])\{\dot{q}\} + ([K] + \dot{\alpha}^2 [K_{d1}] + \dot{\beta}^2 [K_{d2}] + \dot{\gamma}^2 [K_{d3}] + \\
 + \dot{\alpha}\dot{\beta} [K_{d4}] + \dot{\gamma} \cdot \Omega [K_{d5}] + [K_A] - [K_T])\{q\} - \{F\} = 0.
 \end{aligned} \quad (4.31)$$

în mod asemănător cu formularea analitică cu deosebirea că semnificaţia matricelor este diferită ele fiind obţinute prin tehnici de asamblare specifice elementelor finite [12] din matricele şi vectorii definite pentru fiecare element finit şi care sunt date în relaţiile (4.7) - ,(4.11),(4.24) deduse în capitolele anterioare. În ce priveşte matricea coloană $\{F\}$ este de menţionat că poate include şi influenţa dezechilibrului dedusă în (2.25) pe lângă forţele de tip neinerţial.

Se observă că termenul dependent de momentul de torsiune $[K_T]$ influenţează în mod negativ rigiditatea la încovoiere a ansamblului rotoric. Această influenţă devine foarte importantă în cazul rotoarelor zvelte şi duce la scăderea spre zero a primei frecvenţe critice de vibraţie laterală în cazul în care momentul de torsiune se apropie de limita de flambaj la torsiune. De asemenea şi celelalte moduri de vibraţie înregistrează scăderi notabile ale frecvenţelor proprii de vibraţie.

4.6 CALCULUL ÎN CONTEXTUL DEFORMAŢIILOR MARI

Pentru determinarea formelor de vibraţie şi a frecvenţelor de vibraţie în domenii de vârf cum ar fi cel aerospaţial simplul calcul de vibraţie folosind geometria de fabricaţie nu este satisfăcător. Aceasta se întâmplă datorită faptului că piesele ce alcătuiesc turbomotoarele şi în general componentele puternic solicitate din industria aerospaţială prezintă modificarea considerabilă a geometriei în timpul funcţionării [21] astfel încât formele de vibraţie suferă o modificare substanţială. De asemenea starea de tensiuni din corpul pieselor cât şi câmpurile de acceleraţii la care sunt supuse determină modificarea considerabilă a frecvenţelor de vibraţie. [22] [23] Un caz particular îl constituie combinarea dintre cele două efecte de mai sus având loc modificarea în mod interactiv a aplicării încărcărilor în funcţie de deformaţia piesei. Un exemplu elocvent a acestui fenomen îl constituie modificarea direcţiei locale de aplicaţie a forţei centrifuge odată cu deformarea puternică a structurii analizate. Consecinţa variaţiei geometriei discului rotorului în funcţie de turaţie este variaţia caracteristicilor sale mecanice cum ar fi momentele de inerţie $I_p(\Omega)$ şi $I_d(\Omega)$. Rezultă că toate matricele care implică aceşti termeni vor fi dependente de turaţie.

În consecinţă ecuaţia de mişcare (4.31) devine

$$\begin{aligned}
 [M(\Omega)]\{\ddot{q}\} + (\Omega \cdot [G(\Omega)] + \dot{\gamma} \cdot [C_d(\Omega)])\{\dot{q}\} + \\
 + ([K] + \dot{\alpha}^2 [K_{d1}(\Omega)] + \dot{\beta}^2 [K_{d2}(\Omega)] + \dot{\gamma}^2 [K_{d3}(\Omega)] + \\
 + \dot{\alpha}\dot{\beta} [K_{d4}(\Omega)] + \dot{\gamma} \cdot \Omega [K_{d5}(\Omega)] + [K_A] - [K_T])\{q\} - \{F(\Omega)\} = 0.
 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Datorită dependenței de turație a termenilor ecuației de mișcare, turațiile critice se vor obține în mod iterativ. Se estimează valoarea turației critice căutate și apoi se obțin matricele necesare calculului turației critice și se calculează turația critică dorită. Se compară valoarea estimată cu cea obținută pentru a verifica încadrarea în precizia dorită. În cazul în care nu este îndeplinită precizia impusă se reia calculul folosind ca turație critică estimată valoarea calculată în pasul anterior. Se repetă procedura până când este atinsă precizia de calcul dorită.

CAPITOLUL 5

APLICAȚII NUMERICE

5.1 DOUĂ CAZURI DE REFERINȚĂ DIN LITERATURA DOMENIULUI DINAMICII ROTOARELOR

5.1.1 Rotor cu un singur disc, analiza în sistem de referință inerțial

Arborele rotorului are raza $R = 0.01\text{m}$ și lungimea de 1.4m . Materialul din care este fabricat rotorul este oțel cu densitatea $\rho = 7800\text{Kg/m}^3$ și modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$. Discul are raza de $0,15\text{m}$ și grosimea de $0,03\text{m}$.

Pentru dezechilibrul discului sunt date masa dezechilibrului $m_e = 10^{-4}\text{kg}$ și distanța $d = 0,15\text{m}$ rezultând $m_e \cdot d = 1.5 \cdot 10^{-5}\text{m} \cdot \text{Kg}$.

La distanța de două treimi din lungimea arborelui este amplasat lagărul L_2 cu caracteristici elastice $k_{xx} = 2 \cdot 10^5\text{ N/m}$, $k_{yy} = 5 \cdot 10^5\text{ N/m}$ și cu amortizările $c_{xx} = 40\text{ N/m}$, $c_{yy} = 100\text{ N/m}$.

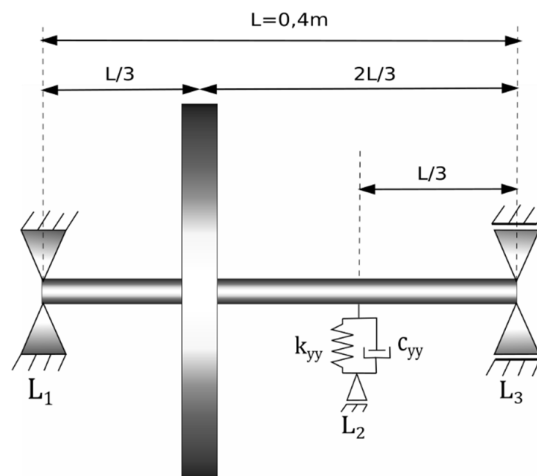


Figura 5.1. Rotor cu un disc și trei lagăre. (Lalanne pag.191)

S-au folosită pentru discretizarea rotorului în șase elemente de tip Timoshenko.

a) Diagrama Campbell și formele de vibrație

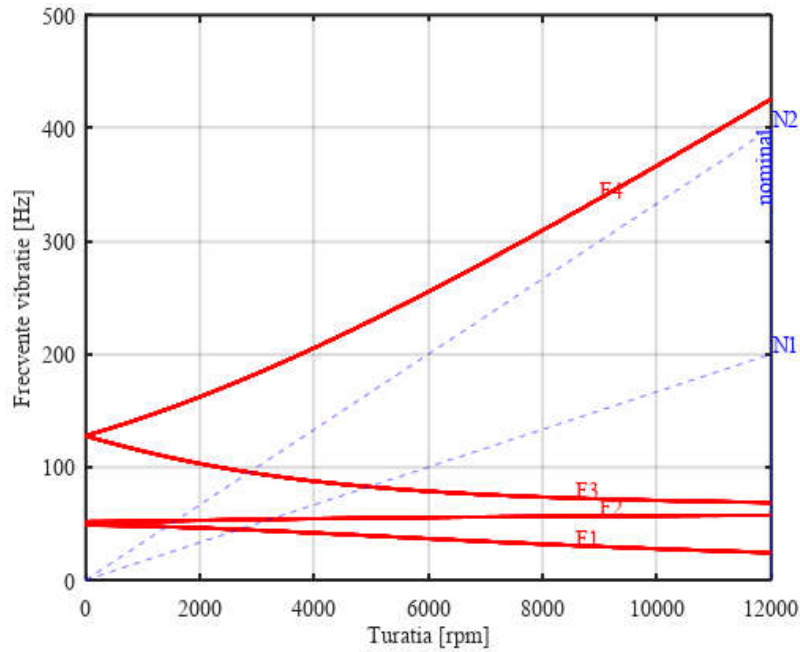


Figura 5.2. Diagrama Campbell în sistem de referință inerțial (cazul uzual).

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

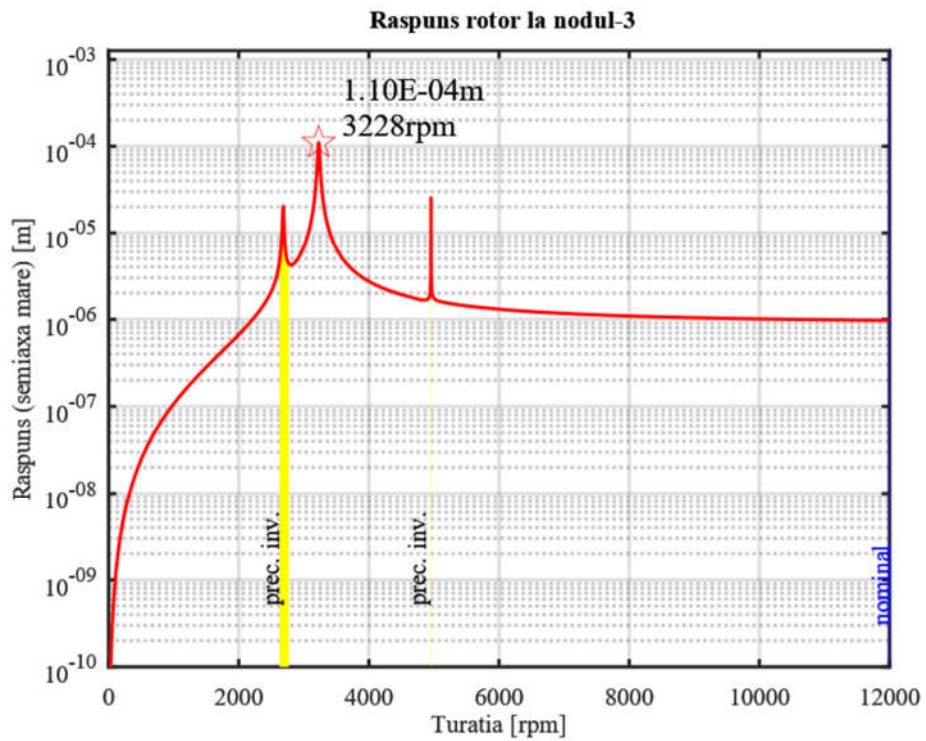


Figura 5.3. Deplasarea discului radială maximă la acțiunea dezechilibrului cu evidențierea zonelor de precesie inversă (prec. inv.bandă galbenă).

