

Caracterizarea teoretică, experimentală și numerică a propagării laser

Rezumat

Victor-Cristian Palea

October 13, 2021

Cuprins

Introducere	3
1 Proprietăți locale - Abordarea calitativă	6
2 Curbe isotimice - Abordarea cantitativă	10
3 Construirea unui profil optic folosind modulare în fază	13
4 Construirea unui fascicul optic pornind de la o funcție dată	18
5 Solver numeric	21
Concluzii	24

Introducere

Cuvinte cheie: phase modulation, beam synthesis, paraxial wave equation, non-diffractive beams

Această lucrare are ca subiect central identificarea unor modele teoretice cu scopul de a caracteriza și construi mai eficient profile și fascicule optice ce manifestă proprietăți aparte în domeniul spațial în care acestea se propagă. Aceste proprietăți pot varia de la formarea unor imagini complexe pentru care relevantă este doar distribuția de amplitudine, până la formarea unor profile optice unde trebuie ținut cont atât de amplitudine cât și de fază. Formarea de imagini este asociată în general cu problema calculării fazei unor profile de amplitudine date (phase retrieval problem[1]). Probabil cel mai cunoscut algoritm ce rezolvă această problemă, folosit pentru modularea în fază, este Gerchberg-Saxton[2] (GSA). Acesta folosește ca intrare două profile de amplitudine, primul ca sursă iar al doilea ca profil la ieșire, pe baza cărora se calculează funcțiile de fază corespunzătoare acestora. Rezultă astfel două profile optice complexe (amplitudine și fază). Propagând profilul complex sursă, ceea ce în cazul GSA reprezintă aplicarea transformatei Fourier (FT) implementată numeric folosind algoritmul Fast Fourier Transform (FFT), se obține un profil complex similar celui de ieșire.

GSA prezintă însă unele limitări. Cea mai evidentă este utilizarea operatorului FT pentru a descrie propagarea. Din punct de vedere optic se poate considera că această alegere corespunde cu a avea un sistem optic ce produce un efect similar cu FT e.g. o lentilă amplasată între sursă și ieșire la distanță egală cu focala față de ambele, sau, din punct de vedere al modelului de propagare, utilizarea difracției Fraunhofer. O primă generalizare în ceea ce privește modelul folosit poate fi cea dată de Dorsch et al.[3] unde propagarea este descrisă printr-o transformată Fresnel. Cu toate acestea sistemul optic este încă limitat de alegerea specifică a operatorului ce descrie propoagarea.

Soluția acestei probleme a fost propusă de Yang et al.[4] prin introducerea algoritmului Yang-Gu (YGA) care:

- Generalizează noțiunea de propagare între sursă și ieșire printr-un operator.
- Operatorul de propagare poate fi unitar sau nu i.e. cazul al doilea poate fi exemplificat prin folosirea unei aperturi în sistemul optic dintre sursă și ieșire.
- Generalizează problema de calculare a fazei prin extinderea cazurilor de informație cunoscută în 4 cazuri:
 - amplitudini sursă și ieșire cunoscute \Rightarrow determinare fază sursă și ieșire (similar cu GSA).
 - faze sursă și ieșire cunoscute \Rightarrow determinare amplitudini sursă și ieșire.
 - amplitudine sursă și fază ieșire cunoscute \Rightarrow determinare fază sursă și amplitudine ieșire.
 - fază sursă și amplitudine ieșire cunoscute \Rightarrow determinare amplitudine sursă și fază ieșire.

Folosind algoritmi amintiți mai sus sau diversele lor variante modificate și îmbunătățite (e.g. pentru GSA[5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]), sau versiuni alternative (e.g. error-reduction algorithm[12], steepest-decent method[12], input-output algorithm[12], sau Fresnel ping-pong algorithm[3]), problema construcției de imagini poate fi abordată optim, în funcție de cazul specific investigat, dacă de interes este doar obținerea la ieșire a unei anumite distribuții de amplitudine.

Cazul construcției profilelor optice pentru care sunt relevante atât amplitudinea cât și faza nu este optim abordat cu algoritmi de mai sus deoarece aceștia consideră doar cazul în care există informație cunoscută atât la sursă cât și la ieșire. Pentru cazul unui profil cu amplitudine și fază cunoscute la ieșire algoritmi de mai sus nu pot fi aplicați. Un exemplu care evidențiază această necesitate este fasciculul Airy[13].

Fasciculul Airy a devenit relevant în optică datorită proprietăților ce apar în urma propagării, anume comportamentul nedifracțiv[13, 14, 15], deplasarea accelerată a întregului profil sau a maximelor locale de amplitudine [13, 14, 15] și aparenta refacere a formei profilului în cazul blocării unei părți a acestuia în timpul propagării[16]. Deoarece în versiunea inițială dată de Berry et al.[13] funcția Airy era definită pe un interval spațial infinit, aplicarea rezultatului teoretic în optică a impus trunchierea funcției la un domeniu spațial finit. Această operație a limitat proprietățile mai sus menționate ale fasciculului la doar un interval finit în lungul axei de propagare, contribuind totodată și la creșterea dificultății de a le descrie matematic.

Din punct de vedere al construcției profilului optic Airy, există două abordări principale. Prima exploatează trunchierea, ceea ce face ca după o anumită distanță de propagare profilul să capete o formă apropiată de cea a unei Gaussiene. Cunoscând soluția analitică pentru fasciculul Airy trunchiat, aceasta se poate utiliza pentru a extrage faza la o anumită poziție pe axa de propagare, pentru ca ulterior aceasta să fie folosită cu scopul modulării în fază a unui fascicul Gaussian obișnuit. A doua abordare constă în utilizarea traiectoriei pe care ar trebui să o urmeze maximul global de amplitudine. Această metodă a fost propusă de Kaganovsky et al.[17] și folosește traiectoria fasciculului pe care o consideră ca fiind locul geometric al unei caustice. De aici construiește profilul ce ar trebui să genereze acea caustică, rezultatul pentru traiectoria parabolică fiind similar cu funcția Airy.

Aceste metode însă exploatează fie un rezultat teoretic cunoscut (Siviloglou et al.[14, 15]), fie limitează problema prin introducerea unor constrângeri care fac referire doar la o anumită zonă geometrică din spațiul în care are loc propagarea (Kaganovsky et al.[17] dar și dezvoltările făcute pe abordarea defrii traiectoriei unei caustici[18, 19, 20]). Rezumând, aceste metode nu explică legătura dintre funcția Airy din punct de vedere al formei acesteia și modul în care se propagă. De asemenea trunchierea funcției Airy face ca descrierea matematică a propagării nedifracțivă să nu mai poată fi exprimată printr-o condiție de tipul

$$A(x, z) = A(x - f(z)) \quad (\text{I})$$

unde A este amplitudinea fasciculului, x este coordonata transversală, z este coordonata în lungul direcției de propagare, iar f este o funcție continuă. Această posibilitate de scriere a comportamentului nedifracțiv a permis demonstrarea printr-o metoda alternativă a unicității fasciculului Airy[24]. În cazul funcției Airy netrunchiate, $f(z) = az^2$.

Identificarea proprietăților de formă care produc comportamentul nedifracțiv și deplasarea accelerată reprezintă subiectul capitolului 1 unde se identifică legătura dintre existența punctelor de inflexiune într-o condiție inițială și modul în care acestea influențează propagarea. Pe baza acestor proprietăți se propune un algoritm de construire a condițiilor inițiale cu ajutorul cărui sunt testate rezultatele teoretice introduse.

În continuare subiectul de interes s-a mutat pe generalizarea condiției de propagare nedifracțivă prin scrierea unei condiții de tipul $A(x, z) = A(x - f(z))$ ca fiind echivalentă cu o ecuație de transport[21] și introducerea unor curbe isotimice i.e. entitatea A^2 este constantă pe o curbă isotimică. Cazurile investigate acoperă în principal proprietatea de nedifracțivitate, ceea ce a generat o serie de ecuații diferențiale care rezolvate folosind diferențe finite au produs condiții inițiale cu propagare nedifracțivă pe traiectorii parabolice și viteză inițială controlabilă.

Pentru a putea obține experimental orice tip de fascicul optic este necesară o metodă prin care acesta să fie construit. Adesea aceasta constă în realizarea unui profil optic pentru ca propagându-l pe acesta să se obțină și fasciculul de interes. Capitolul 3 acoperă subiectul contruirii unui profil optic cu valori complexe folosind modulare în fază dată de una sau două măști. Scopul este ca metoda de construcție să țină cont de informația completă a fasciculului dorit i.e. amplitudine și fază, spre deosebire de GSA sau YGA unde doar una dintre componente este impusă de utilizator.