5.1.2 Rotor cu trei discuri, analiza în sistem de referință inerțial

a) Diagrama Campbell și formele de vibrație

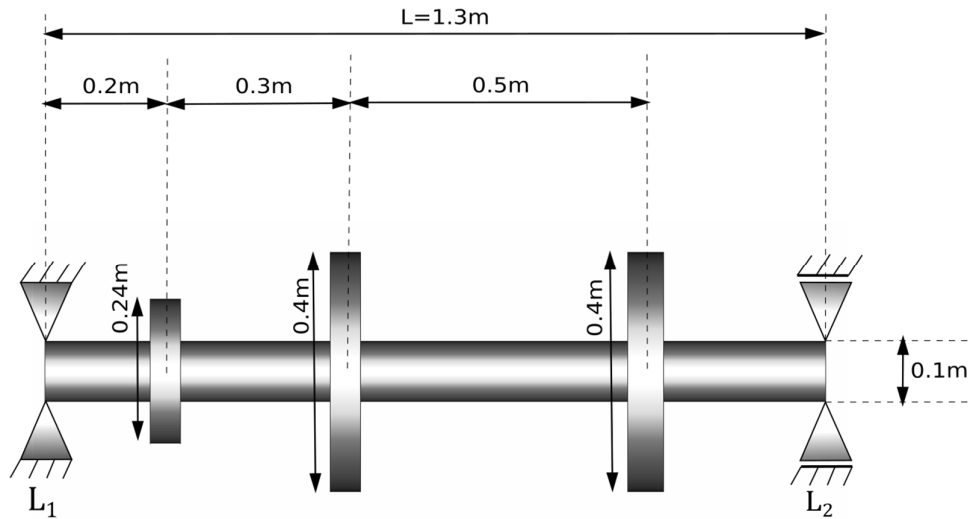


Figura 5.4. Rotor cu trei discuri și două lagăre. (Lalanne pag.126)

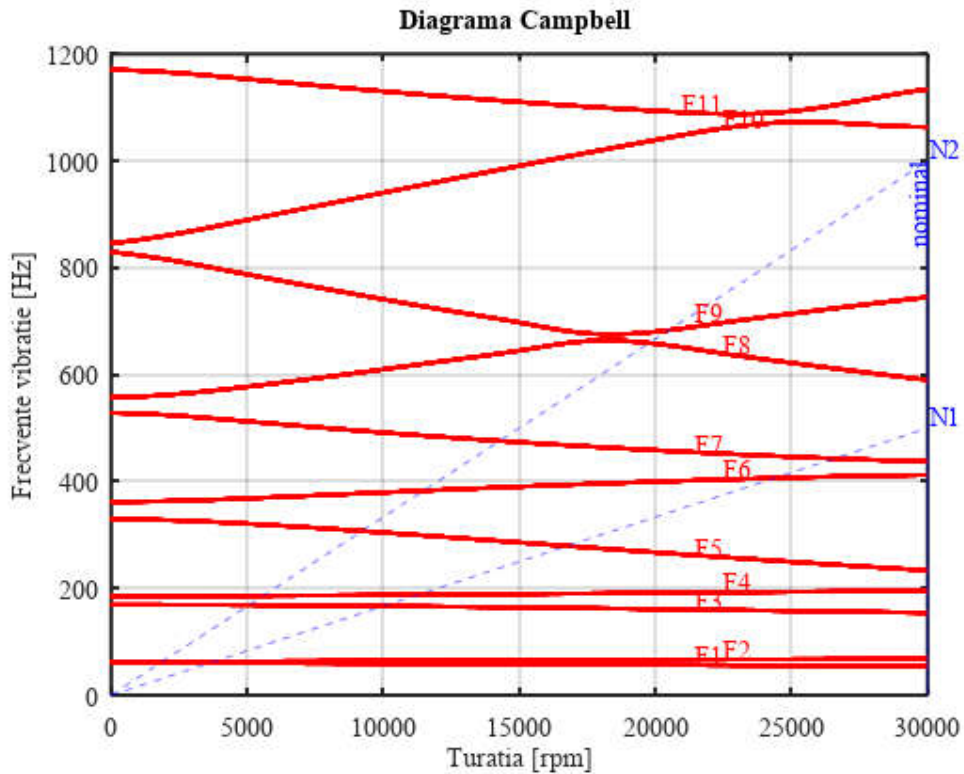


Figura 5.5. Diagrama Campbell în sistem de referință inerțial (cazul uzual).

Cele două lagăre sunt anizotrope cu caracteristicile de elasticitate $k_{xx}=5 \cdot 10^7$, $k_{yy}=7 \cdot 10^7$ și cele de amortizare $c_{xx}=5 \cdot 10^2$, $c_{yy}=7 \cdot 10^2$ diferite pe direcția axei Ox față de axa

Oy. Materialul este otel cu densitatea $\rho=7800\text{Kg/m}^3$, modulul de elasticitate $E=2\cdot 10^{11}\text{ N/m}$ și coeficientul Poisson $\nu=0,3$. Domeniul de funcționare este 0 - 30000rpm. Discretizarea cu elemente finite de tip bară Timoshenko este realizată conform cu cea prezentată de Lalanne în [24] pentru a permite comparația rezultatelor în referențialul inerțial obișnuit. Motivul alegerii acestui caz de calcul este largă sa utilizare în literatura de specialitate, ceea ce permite comparația rezultatelor obținute de autor cu cele publicate deja și implicit validarea modelului de pornire, iar apoi aprecierea contribuțiilor originale ale autorului în raport cu stadiul actual în domeniu.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

Calculul răspunsului în frecvență sub acțiunea forței sincrone generate de dezechilibrul celui de-al doilea rotor (notat R2 în figurile anterioare) măsurat la nivelul acestui rotor este redat în figura de mai jos. Calculul deplasării maxime radiale reliefează existența celor șapte maxime locale corespunzătoare celor șapte viteze critice când liniile de vibrație intersecționează linia de excitație N1. Valorile calculate pentru fiecare turație critică și frecvența de vibrație asociată sunt redată în primul tabel de mai jos. Pentru comparație sunt reproduse și valorile de referință furnizate de Lalanne pentru exact același rotor în lucrarea [24]. Eroarea relativă obținută în raport cu valorile de referință este foarte mică fiind egală sau mai mică de 0,2% cu excepția celei de-a șaptea turație critică la care deplasarea maximă radială calculată are o eroare de 1.3% față de referință. Sunt evidențiate în mod exact domeniile de precesie inversă a discului al doilea R2 cât și turațiile la care nu există precesie (turațiile de început și sfârșit ale zonelor de precesie inversă când graficul semiaxe mici tinde la zero).

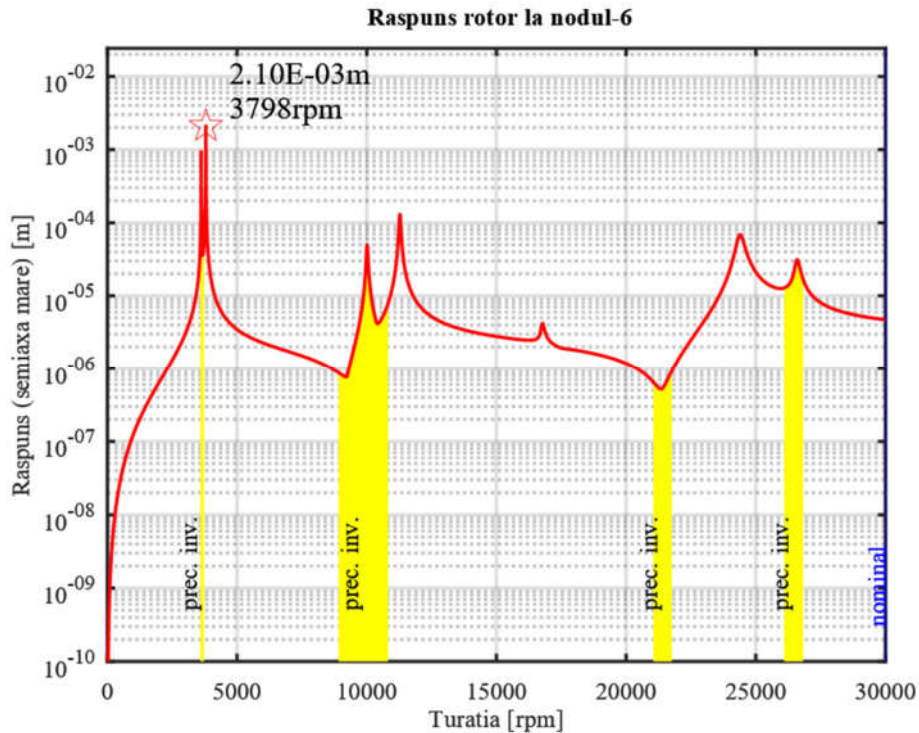


Figura 5.6. Deplasarea discului R2 radială maximă la acțiunea dezechilibrului cu evidențierea zonelor de precesie inversă (prec. inv.bandă galbenă).

Direcția preferențială de vibrație pentru fiecare turație fără precesie este dictată de caracterul neomogen al elasticității lagărelor pe direcția Ox și Oy. În final s-a evaluat și deplasarea maximă radială pentru întreg rotorul de 2.2 mm (vezi teză) la nivelul nodului 8 la 3798rpm.

Tabel 5.1. Evaluarea preciziei de calcul pentru frecvențele critice și amplitudinea de vibrație

Nr.viteză critică	Referință Lalanne pag.131 tabelul 6.3 [24]		Rezultate Obținute în implementarea autorului	
	Turație [rpm]	Răspuns [m]	Turație [rpm] (eroare%)	Răspuns [m] (eroare%)
1	3620.4	9.38E-04	3619.9 (0.0%)	9.38E-04 (0.0%)
2	3798.1	2.10E-03	3798 (0.0%)	2.10E-03 (0.0%)
3	10018	5.00E-05	10015 (0.0%)	5.00E-05 (0.0%)
4	11279	1.30E-04	11279 (0.0%)	1.30E-04 (0.0%)
5	16785	4.21E-06	16776 (0.1%)	4.20E-06 (0.2%)
6	24408	6.84E-05	24398 (0.0%)	6.85E-05 (0.1%)
7	26615	3.09E-05	26595 (0.1%)	3.13E-05 (1.3%)

5.2 ROTOR ÎN SISTEM DE REFERINȚA NEINERȚIAL SOLICITAT LA ACCELERAȚIE PE DIRECȚIA AXEI LAGĂRELOR ROTORULUI

În cazul aplicării unei accelerații pe direcția axială formularea Timoshenko a matricei de rigiditate se modifică prin adăugarea unei matrice suplimentară numită matricea de rigiditate diferențială [19]. Astfel că în cazul în care apare o tensionare a elementelor de tip bară Timoshenko se produce o creștere a rigidității elementului rezultând creșterea frecvenței fundamentale de vibrație a întregului ansamblu rotoric. La aplicarea în sens opus a accelerației față de cazul anterior apare o scădere a rigidității elementului de tip bară astfel încât frecvența de vibrație fundamentală suferă o scădere proporțională cu mărimea accelerației. În cazul rotoarelor cu arbori zvelți această scădere se poate manifesta până la atingerea valorii zero pentru frecvența naturală de vibrație fapt ce corespunde cu flambajul arborelui rotorului. Un alt factor care influențează frecvența de vibrație naturală a rotoarelor este, așa cum s-a demonstrat în această lucrare, momentul de torsiune și implicit puterea vehiculată de mașina rotativă. *Din acest punct de vedere, întotdeauna când are loc creșterea puterii transferată prin arborele mașinii rotative se produce scăderea frecvenței fundamentale de vibrație a rotorului.*

5.2.1. Rotor cu un disc

a) Cazul solicitării la compresiune: Accelerație pe direcția Oz = 30000 m/s².