După obținerea metodei de construire a unui profil optic cu amplitudinea și faza impuse de utilizator a urmat problema construirii profilelor ce produc prin propagare fascicule cu o anumită funcție de amplitudine impusă de utilizator. Problema aceasta este similară cu cea investigată de Aborahama et al.[22] pentru ecuația Helmholtz. Astfel în capitolul 4 este propusă o metodă de calculare a funcției de fază pentru o funcție de amplitudine dată. Pe baza acestui rezultat se studiază câteva cazuri în care pornind de la anumite funcții de amplitudine se pot construi fascicule optice.

În capitolul 5 este prezentat produsul software care a fost folosit pentru a testa, implementa și valida numeric toate rezultatele menționate în capitolele anterioare. Expunerea acestuia este realizată prin changelog-ul produsului, menționând la fiecare versiune contribuția adusă componentei teoretice sau experimentale.

Capitolul 5 prezintă pe scurt rezultatele tezei.

Capitolul 1

Proprietăți locale - Abordarea calitativă

Proprietatea indentificată în acest capitol este bazată pe o observație făcută asupra unei soluții generale a ecuației de propagare în aproximația paraxială[23]

$$\partial_t \psi = i \partial_x^2 \psi \quad (1.1)$$

unde $t = z/2kx_0^2$ este coordonata adimensională corespunzătoare axei de propagare z , iar $x = x/x_0$ este coordonata adimensională corespunzătoare axei transversale.

Dacă se consideră o soluție $\psi(x, t)$ și se admite că aceasta poate fi scrisă ca o serie Taylor în jurul lui $t = 0$, atunci

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \partial_t^n \psi(x, 0). \quad (1.2)$$

Folosind ecuația de propagare (1.1) în (1.2) se obține

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \partial_x^{2n} \psi(x, 0). \quad (1.3)$$

Asupra ecuației (1.3) se face observația că dacă există un punct x_0 pentru care $\partial_x^{2n} \psi(x_0, 0) = 0, \forall n \geq 1$, atunci soluția ecuației de propagare rămâne constantă în $x = x_0$. Totodată, dacă $t \ll 1$ atunci se poate considera că efectul termenilor din (1.3) scade cu n , astfel încât doar primul termenul al seriei să fie relevant.

Aceste două observații conduc la ipoteza existenței unui punct pentru care $\partial_x^{2n} \psi(x_0, 0) = 0, \forall 1 \leq n < k_0$, unde $k_0 \in \mathbb{N}^*$, iar $\partial_x^{2(k_0+1)} \psi(x_0, 0) \neq 0$. În această situație contribuția la variația lui ψ în $x = x_0$ este dată de termenul de ordin $(k_0 + 1)$ al seriei ceea ce permite să fie făcută aproximația

$$\psi(x_0, t) \approx \psi(x_0, 0) + \frac{(it)^{(k_0+1)}}{(k_0 + 1)!} \partial_x^{2(k_0+1)} \psi(x_0, 0). \quad (1.4)$$

Analizând relația (1.4) se poate observa că termenul care reprezintă variația funcției este influențat de valoarea parametrului k_0 și de cea a derivatei de ordin par. Prin analiza acestor două valori și

a formeii funcției în vecinătatea punctului $x = x_0$ se poate concluziona calitativ în ce direcție se va deplasa funcția. Acest raționament aplicat pe funcția Airy confirmă direcția de deplasare a maximelor locale ca un rezultat la deplasării globale a tuturor punctelor de inflexiune în aceeași direcție (figura 1.1).