S-a ales valoarea deosebit de mare a accelerației pentru a se evidenția clar pe diagrama Campbell efectul accelerației axiale. Pentru valori uzuale ale accelerației ar fi de dorit utilizarea unor modele de rotoare zvelte cum ar fi arborele de la elicea anticuplu a elicopterului dar acestea nu sunt ușor accesibile în literatura publicată în domeniul rotoarelor.

În acest caz se produce compresiunea arborelui. Frecvența fundamentală de vibrație este zero Hertz și ceea ce se traduce prin flambajul arborelui.

b) Cazul solicitării la întindere: Accelerație pe direcția Oz = -30000 m/s².

Toate frecvențele proprii suferă o creștere notabilă datorită apariției unei forțe inerțiale de întinde a arborelui.

5.2.2. Rotor cu trei discuri

a) Cazul solicitării la compresiune: Accelerație pe direcția Oz = 30000 m/s²

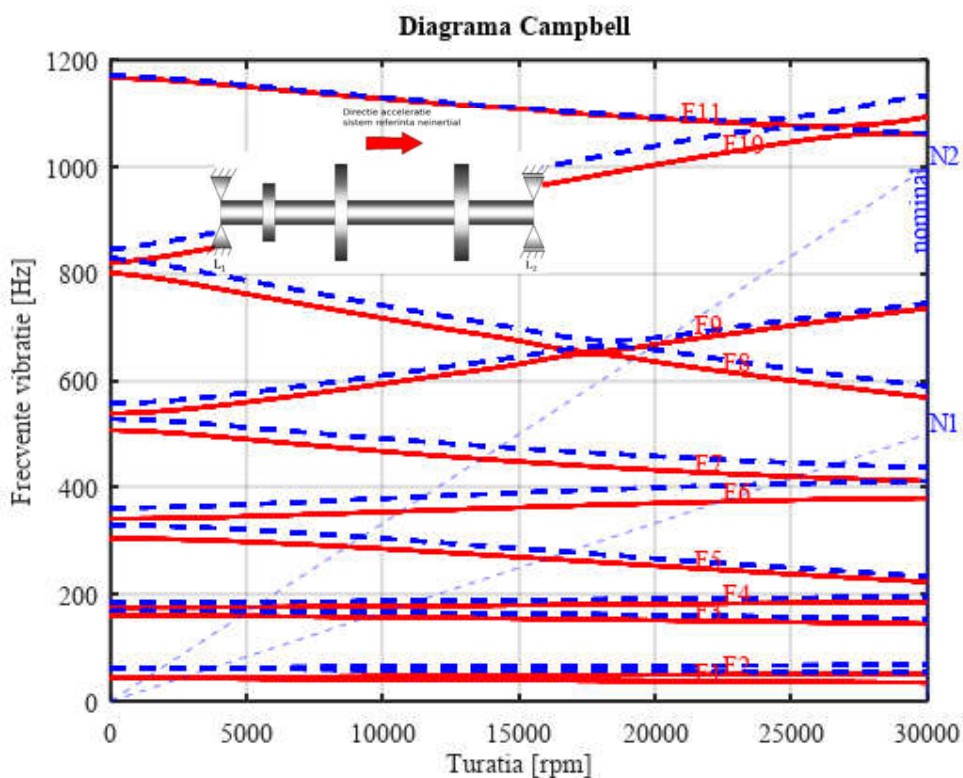


Figura 5.7. Diagrama Campbell în sistem de referință neinerțial ($a_z = 30000 \text{ m/s}^2$). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial.

Pentru configurația cu trei discuri aleasă arborele este foarte rigid și are loc o variație moderată a liniilor de vibrație la solicitarea de accelerație pe direcția axială aplicată. Astfel păstrând marja de siguranță de 10%, domeniul de funcționare în vecinătatea turației nominale este 92 – 100%. Aceasta rezultă într-o creștere de 6% a acestui domeniu de funcționare în raport cu cazul inerțial.

b) Cazul solicitării la întindere: Accelerație pe direcția $Oz = -30000 \text{ m/s}^2$.

Pentru cazul accelerației care determină întinderea arborelui se remarcă o deplasare ascendentă a liniilor de vibrație în diagrama Campbell. Această deplasare are loc de o manieră în care dacă se verifică intersecția N1/F7 se constată că nu mai respectă marja de siguranță impusă de 10%. Se poate astfel concluziona că funcționarea mașinii rotative la turația nominală devine periculoasă și se impune reducerea turației de funcționare în domeniul 64 – 78%. Prin întindere are loc creșterea rigidității arborelui astfel încât lagărele devin mai solicitate la mișcarea de vibrație decât în cazul inerțial.

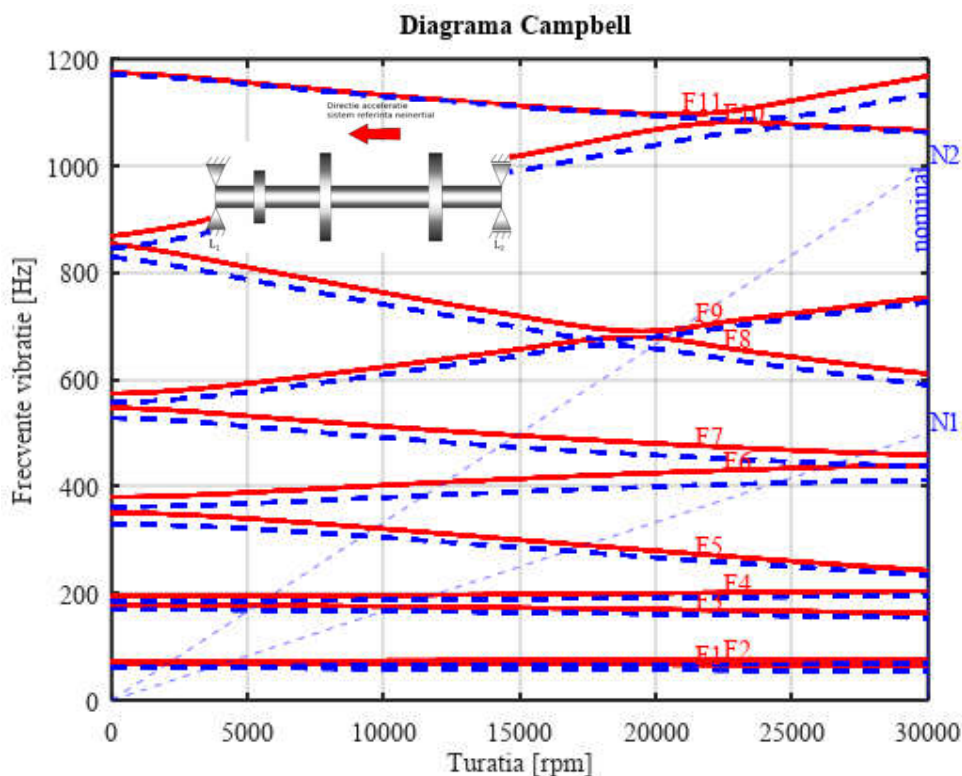


Figura 5.8. Diagrama Campbell în sistem de referință neinerțial ($a_z = -30000 \text{ m/s}^2$). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial.

5.3 ROTOR ÎN SISTEM DE REFERINȚA NEINERTIAL SUPUS ACCELERATIILOR DATORATE UNUI VECTOR DE ROTAȚIE PERPENDICULAR PE AXA LAGĂRELOR

5.3.1 Rotor cu un disc, rotație în jurul lagărului axial ($\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 30rps, \dot{\gamma} = 0$)

a) Determinarea diagramei Campbell

În cazul mașinii rotative în sistem de referință care se rotește în jurul axei Oy ce trece prin lagărul axial radial, din punct de vedere cantitativ, este dominant efectul întinderii arborelui care produce creșterea frecvențelor liniilor de vibrație. Din punct de vedere calitativ este determinantă influența directă a rotației sistemului de referință neinerțial astfel încât liniile de vibrație nu mai pornesc (la turația zero) din două puncte corespunzător celor două forme de vibrație ci pornesc din patru puncte. Această împărțire este datorată fenomenului numit „spin softening” manifestat pentru vibrația în planul perpendicular pe vectorul de rotație.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

Se produce deplasarea spre frecvențe superioare a turațiilor critice.

5.3.2 Rotor cu un disc, rotație în jurul centrului de masă al discului

$$(\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 30rps, \dot{\gamma} = 0)$$

În cazul în care sistemul de referință neinerțial cu originea în centrul de masă al discului tensiunea din arbore datorată forțelor inerțiale este minimă, practic neglijabilă în acest caz particular. Aceasta face ca să se evidențieze cu claritate efectul rotației sistemului neinerțial asupra diagramei Campbell. Se observă că liniile de vibrație corespunzătoare aceleiași forme de vibrație nu mai pornesc din același punct la turația zero. Acest fapt se datorează apariției fenomenului de „spin softening” în planul perpendicular pe vectorul de rotație al sistemului de referință neinerțial $Ox_1y_1z_1$.

a) Determinarea diagramei Campbell

Tensiunea în arbore este minimizată. Are loc o ușoară scădere a frecvenței fundamentale.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

Amplitudinea vibrației frecvenței fundamentale crește foarte mult.