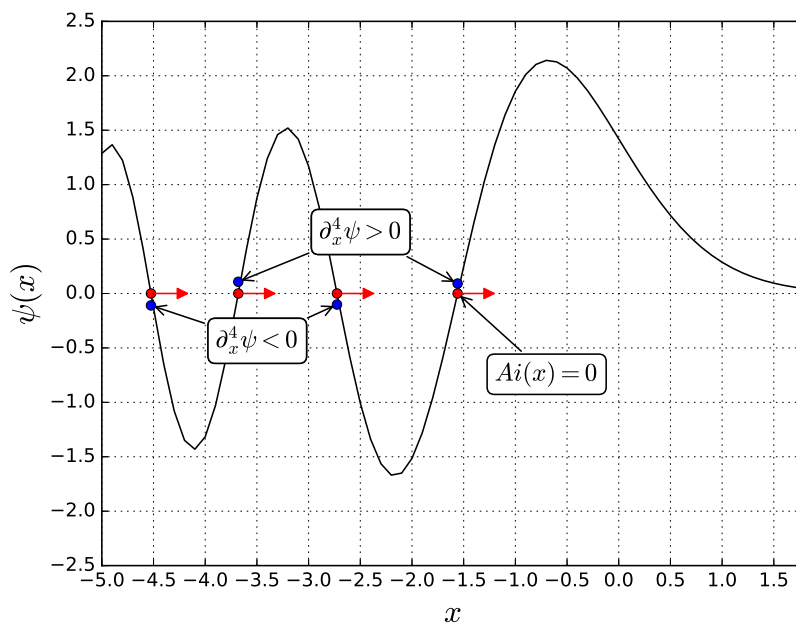


Fig. 1.1: Reprezentare grafică a funcției Airy. Punctele marcate cu roșu respectă condițiile $\psi(x_i, 0) = 0$ și $\partial_x^2 \psi(x_i, 0) = 0$, iar punctele albastre indică valoarea termenului $\partial_x^4 \psi(x_i, 0)$. Deplasarea în toate cazurile marcate este spre dreapta.

Prin urmare o metodă calitativă de identificare a unei deplasări a condiției inițiale pornește de la identificarea punctelor x_0 pentru care $\partial_x^{2n} \psi(x_0, 0) = 0, \forall 1 \leq n < k_0$, care sunt cel puțin puncte de inflexiune. Dacă acestea indică fiecare o deplasare în aceeași direcție, atunci este de așteptat ca întreaga structură a funcției să se deplaseze în direcția respectivă pentru $t \ll 1$. Rezultatul a fost analizat pentru valori ale lui k_0 astfel încât să acopere toate posibilitățile date de prezenta termenului i^{k_0+1} , iar concluzia a fost că rezultatul teoretic este valid pentru valori ale lui $k_0 > 1$ dar intervalul pe axa de propagare pentru care acest rezultat este valid scade cu valoarea lui k_0 . Rezultă de aici că $k_0 = 1$ ar trebui să fie cazul cel mai ușor de utilizat.

Această proprietate a punctelor de inflexiune a fost folosită în continuare pentru a construi condiții inițiale. Metoda de construcție se bazează pe rezultatele de mai sus dar tratate în discret.

Construcția condițiilor inițiale poate fi redusă la 2 etape:

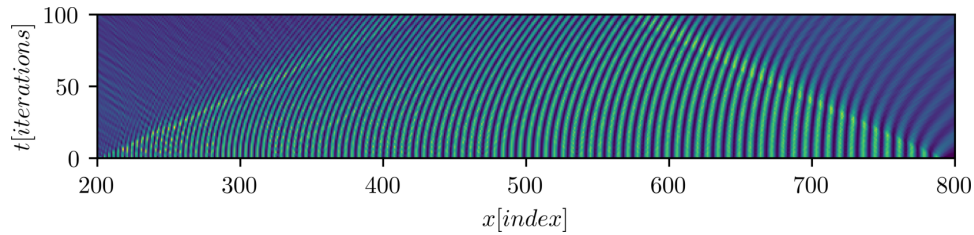
- Se formează un șir de valori care reprezintă punctele în care $k_0 = 1$.
- Se completează intervalele formate de două puncte vecine anterior definite cu o funcție care nu prezintă puncte de inflexiune.

În acest sens au fost alese 5 tipuri de generatoare pentru punctele de inflexiune, anume serie aritmetică, serie geometrică, funcție hiperbolică, serie aritmetică cu rată aleatoare, serie geometrică cu rată aleatoare. Pentru generarea funcțiilor între două puncte de inflexiune consecutive s-au folosit funcțiile parabolă, sinus, hiperbolă, funcție Bezier, și aleatoare, ultima fiind generată pe baza unei metode de initializare a derivatei a doua a funcției pe baza unor numere aleatoare.