5.3.3 Rotor cu un disc, rotație în jurul capătului opus lagărului axial

$$(\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 30rps, \dot{\gamma} = 0)$$

În acest caz cele două fenomene concură la realizarea unei creșteri aparente a flexibilității arborelui rotorului. În această configurație forța axială este negativă, de compresiune, și de aceea contribuția matricei $[K_A]$ este în sensul scăderii rigidității rotorului.

a) Determinarea diagramei Campbell

Apare o forță inerțială de compresiune în arbore. Frecvența fundamentală scade la zero Hertz semnaland astfel flambajul arborelui.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

Deplasarea laterală la turație zero este nenulă datorită forțelor inerțiale și dezechilibrului.

5.3.4 Rotor cu trei discuri, rotație în jurul lagărului axial

$$(\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 30rps, \dot{\gamma} = 0)$$

a) Determinarea diagramei Campbell

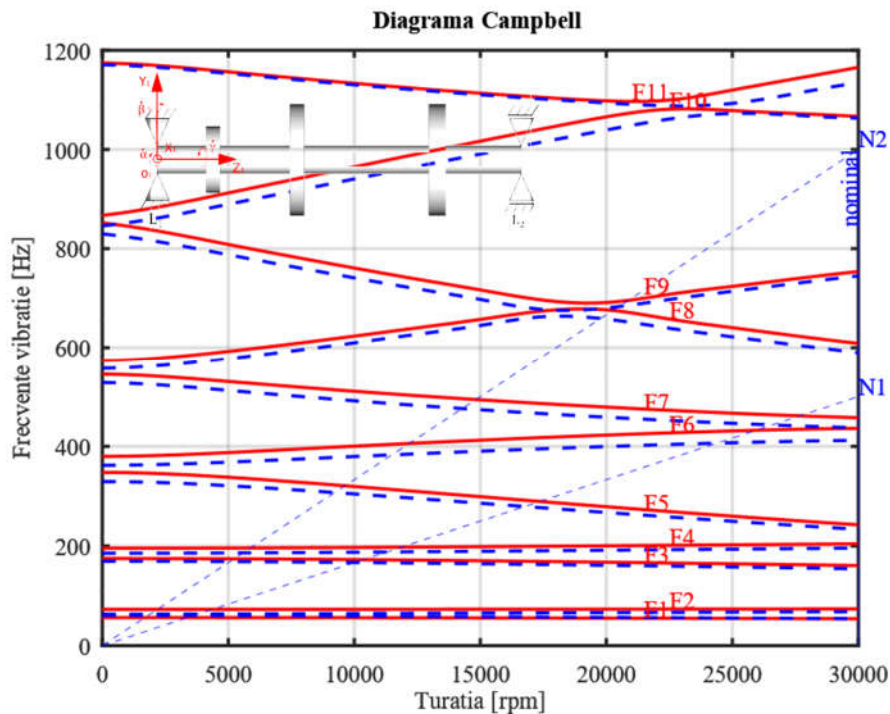


Figura 5.9. Diagrama Campbell în sistem de referință neinerțial ($\dot{\beta} = 30rps$). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial.

Pentru cazul când sistemul de referință neinerțial este amplasat cu originea în lagărul axial radial starea de tensiune axială este considerabilă. Diagrama Campbell arată deplasarea ușor ascendentă a liniilor de vibrație cu excepția liniei F1 care este cea mai sensibilă la rotația conform cu o axă perpendiculară pe axa lagărelor. Se poate spune că în cazul liniei F1 fenomenul de „spin softening” are o influență mai mare decât tensionarea arborelui.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

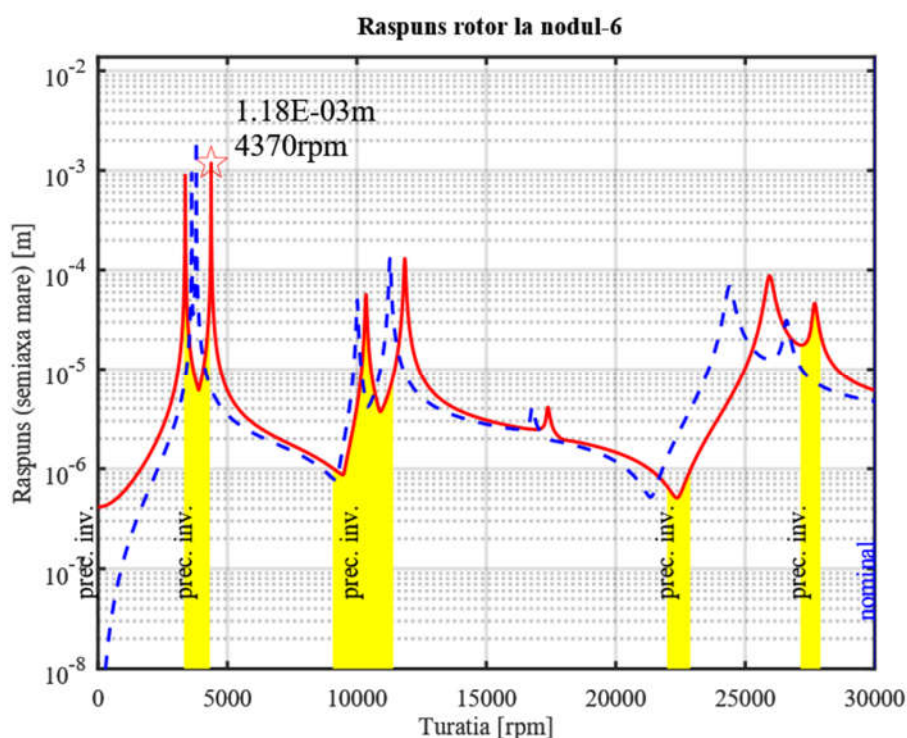


Figura 5.10. Deplasarea discului R2 radială maximă la acțiunea dezechilibrului cu evidențierea zonelor de precizie inversă (prec. inv. bandă galbenă). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inercial pentru comparație.

5.3.5 Rotor cu trei discuri, rotație în jurul centrului de masă al rotorului

$$(\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 30rps, \dot{\gamma} = 0)$$

a) Determinarea diagramei Campbell

În acest caz tensiunea axială în arbore datorată forțelor inerțiale este minimizată și astfel expresia fenomenului de „spin softening” se evidențiază mai bine.

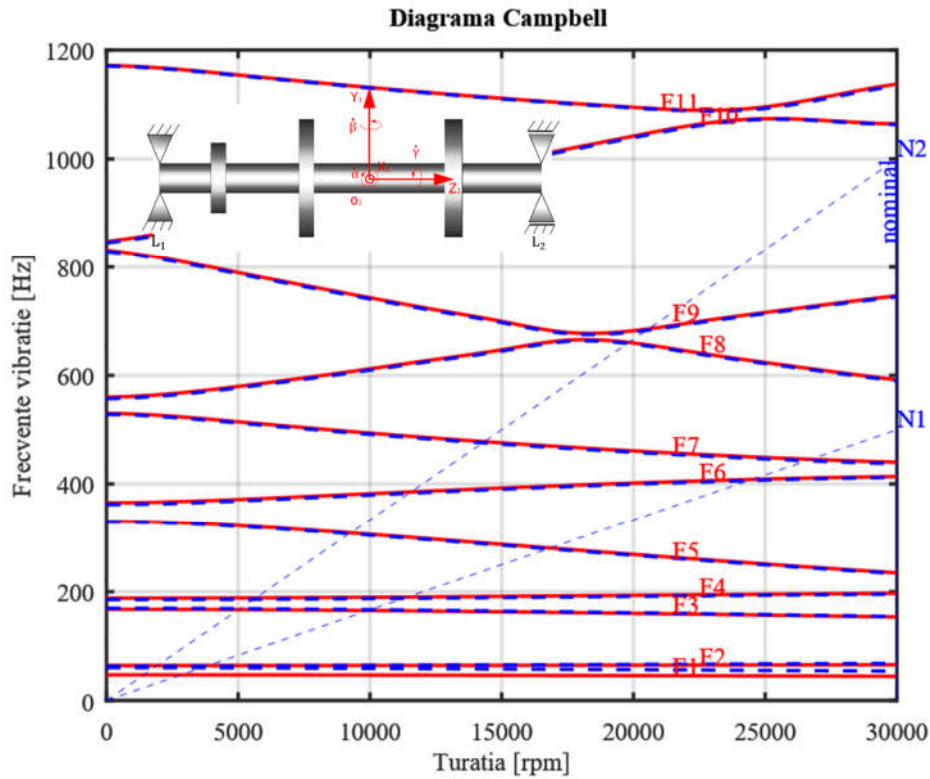


Figura 5.11. Diagrama Campbell în sistem de referință neinerțial ($\dot{\beta} = 30rps$). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

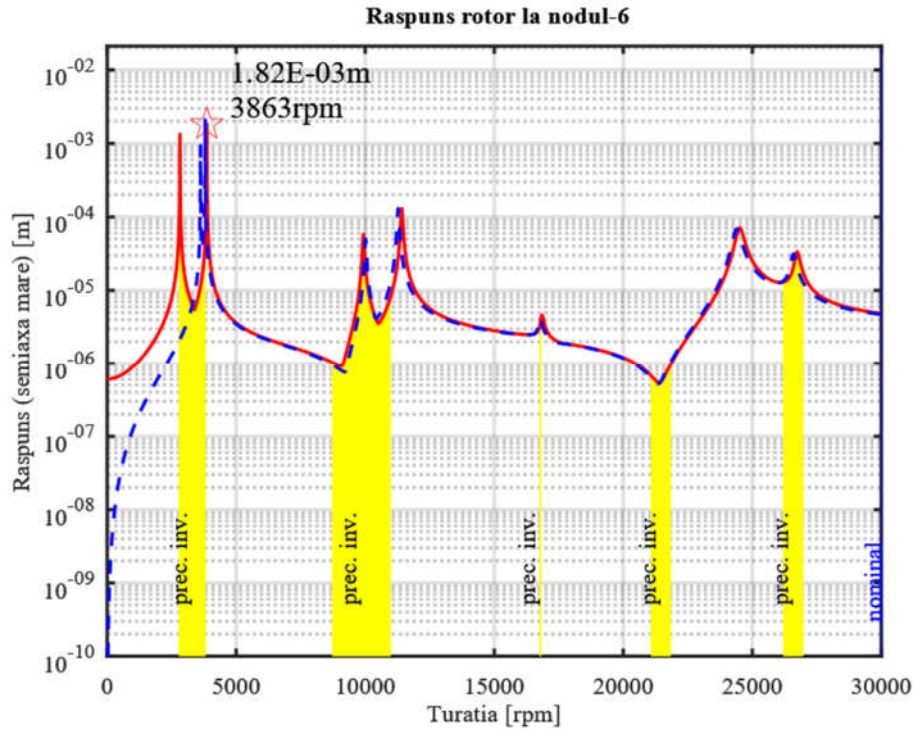


Figura 5.12. Deplasarea discului R2 radială la acțiunea dezechilibrului cu evidențierea zonelor de precesie inversă (prec. inv. bandă galbenă). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial pentru comparație.