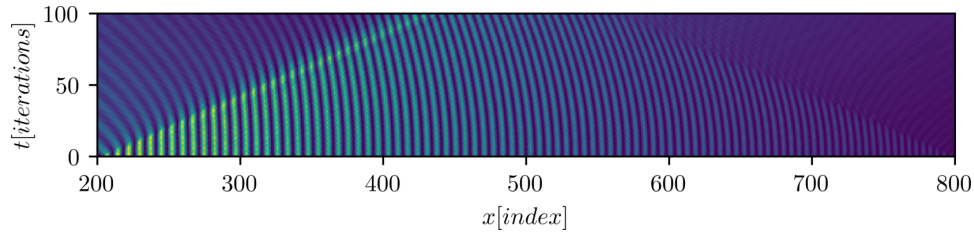
Condițiile inițiale pentru validare au fost obținute folosind toate combinațiile posibile de generatoare de puncte și funcții. Scopul a fost de a testa dacă propagând condițiile inițiale rezultate se obține un fascicul care să manifeste deplasare spre direcția impusă din algoritmul de construcție.

Trei dintre cazurile investigate sunt prezentate grafic în figura 1.2 unde se observă că fiecare manifestă o deplasare a maxilemor locale de amplitudine pe o traiectorie neliniară. Pentru o analiză cantitativă s-a realizat fitarea traiectoriilor cu polinoame de ordin 2 pentru mai multe maxime locale în fiecare caz, urmând a se calcula valorile medii ale parametrului termenului de ordinul 2. Rezultatele sunt prezentate în tabelul 1.1.

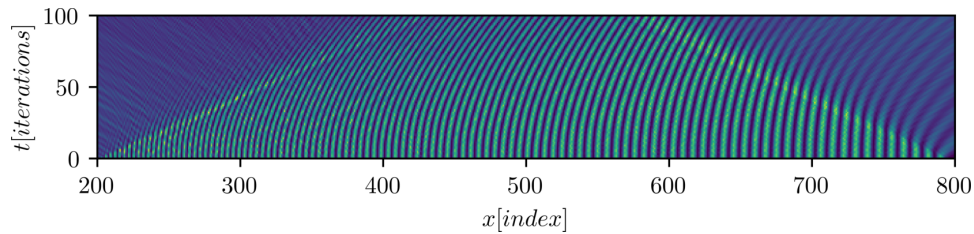
Se observă din cazurile investigate că prin manipularea punctelor de inflexiune se poate caracteriza calitativ direcția de deplasare a unui profil optic, și construirea de condiții inițiale. Cu toate acestea o formă de control mai amplă nu a fost evidențiată folosind această metodă.



(a) Puncte: serie geometrică; funcție: sinus.



(b) Puncte: funcție hiperbolică; funcție: parabolă.



(c) Puncte: serie geometrică cu rată aleatoare; funcție: Bezier.

Fig. 1.2: Reprezentarea grafică a amplitudinii pentru 3 cazuri. Se evidențiază forma fasciculelor obținute și direcția diferită în funcție de modul în care a fost construită condiția inițială.

Tabel 1.1: Valorile medii ale coeficientului termenului de ordin 2 din polinomul obținut în urma fitării.

Gen. pct.	Parabolic	Sinus	Bezier	Hyperbolic	Random
Arith.	$2.13 \cdot 10^{-3}$	$2.21 \cdot 10^{-3}$	$1.70 \cdot 10^{-3}$	$3.74 \cdot 10^{-4}$	$4.54 \cdot 10^{-4}$
Geom.	$5.21 \cdot 10^{-3}$	$5.63 \cdot 10^{-3}$	$6.37 \cdot 10^{-3}$	$5.21 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$
Hiper.	$-3.08 \cdot 10^{-3}$	$-2.55 \cdot 10^{-3}$	$-1.95 \cdot 10^{-3}$	$-3.08 \cdot 10^{-3}$	$-4.31 \cdot 10^{-3}$
R. Arith.	$4.71 \cdot 10^{-4}$	$8.57 \cdot 10^{-4}$	$9.48 \cdot 10^{-4}$	$4.90 \cdot 10^{-4}$	$7.72 \cdot 10^{-4}$
R. Geom.	$4.38 \cdot 10^{-3}$	$4.03 \cdot 10^{-3}$	$4.80 \cdot 10^{-3}$	$4.38 \cdot 10^{-3}$	$1.69 \cdot 10^{-3}$

Capitolul 2

Curbe isotimice - Abordarea cantitativă

Abordarea cantitativă a apărut ca o urmare a necesității trunchierii funcției Airy. Fără trunchiere, propagarea nedifracțivă și accelerată a maxilelor locale putea fi descrisă prin relația

$$A(x, z) = A(x - az^2) \quad (2.1)$$

unde A este amplitudinea fascicului, iar deplasarea accelerată și conservarea formei sunt date de argumentul $x - az^2$. Prin introducerea trunchierii, relația (2.3) nu mai este respectată deoarece caracterul pur nedifracțiv devine finit și calitativ.