5.3.6 Rotor cu trei discuri, rotație în jurul capătului opus lagărului axial al rotorului ($\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 30rps, \dot{\gamma} = 0$)

a) Determinarea diagramei Campbell

În acest caz amplasarea sistemului de referință neinerțial la capătul opus lagărului axial produce comprimarea arborei rotorului. Astfel că cele două efecte care guvernează vibrația rotorului „spin softening” și comprimarea arborei se combină în mod aditiv conducând la scăderea frecvențelor pentru toate liniile de vibrație și în mod special pentru linia de vibrație F1.

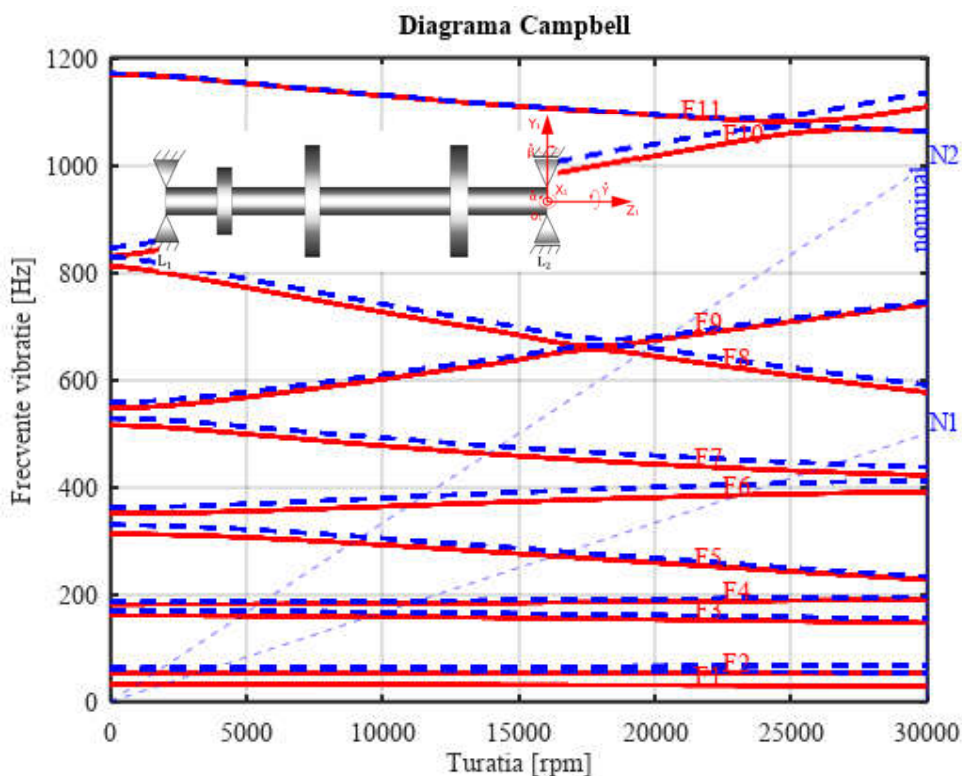


Figura 5.13. Diagrama Campbell în sistem de referință neinerțial ($\dot{\beta} = 30rps$). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

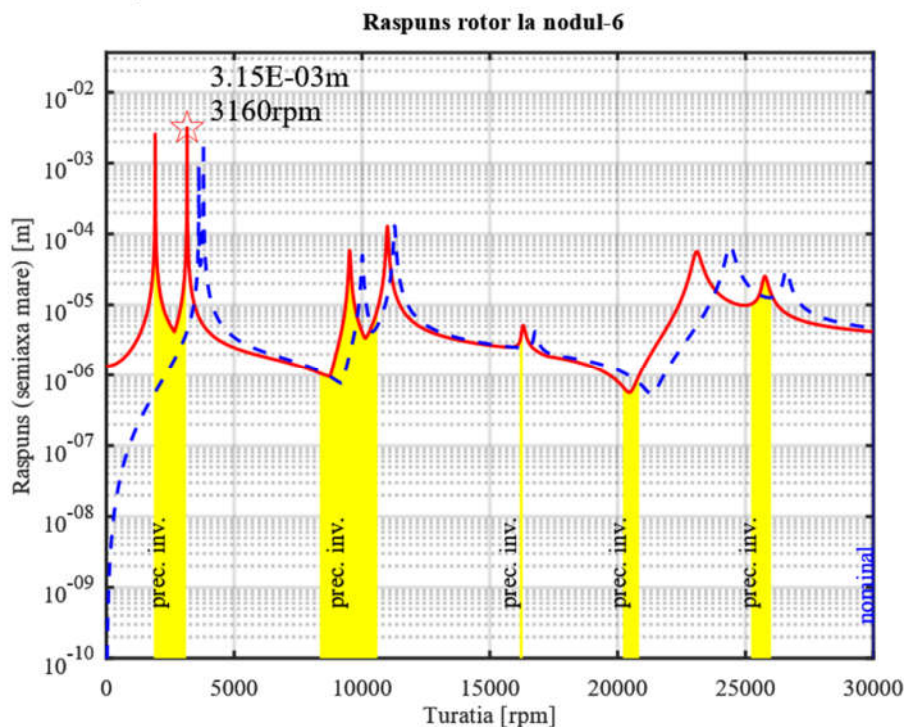


Figura 5.14. Deplasarea discului R2 radială maximă la acțiunea dezechilibrului cu evidențierea zonelor de precesie inversă (prec. inv. bandă galbenă). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial pentru comparație.

5.4 ROTOR ÎN SISTEM DE REFERINȚĂ NEINERȚIAL SUPUS ACCELERAȚIILOR DATORATE UNUI VECTOR DE ROTAȚIE COLINIAR CU AXA LAGĂRELOR

5.4.1 Rotor cu un disc, rotație directă ($\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = 30rps$)

Pentru rotația sistemului de referință neinerțial în sens direct în jurul axei lagărelor mișcarea de precesie inversă apare ca fiind mai rapidă cu diferența de frecvență corespunzătoare rotației în jurul axei lagărelor (30rps \rightarrow 30Hz). Pe de altă parte rotația în jurul axei lagărelor amplifică forța dată de dezechilibru și duce la deplasări radiale mai mari comparativ cu cazul inerțial.

a) Determinarea diagramei Campbell

Frecvența fundamentală manifestă o scădere notabilă și schimbă direcția de precesie. Celelalte frecvențe de vibrație sunt mai mari comparativ cu cazul inerțial.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

Deplasarea radială pentru prima frecvență de vibrație crește foarte mult. Pentru celelalte frecvențe are loc reducerea amplitudinii maxime de vibrație.

5.4.2 Rotor cu un disc, rotație inversă ($\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = -30rps$)

În cazul rotației sistemului de referință neinerțial în sens invers față de turația nominală a rotorului are loc modificarea efectelor precesiei inverse și a precesiei directe ceea ce produce deplasarea liniilor de vibrație F1 și parțial F2+F3 cu aproximativ 30Hz. Turația sistemului neinerțial $\dot{\gamma}$ este considerată constantă și deci ea acționează și atunci când turația proprie a mașinii rotative Ω este nulă generând astfel fenomene de precesie la turație zero.

a) Determinarea diagramei Campbell

Frecvența fundamentală scade în comparație cu cazul inerțial și își păstrează sensul de precesie. Datorită momentului giroscopic indus de rotația sistemului neinerțial liniile de vibrație perechi nu mai pornesc din același punct (de la aceeași frecvență) la turația zero.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

Amplitudinile de vibrație laterală la solicitarea dezechilibrului sunt mai reduse decât în cazul inerțial.

5.4.3 Rotor cu trei discuri, rotație directă ($\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = 30rps$)

Pentru rotorul cu trei discuri, rotația sistemului de referință neinerțial în sensul direct duce la creșterea frecvențelor liniilor de vibrație cu precesie inversă și la scăderea frecvențelor liniilor de vibrație cu precesie directă. Comparativ cu cazul inerțial acest fapt ar conduce la intersecția liniilor de vibrație alăturate. În realitate lucrul acesta nu se întâmplă și are loc un fenomen mai complex. *Liniile de vibrație pornesc ca și cum urmează să se intersecteze dar în loc să se intersecteze se transformă, cea de precesie directă în linie de precesie inversă și cea de precesie inversă se transformă în linie de precesie directă.* Acest fapt poate fi exemplificat pentru liniile de vibrație F5 și F6. Se observă din diagrama Campbell că linia F5 se transformă între turațiile 10000rpm și 12500 rpm din precesie directă în precesie inversă fără a se intersecta cu linia F6. Modificarea liniilor de vibrații este de natură să facă imposibilă funcționarea în marjă de siguranță de 10% la turația nominală. Deplasarea laterală sub influența dezechilibrului crește față de cazul inerțial datorită efectului de „spin softening” adus de rotația sistemului neinerțial.

a) Determinarea diagramei Campbell

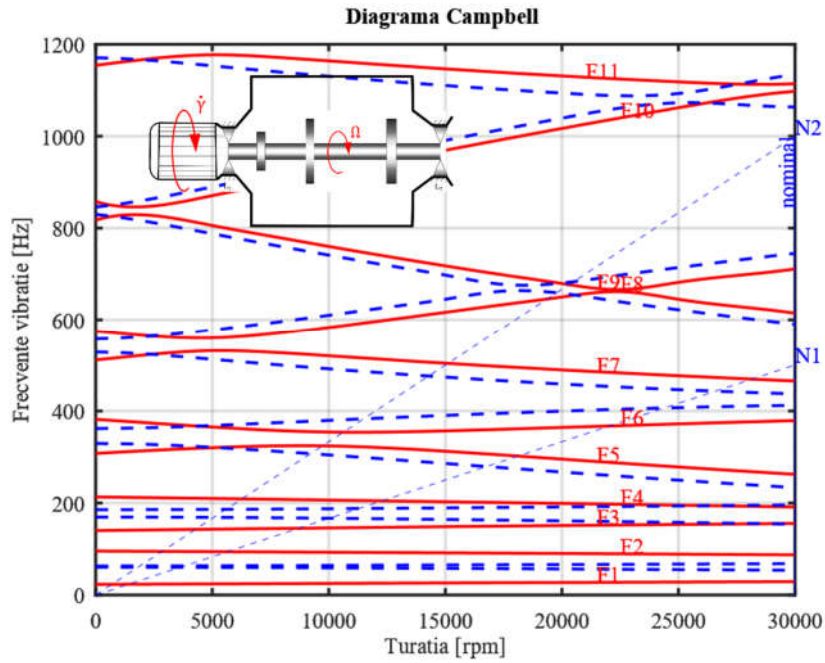


Figura 5.15. Diagrama Campbell în sistem de referință neinerțial ($\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = 30rps$). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

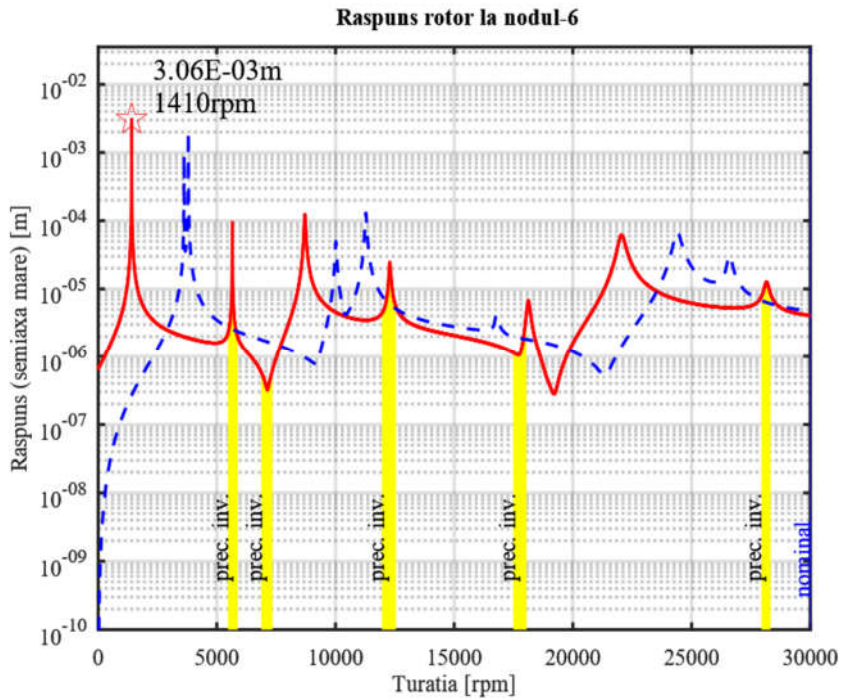


Figura 5.16. Deplasarea discului R2 radială maximă la acțiunea dezechilibrului cu evidențierea zonelor de precesie inversă (prec. inv. bandă galbenă). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial pentru comparație.

5.4.4 Rotor cu trei discuri, rotație inversă ($\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = -30rps$)

Pentru rotația în sens invers a sistemului de referință neinerțial $Ox_1y_1z_1$ se înregistrează scăderea frecvențelor de vibrație pentru liniile de vibrație de precesie inversă și creșterea frecvențelor de vibrație pentru liniile de precesie directă. Acest fapt se datorează apariției unei influențe echivalente cu cea giroscopică și care are o influență ce se adaugă la toate turațiile. Răspunsul la solicitarea dezechilibrului capătă o diferență majoră față de cazul inerțial prin scăderea la zero a deplasării laterale atunci când turația rotorului devine egală cu 30rps (1800rpm). Acest fapt se explică prin dispariția forței centrifuge ce acționează asupra dezechilibrului. Din punctul de vedere al zonelor de funcționare a rotorului o marjă de siguranță de 10% înseamnă că rotorul poate funcționa strict la turația nominală N_n , zona 81 – 99% fiind interzisă datorită intersecției N_1/F_7 .

a) Determinarea diagramei Campbell

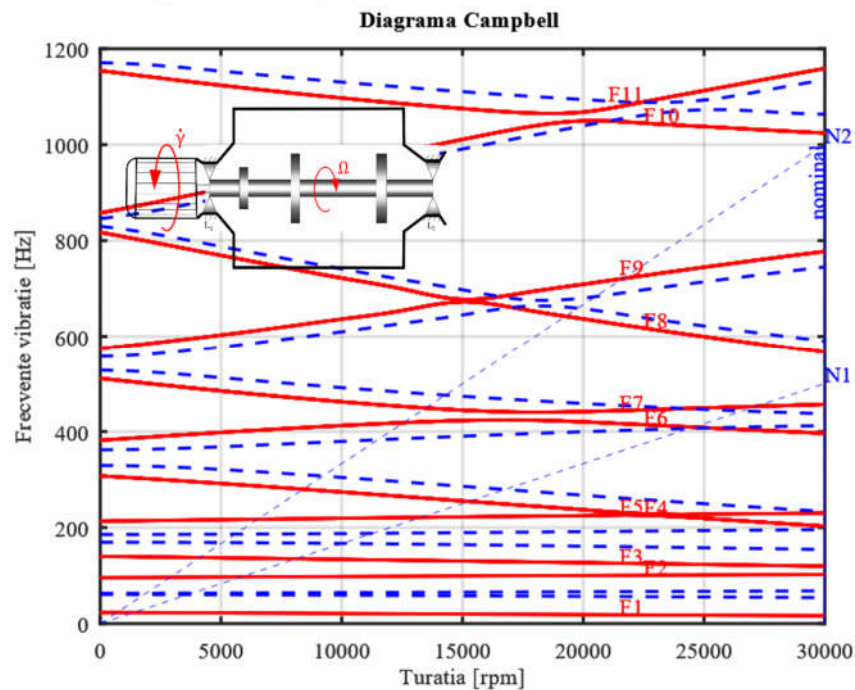


Figura 5.17. Diagrama Campbell în sistem de referință neinerțial ($\dot{\alpha} = 0rps, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = -30rps$). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial.

b) Răspuns în frecvență la solicitarea dezechilibrului

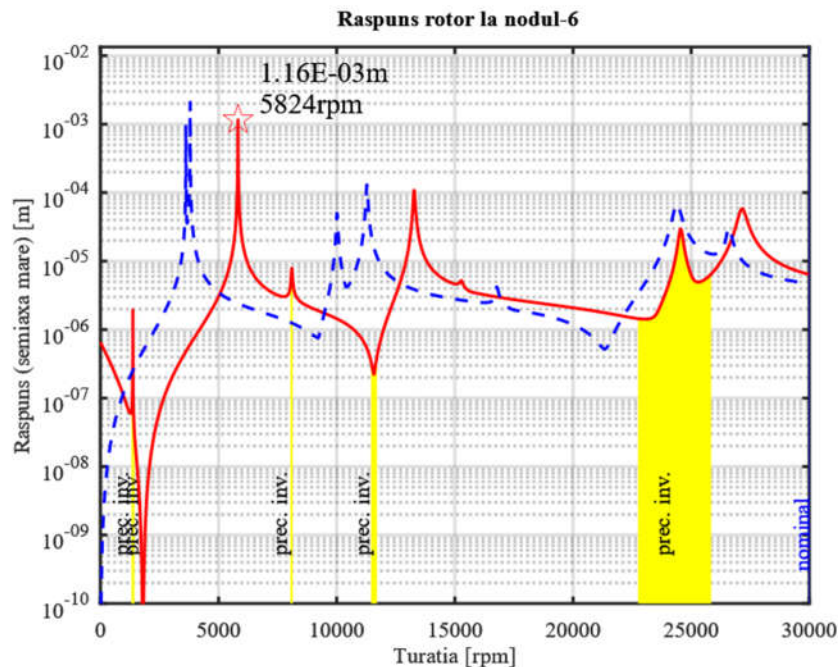


Figura 5.18. Deplasarea discului R2 radială maximă la acțiunea dezechilibrului cu evidențierea zonelor de precesie inversă (prec. inv. bandă galbenă). Cu linie albastră întreruptă este redat cazul inerțial pentru comparație.

5.5 DETERMINAREA ANVELOPEI NEINERȚIALE DE FUNCȚIONARE A ROTORULUI

Două limite fundamentale stau la baza determinării anvelopei de funcționare a unui rotor în general și acestea sunt tensiunea Von Mises maximă admisibilă a materialelor folosite și limita de flambaj a axului rotorului. În plus față de aceste două limitări general valabile se pot detalia și alte limitări date de marje de siguranță în exploatare, rezonanțe, etc. Mai jos sunt reprezentate anvelopele neinerțiale pentru un rotor din oțel cu limita la curgere $2.5E8$ Pa. Din prima diagramă se observă că la aplicarea de accelerație axială momentul de torsiune din rotor trebuie redus astfel încât să nu se depășească limita la curgere a materialului, tensiunea maximă admisibilă Von Mises. În cea de a doua figură este verificată variația frecvenței fundamentale de vibrație în domeniul anvelopei de funcționare. În acest caz limitarea pe criteriul tensiunii Von Mises intervine înainte să apară fenomenul de flambaj astfel încât acesta din urmă nu intervine în construirea anvelopei neinerțiale.

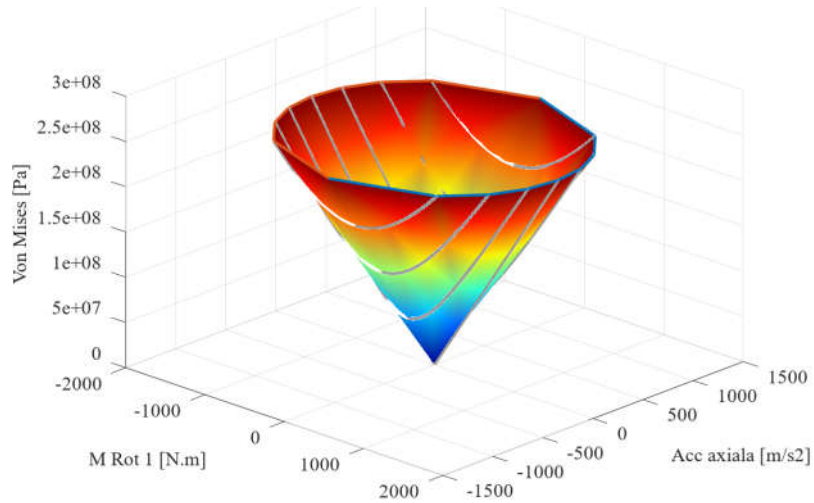


Figura 5.19. Anvelopa neinerțială datorată limitei la curgere a materialului folosit.