Pentru a evita această problemă a definirii matematice a unor proprietăți ce descriu forma fascicului, o analogie între ecuația (2.1) și ecuația de transport[21] a fost realizată. Pentru ecuația cu derivate parțiale

$$2az\partial_x f + \partial_z f = 0 \quad (2.2)$$

o soluție este orice funcție de forma $f(x - az^2)$. Rezultatul acesta poate fi interpretat dintr-o perspectivă apropiată de metoda caracteristicilor. Dacă se consideră un set de curbe isotimice Γ (pe care amplitudinea este constantă) ca modalitate de a descrie amplitudinea fascicului optic, atunci aceste curbe pot fi folosite pentru a scrie o ecuație de transport.

Pornind de la modul în care sunt definite curbele, anume că amplitudinea este constantă pe fiecare curbă, atunci tangenta \mathbf{T}_Γ în fiecare punct la oricare dintre aceste curbe este ortogonală pe gradientul amplitudinii fascicului $\nabla|\psi|$. Acest rezultat se poate scrie

$$\mathbf{T}_\Gamma \cdot \nabla|\psi| = 0. \quad (2.3)$$

Pentru simplitate în scriere se consideră în continuare doar curbe parametrice de tipul $\Gamma(s) = (g(s), h(s))$ unde g și h sunt două funcții oarecare. În acest caz $\mathbf{T}_\Gamma = (\partial_s g, \partial_s h)$, ceea ce permite rescrierea ecuației (2.3) sub forma unei ecuații de transport

$$\partial_s g \partial_x |\psi| + \partial_s h \partial_z |\psi| = 0. \quad (2.4)$$

Pe lângă ecuația 2.4 se adaugă ecuația de propagare

$$\partial_z \psi = \frac{i}{2k} \partial_x^2 \psi. \quad (2.5)$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă, ce poate fi rescrisă

$$\partial_z |\psi|^2 = \frac{i}{2k} ((\partial_x^2 \psi) \psi^* - \psi (\partial_x^2 \psi^*)). \quad (2.6)$$

Deoarece curbele isotimice au aceeași formă pentru $|\psi|$ ca și pentru $|\psi|^2$ și pentru că este mai facilă scrierea ecuației de propagare din perspectiva variației $|\psi|^2$ decât strict a amplitudinii, relația (2.4) devine

$$\partial_s g \partial_x |\psi|^2 + \partial_s h \partial_z |\psi|^2 = 0. \quad (2.7)$$

Dacă curbele se consideră a fi de tipul $(g(z), z)$, iar

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \partial_z^n g(0),$$

introducând relația (2.6) în (2.7) atunci

$$\partial_x |\psi|^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \partial_z^{n+1} g(0) \right) + \frac{i}{2k} ((\partial_x^2 \psi) \psi^* - \psi (\partial_x^2 \psi^*)) = 0 \quad (2.8)$$

Evaluând relația (2.8) la $z = 0$ se obține o ecuație diferențială în variabila x , iar din termenul g rămâne doar coeficientul corespunzător ordinului $n = 0$. Astfel, interpretarea pentru aceasta ecuație diferențială este că prin rezolvarea ei este de așteptat să se obțină o condiție inițială pentru care deplasarea să fie după direcția $(\partial_z g(0), 1)$.

Pentru termeni de ordin superior din dezvoltarea lui g se aplică ∂_z relației (2.8), se evaluează la $z = 0$ apoi se rezolvă ecuația diferențială care rezultă.

Metoda admite teoretic aplicarea repetată a ∂_z fără a exista vreo constrângere evidentă cu excepția dificultății de la rezolva ecuația diferențială obținută. Cu toate acestea conform rezultatului lui Unnikrishnan et al.[24], fasciculul Airy este singura clasă de fascicule pur nediffractive pentru ecuația de propagare investigată. Din acest motiv se poate deduce că metoda propusă, dacă se folosesc doar curbe care impun propagare nediffractivă, este funcțională doar pentru g descris de polinoame de ordin maxim 2. Aceste cazuri au fost investigate prin construirea unor condiții inițiale pentru diferite valori date coeficienților corespunzători termenilor de ordin 1 (notat cu a), respectiv 2 (notat cu b) din polinoamele ce definesc pe g . Rezultatele pentru cazul cel mai amplu sunt date în tabelul 2.1. Se observă că valorile de intrare și cele obținute prin fitare sunt apropiate.

Tabel 2.1: Comparație între parametrii de intrare (a_{in} și b_{in}), și valorile acestora obținute prin fitarea maximelor locale ale fasciculului obținut (a_{fit} and b_{fit}). Parametrii a și b sunt definiți astfel încât $g(z) = az + \frac{b}{2}z^2$.

a_{in}	-1.0	1.0	-1.0	1.0	-1.0	1.0	-1.0	1.0
a_{fit}	-0.99	0.99	-1.0	0.99	-1.0	1.0	-1.0	0.99
b_{in}	-3.0	-3.0	-2.2	-2.2	-1.4	-1.4	-0.6	-0.6
b_{fit}	-2.9	-2.96	-2.14	-2.18	-1.36	-1.41	-0.57	-0.58

Cazurile polinoamelor de ordin mai mare decât 2 au fost testate până la ordinul 4 inclusiv însă fără succes. Motivația pentru a încerca și aceste traiectorii, în ciuda rezultatului menționat anterior care restricționează traiectoriile nediffractive până la ordinul 2, este existența unor fascicule optice a căror maxim global urmărește traiectorii mult mai complexe decât o parabolă[18, 20]. Cu toate acestea condiția de nediffractivitate nu a permis obținerea unor condiții inițiale deoarece rezolvarea numerică a ecuației diferențiale nu era stabilă.

Astfel metoda bazată pe curbe isotimice funcționează în contextul construcției condițiilor inițiale ce se propagă nediffractiv pe traiectorii parabolice, ceea ce permite extinderea la curbe nediffractive.

Capitolul 3

Construirea unui profil optic folosind modulare în fază

Un sistem optic pentru modularea unui fascicul poate fi reprezentat schematic conform figurii 3.1. Deoarece profilele de la sursă, respectiv ieșire, nu corespund în sensul în care propagarea sursei prin sistemul optic fără modulare nu generează profilul ieșire, este necesară identificarea diferenței dintre acestea și introducerea unei măști pentru modulare care împarte sistemul în două. În acest sens fiecare profil este propagat prin subsistemul corespunzător pentru a ajunge la poziția măștii de modulare. Astfel profilul sursă este propagat înainte prin subsistemul 1, iar profilul ieșire este propagat înapoi prin subsistemul 2. La finalul acestei operații se obțin două profile în planul măștii. Cazul ideal de modulare ar reprezenta compensarea diferențelor de amplitudine și fază printr-o mască, însă de interes pentru lucrare a fost doar cazul modulării în fază. Din acest motiv masca folosită compensează doar diferențele în fază, iar cele în amplitudine sunt adresate prin alegerea subsistemelor optice.

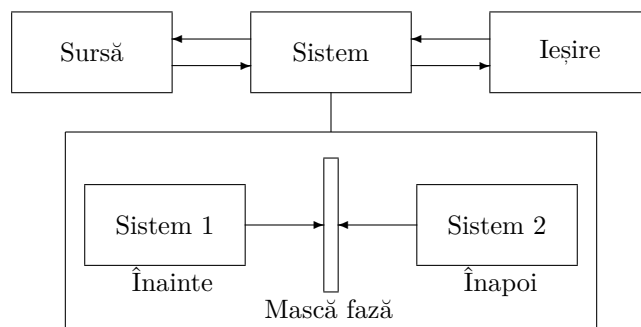


Fig. 3.1: Schemă generală a unui sistem optic pentru modulare cu profilele sursă și ieșire cunoscute. Masca de fază pentru modulare este introdusă împărțind sistemul optic în două subsisteme.

Sisteme optice folosite în contextul acestei părți sunt formate din patru tipuri de elemente optice: spații libere de o lungime dată, măști de amplitudine, măști de fază și lentile. Deși lentilele pot fi considerate a fi măști de fază, deci nefiind necesară definirea lor separat, am considerat lentilele ca

fiind elemente optice distincte.

Propagarea prin spații libere de o lungime dată se realizează rezolvând ecuația de propagare

$$\partial_z \psi = \frac{i}{2k} (\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi) \quad (3.1)$$

care pentru cazul 1-dimensional poate fi obținută eliminând termenul $\partial_y^2 \psi$. Rezolvarea ecuației (3.1) se face numeric folosind FT.