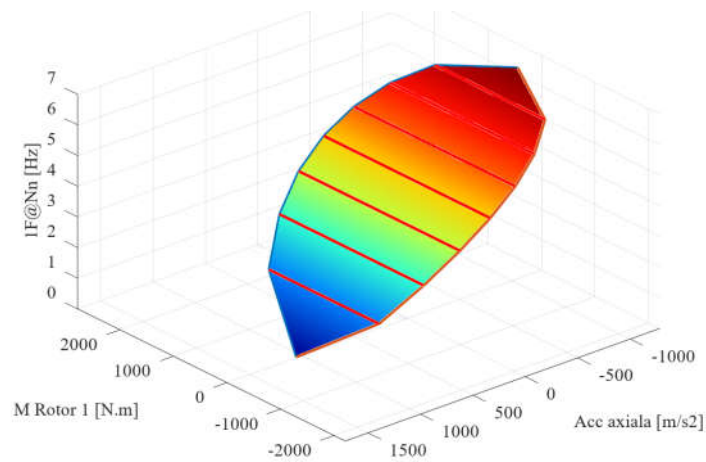


Figura 5.20. Anvelopa neinerțială. Verificarea limitei la flambaj prin evaluarea frecvenței fundamentale de vibrație a rotorului.

CONCLUZII

C.1. CONCLUZII GENERALE

Lucrarea scoate în evidență importanța studiului dinamicii rotoarelor în sisteme de referință de tip neinerțial în proiectarea mașinilor rotative destinate în special domeniului aerospațial. Abordarea din cadrul lucrării este puternic orientată spre aplicația practică necesară în mod uzual inginerului din domeniul aeronautic și este rezultatul provocărilor întâlnite de autor în decursul celor cincisprezece ani de activitate în parteneriat cu companii de renume cum ar fi SAFRAN, ESA, AIRBUS, DLR, ONERA, CIAM. Deși exemplele abordate în cadrul lucrării sunt alese din literatura de specialitate pe criteriul de a fi bine cunoscute și documentate, modul cum sunt tratate cazurile de calcul sunt elocvente pentru toate cazurile practice întâlnite în domeniul neinerțial și în special domeniul aerospațial. Activitatea de pionierat la nivel mondial desfășurată de teoreticieni precum Voinea R. și Stroe I. [1] este dezvoltată în detaliu ținând cont totodată de evoluția actuală la nivel mondial cu accent pe dezvoltarea tehnicilor de element finit [2] capabile să analizeze configurații geometrice și ansamble de piese foarte complexe. Dezvoltarea teoretică a fost realizată pornind de la reprezentarea simplă sub forma unui punct material supus la diverse forțe des întâlnite în experiența practică cum ar fi prezența forțelor axiale și radiale cât și a momentului de torsiune implicat în transmisia de putere între diversele secțiuni ale rotorului. Apoi, pe baza concluziilor deduse pentru cazul punctului material a fost dezvoltată o teorie în domeniul elementelor finite. Reprezentarea de tip bară Timoshenko a fost aleasă pentru a fi îmbogățită cu elementele teoretice necesare pentru realizarea calculului specific dinamicii rotoarelor. Motivul se datorează preciziei foarte bune, a vitezei de calcul relativ mare și a utilizării pe scară largă cu rezultate foarte bune în domeniul calculului de rezistența materialelor și a analizei la vibrații a rotoarelor. Astfel, pe parcursul lucrării, a fost pusă la punct o metodologie de analiză care satisface cerințele întâlnite la toate aplicațiile practice de rotoare din domeniul aerospațial. În capitolul referitor la aplicații numerice sunt exemplificate toate configurațiile tipice de neinerțialitate ce pot fi întâlnite în activitatea practică și este evidențiată importanța considerării teoriei neinerțiale în comparație directă cu cea inerțială utilizată în mod uzual. În funcție de magnitudinea vitezelor unghiulare ce implică sistemul de referință neinerțial atașat rotorului cât și de zveltețea și alte particularități ale rotorului se poate ajunge chiar la situația cedării catastrofale a rotorului. Fenomenele implicate, ținând de flambajul axului rotorului sub acțiunea accelerațiilor sau datorită modificării dramatice a frecvențelor critice astfel încât să se înregistreze suprapunerea peste domeniul de funcționare, au fost analizate în detaliu cu evidențierea măsurilor de siguranță care trebuie adoptate pentru fiecare caz particular.

C.2. CONTRIBUȚII ORIGINALE

O contribuție importantă a lucrării de față o constituie deducerea formei complete a teoriei Timoshenko pentru bare cu includerea influenței momentului de torsiune asupra

frecvenței de vibrație laterală. În domeniile în care este necesară o evaluare precisă a vibrațiilor mașinilor rotative cum ar fi domeniul aerospațial, teoria barei Timoshenko este una dintre cele mai folosite deoarece, în general, este una dintre cele mai avansate teorii la momentul actual. Totuși pentru domeniul rotoarelor cu arbori zvelți, caracterizați prin coeficient de zveltețe a arborelui $R/2L < 0.0025$ [17] și puternic încărcăți cum ar fi transmisia de la elicea anticuplu a elicopterului, momentul de torsiune care însoțește transmiterea puterii modifică dramatic frecvențele proprii de vibrație. Astfel pentru aceste cazuri este absolut necesară considerarea influenței momentului de torsiune asupra frecvențelor de vibrație laterale. Utilitatea deosebită a acestei contribuții este dată și de domeniul mult mai larg de aplicație care nu se limitează doar la domeniul prezentei teze ci afectează toate mașinile rotative și în special cele cu arbori zvelți.

O nota suplimentară de originalitate este și abordarea teoriei în prezența deformațiilor mari.

O contribuție notabilă o reprezintă elaborarea programului numeric de analiză complexă a rotoarelor în sisteme de referință neinerțiale, elaborat de autor folosind limbajul de programare Matlab.[25, 26] Cu acest program complex, au fost trasate toate curbele din cuprinsul tezei.

Nivelul maxim de simplificare a capitolului cinci în domeniul aplicativ poate fi considerat de asemeni o contribuție importantă deoarece face accesibilă teoria neinerțială a rotoarelor pentru majoritatea cercetătorilor din domeniul mecanicii aplicate. Simplificarea prezentării a fost făcută astfel încât să se evidențieze fenomenele cauzate de evoluția neinerțială a rotoarelor nu prin scăderea gradului de generalitate a abordării ci prin alegerea judicioasă a amplasării sistemului de coordonate neinerțial în raport cu componentele rotorului și în raport cu un sistem inerțial. Aplicația nemijlocită în domeniul roboților industriali este evidentă când se consideră centrele de frezare în cinci axe la care un braț robotic manevrează o freză de mare turație. Pe de altă parte modul de construire a brațelor robotice implică folosirea de motoare electrice cu turație relativ mare a căror cuplu mic este transformat prin mecanisme reductoare în cuplu mare și viteză unghiulară mică. De aici rezultă că fiecare element al brațelor robotice poate conține o mașină rotativă (roțile reductorului) în sistem neinerțial. Deși nu este evident, teoria din domeniul roboticii stă la baza prezentării simplificate a capitolului cinci referitor la aplicații numerice. Teorema lui Chasle [27–29] demonstrează că orice mișcare a unui corp solid poate fi considerată ca o rotație în jurul unei axe însoțită de o translație după aceeași axă. Astfel rezultă cea mai simplă alegere a sistemului de axe neinerțial legat de mașina rotativă având axa Oz coincidentă cu această axă a mișcării. Totuși din punct de vedere practic este mai utilă folosirea unui sistem de referință neinerțial amplasat pe axa lagărelor mașinii rotative. Metoda Denavit-Hartenberg [27–29] din domeniul roboticii este utilizată pentru a transforma sistemul neinerțial cu mișcare după o axă (conform teoremei Chasle) într-un sistem neinerțial coliniar cu axa lagărelor cu mișcare după două axe.

Meritul și contribuția abordării din capitolul de aplicații numerice este că pune la dispoziția oricărui specialist din domeniul aerospațial și al roboticii o metoda de clasificare din punct de vedere calitativ a efectelor unei mișcări generale asupra mașinii rotative prin

interpretarea poziției sistemului neinerțial obținut prin metoda Denavit-Hartenberg în raport cu centrul de masă al rotorului și lagărul axial. De exemplu pentru un rotor care are lagărul axial poziționat la stânga centrului de masă al rotorului și sistemul de axe neinerțial obținut prin metoda Denavit-Hartenberg se află tot la stânga centrului de masă atunci efectele rotațiilor neinerțiale vor fi similare cazului când sistemul neinerțial este amplasat cu originea în lagărul axial.

Pentru estimarea cantitativă a acestor efecte trebuie aplicată teoria numerică dezvoltată în lucrarea prezentă și în funcție de limitele de rezistență ale materialelor și soluțiilor constructive folosite se poate calcula anvelopa neinerțială de funcționare a mașinii rotative ce descrie domeniul de funcționare sigură a mașinii rotative aflată într-un sistem neinerțial. Deoarece caracterul de neinerțialitate este dat de cele trei viteze de rotație și de cele șase accelerații asociate axelor sistemului neinerțial rezultă că anvelopa de funcționare în domeniul neinerțial este o hipersuprafață în spațiul cu nouă dimensiuni. Pentru rotoarele care vehiculează putere, respectiv moment de torsiune, este utilă includerea acesteia în anvelopa inerțială pentru a obține legea de reglare a mașinii rotative la solicitări în domeniul neinerțial (se reglează turația). În scopul vizualizării rezultă diagrame precum cele din subcapitolul 5.5 care sunt de mare ajutor pentru proiectarea preliminară atât a mașinii rotative în sine cât și a vehiculului care este dotat cu această mașină rotativă. Sunt ilustrate cele două limitări universal valabile, limita de tensiune Von Mises care nu poate depăși limita de curgere a materialului rotorului și a cea a frecvenței fundamentale ($1F@Nn$) care nu poate fi nulă, caz în care s-ar produce flambajului rotorului (flambaj la compresiune, torsiune sau combinat).

Nu în cele din urmă este de menționat contribuția aplicativă a autorului în domeniul patentelor internaționale materializată prin aplicarea pe durata studiilor doctorale pentru trei patente în domeniul turbomotoarelor de aviație prin intermediul sistemul francez de patentare cu scopul creșterii siguranței transportului aerian în situația ruperii unei palete de turboventilator. O parte dintre contribuțiile originale menționate în acest paragraf au fost publicate de autor în reviste de specialitate naționale, în cadrul aplicațiilor pentru patente în sistemul francez de patentare precum și la conferințe internaționale. [9, 18, 30–39]

Prezenta lucrare introduce în literatura de specialitate românească o teorie actualizată bazată pe formularea Timoshenko capabilă să susțină analiza dinamică pentru rotoare de orice grad de complexitate constituind astfel o contribuție absolut necesară pentru domeniul aerospațial.

C.3. PERSPECTIVE DE DEZVOLTARE ULTERIOARĂ

În cuprinsul lucrării au fost abordate toate cazurile semnificative pentru rotoarele ce funcționează în sistem de referință neinerțial. Totuși un domeniu deschis dezvoltării rămâne cel al metodelor numerice folosite cu scopul creșterii vitezei de calcul îndeosebi pentru calculul explicit neliniar. În această lucrare a fost folosită metoda Runge-Kutta, o metodă recunoscută pentru robustețea sa, dar care nu este satisfăcătoare din punctul de vedere al timpului de calcul. În acest scop se pot dezvolta metode bazate pe algoritmi mai eficienți

cum ar fi Wilson teta, metode dezvoltate special pentru domeniul dinamicii rotoarelor în sistem de referință neinerțial.

O altă direcție importantă de dezvoltare o constituie analiza mașinilor rotative cu discuri flexibile. Un astfel de caz îl constituie de exemplu rotoarele de turbomotoare, dublu flux cu grad mare de diluție, rotoarele de elicopter sau cele pentru turbinele eoliene. Deși în prezent există metode pentru abordarea acestor probleme, se pot îmbunătăți și mai mult viteza de calcul cât și rezultatele obținute în scopul evidențierii fenomenelor ce guvernează mașinile rotative în sistem de referință neinerțial.

Nu în cele din urmă se poate dezvolta metoda elementelor finite astfel încât nu doar întreaga mașină rotativă să aibă un sistem de referință neinerțial ci fiecare element finit să posedă sistemul său de referință propriu neinerțial care se va raporta printr-o transformare de coordonate la sistemul de referință neinerțial al mașinii rotative. Această implementare conferă o libertate deplină în abordarea deformațiilor mari ale pieselor componente din mașina rotativă indiferent de gradul de complexitate geometrică.

O problemă foarte dificilă în domeniul dinamicii mașinilor rotative cu geometrie complexă în sistem neinerțial este capacitatea de calcul foarte mare necesară pentru a asigura gradul de certitudine impus în funcționare. Conform normelor Agenției Spațiale Europene coeficientul de siguranță uzual folosit în proiectarea și calculul navelor spațiale este 1.25.[40] Există cazuri în care simplificarea geometriei prin elemente unidimensionale cum ar fi bara de tip Timoshenko nu furnizează toate informațiile necesare pentru validarea proiectului fiind necesare și simulări cu elemente tridimensionale. Acestea sunt necesare, de exemplu, pentru calculul concentrărilor de tensiuni la nivelul racordărilor cu rază mică. Un model de calcul cu elemente tridimensionale cum ar fi hexaedre și tetraedre va fi în final de câteva zeci de mii până la milioane de ori mai complex decât un model simplu cu elemente unidimensionale de tip bară. În consecința timpul și infrastructura de calcul necesare vor fi atât de mari încât adesea această abordare nu este posibilă din punct de vedere practic date fiind termenele de realizare limitate și dotarea specială necesară pe partea de software și hardware.

În acest scop se poate dezvolta metoda modelării cu latice de bare, se poate trece foarte rapid de la un model unidimensional, precum cel tratat în lucrarea prezentă, la un model bidimensional în plan și în cele din urmă la un model tridimensional. Se pot face rafinări locale pentru a cunoaște rapid comportarea mașinii în zonele critice care sunt cele mai solicitate în funcționare. Alt avantaj al acestei tehnici este viteza mare de modelare, calcul și optimizare în timpul proiectării preliminare când accentul cade pe validarea soluției și mai puțin pe precizia rezultatelor.

În final pentru domenii cum este cel aerospațial se pot implementa rapid scenarii de cedare catastrofală a diverselor componente a mașinii rotative cu scopul evaluării și optimizării gradului de siguranță în exploatare. Este cunoscut că standardele actuale în aviație impun funcționarea în siguranță a aeronavei chiar și în cazul, de exemplu, a ruperii unei palete de turboventilator. Tehnica de modelare cu latice de bare este foarte potrivită în aceste cazuri deoarece permite modelarea fisurilor, a rupturii, în mod nativ fără a fi necesară

introducerea de elemente speciale în model și fără a fi necesară regenerarea matricei de rigiditate la fiecare modificare a fisurii, rupturii.

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

- [1] Voinea, R., Stroe, I.: Vibrations of rotors situated in non-inertial reference frame. *Mécanique-Matériaux-Electricité, Revue du GAMI*, (446), 1992, p. 58–60.
- [2] Vollan, A., Komzsik, L.: *Computational Techniques of Rotor Dynamics with the Finite Element Method*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2012.
- [3] Jeffcott, H.H.: The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed—the effect of want of balance. *Philosophical Magazine Series 6*, **37**, 1919, p. 304.
- [4] Kimball, A.L.: Internal friction theory of shaft whirling. *General Electric Review*, **27**, 1924, p. 244–251.
- [5] Lomakin, A.A.: Calculation of Critical Speeds and Securing of the Dynamic Stability of Hydraulic High-Pressure Machines with Reference of the Forces Arising in the Gap Seals. *Energomashinostroenie*, **4** (1), 1958.
- [6] Alford, J.S.: Protecting turbomachinery from self-excited rotor whirl. *ASME Journal of Engineering for Power*, 1965, p. 333–344.
- [7] Stroe, I.: MODELE ȘI SITUAȚII SPECIALE DE FUNCȚIONARE ÎN DINAMICA MAȘINILOR ROTATIVE. *COMOTI*, 1998, p. 8.
- [8] Friswell, M.I. et al.: *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2010.
- [9] Stanica, C.M. et al.: Study of Rotating Machineries in A Non-Inertial Reference Frame Subjected to Rotations. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, **16** (2), 2019, p. 125–136.
- [10] Carp-Ciocârdia, D.-C., Stroe, I.: Studii asupra comportării dinamice a unor modele de rotorii. *Studii și cercetări de mecanică aplicată*, **53**, 1994, p. 235–241.
- [11] Stroe, I., Carp-Ciocârdia, D.-C.: Asupra unor modele pentru studiul vibrațiilor rotorilor. *Studii și cercetări de mecanică aplicată*, **53**, 1994, p. 349–356.
- [12] Chen, W.J., Gunter, E.J.: *Introduction to Dynamics of Rotor-Bearing Systems*. Victoria, BC: Trafford Publishing, 2005.
- [13] Vance, J. et al.: *Machinery Vibration and Rotordynamics: Vance/Machinery Vibration*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [14] Greenhill, A.G.: On the Strength of Shafting When Exposed Both to Torsion and to End Thrust. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, **34** (1), 1883, p. 182–225.

- [15] Southwell, R., B. Gough: On the Stability of Rotating Shaft, Subjected Simultaneously to End Thrust and Twist. *British Association for Advancement of Science*, 1921, p. 345.
- [16] Golomb, M., Rosemberg, R.: *Critical Speeds of Uniform Shafts Under Axial Torque*. U.S. National Congress for Applied Mechanics. New York, 1961.
- [17] Eshleman, R.L., Eubanks, R.A.: On the Critical Speeds of a Continuous Rotor. *J. Eng. Ind*, **91** (4), 1969, p. 1180–1188.
- [18] Stanica, C.M. et al.: THE COMPLETE TIMOSHENKO FORM OF TORQUE INFLUENCE ON ROTORS LATERAL VIBRATIONS. *U.P.B. Scientific Bulletin*, **80**, 2018.
- [19] Kosmatka, J.B.: An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams. *Computers and Structures*, **57** (1), 1995, p. 141–149.
- [20] Ziegler, H.: *Principles of Structural Stability*. Basel: Birkhäuser, 1980.
- [21] Freno, B.A., Cizmas, P.G.A.: A computationally efficient non-linear beam model. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **46** (6), 2011, p. 854–869.
- [22] Narayan Rao, J.S.: *History of rotating machinery dynamics*. Dordrecht: Springer, 2011.
- [23] Software, M.: *Advanced Dynamic Analysis User's Guide*. MSC. Software, 2017.
- [24] Lalanne, M., Ferraris, G.: *Rotor dynamics prediction in engineering*. Chichester (UK): John Wiley and Sons, 1998.
- [25] Natick: *MATLAB*. The MathWorks Inc., 2018.
- [26] Eaton, J.W. et al.: *GNU Octave*. 2019.
- [27] Featherstone, R.: *Robot Dynamics Algorithms*. New York: Springer Science+Business Media, LLC., 1987.
- [28] Lung-When, T.: *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [29] Marghitu, D.B.: *Mechanisms and Robots Analysis with Matlab*. Auburn, USA: Springer - Verlag London Limited, 2009.
- [30] Meillard, L., Stanica, C.M., et al.: *Design of a counter rotating fan using a multidisciplinary and multifidelity optimisation under high level of restrictions*. International Society for Air Breathing Engines. Manchester, United Kingdom., 2017.
- [31] Stanica, C.M., Stroe, I.: Vibration of rotor blades with large deformations in a rotating noninertial reference frame. *U.P.B. Scientific Bulletin, Series D*, **80** (2), 2018.
- [32] Mihalache, R., Stanica, C.M., et al.: *Manufacturing a composite structure with applications in aeronautical field that can absorb displacements on different directions*. Venice, Italy, 2011.

- [33] Mihalache, R., Stanica, C.M., et al.: Advanced Strategic Planning and Capability Identification in order to develop a Liquid Hydrogen Turbopump. *Applied Mechanics and Materials*, **555**, 2014, p. 66–71.
- [34] Grodent, C., Stanica, C.M., et al.: *Wide Range Thermal Test Facility For JUICE Large Appendages*. 14th European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Environmental Testing. Toulouse, France: ECSSMET, 2016.
- [35] Grodent, C., Stanica, C.M., et al.: *Wide Range Thermal Test Facility For JUICE Large Appendages, Design and Results*. 6th International Workshop on Verification and Testing of Space Systems. Torino ,Italy, 2019.
- [36] Stanica, C.M. et al.: (*Aplicatie Patent WO2019038500-A1*) *Method for manufacturing outward guiding aerofoil blade of turbomachine, involves forming intersection between first fibrous wall preform and second fibrous wall preform so as to form leading edge or trailing edge of blade*. 2019.
- [37] Stanica, C.M. et al.: (*Aplicatie Patent FR3070421A1*) *Pale pour turbomachine et son procede de fabrication*. 2019.
- [38] Stanica, C.M. et al.: (*Aplicatie Patent FR3070427-A1*) *Insert pour la fixation d'un composant sur un support de turbomachine (1)*. 2019.
- [39] Stanica, C.M. et al.: (*Aplicatie Patent FR3070428-A1*) *Insert pour la fixation d'un composant sur un support de turbomachine (2)*. 2019.
- [40] European Space Agency: *Space engineering. Structural factors of safety for spaceflight hardware*. ECSS Secretariat ESA-ESTEC Requirements & Standards Division, 2009.