Măștile se aplică pe un profil prin înmulțire

$$\psi := M \cdot \psi$$

menționând că măștile de amplitudine sunt cu valori reale definite în intervalul $[0, 1]$ iar cele de fază sunt de tipul $\exp(i\phi)$. Măștile corespunzătoare lentilelor sunt calculate folosind

$$M_l = \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2f}\right).$$

Propagarea printr-un sistem optic devine trecerea astfel secvențială a unui profil prin elementele optice componente, aplicând procedura corespunzătoare la fiecare pas.

Având astfel definite sistemele optice și propagarea prin acestea, pașii corespunzători algoritmului sunt:

1. Se definesc variabilele de intrare, anume profilul sursă ψ_{in} , profilul ieșire ψ_{out} , subsistemele optice S_1 și S_2 .
2. Se propagă înapoi profilul ψ_{out} prin S_2 obținându-se ψ_b .
3. Se propagă înainte profilul ψ_{in} prin S_1 obținându-se ψ_f .
4. Se calculează masca de fază $M = \text{angle}(\psi_b/\psi_f)$.

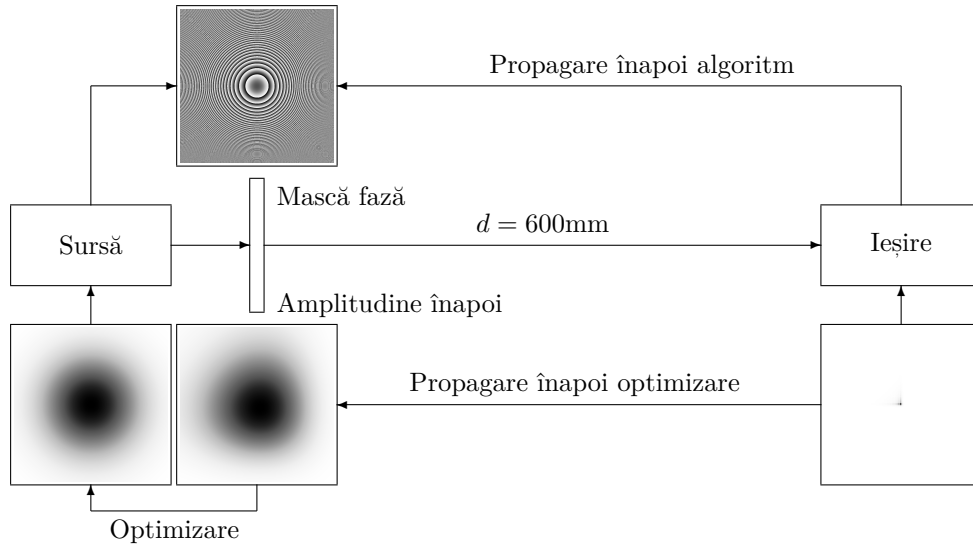


Fig. 3.2: Diagramă ce evidențiază modul în care este aplicat algoritmul de calculare al măștii de fază pentru modulare.

Unul dintre rezultatele numerice obținute pentru validarea algoritmului este prezentat în figura 3.2. Subsistemul 1 nu este folosit, modularea având loc direct pe profilul sursă. Subsistemul 2 este format din spațiu liber pe o lungime de 600mm. Profilul la intrare este o Gaussiană, iar la ieșire o funcție Airy 2-dimensională[14]. Pentru a verifica calitatea fasciculului obținut folosind masca de fază calculată am identificat maximul amplitudinii funcției cross-correlation aplicată pe profilul dorit și cel obținut, ambele normate. Rezultatul este un număr în intervalul $[0, 1]$ care poate fi transformat în procent pentru a arăta cantitativ gradul de similitudine dintre cele două profile.

Diagrama din figura 3.2 descrie două procese. În primul, profilul ieșire este propagat înapoi pentru a obține amplitudinea în planul măștii. Deoarece modularea are loc în planul profilului sursă, se compară direct amplitudinea dintre profilul sursă și cel propagat înapoi. Se ajustează lărgimea profilului sursă, presupunând că se dorește folosirea unei forme Gaussiene, astfel încât profilele sursă și propagat înapoi să fie cât mai apropiate în amplitudine. O altă opțiune pentru această potrivire a dimensiunii fasciculului sursă este de a maximiza similitudinea obținută din cross-correlation. După această optimizare se aplică algoritmul pentru a obține masca cea mai optimă. În cazul sistemului analizat optimizarea a generat o similitudine de 99.20%.

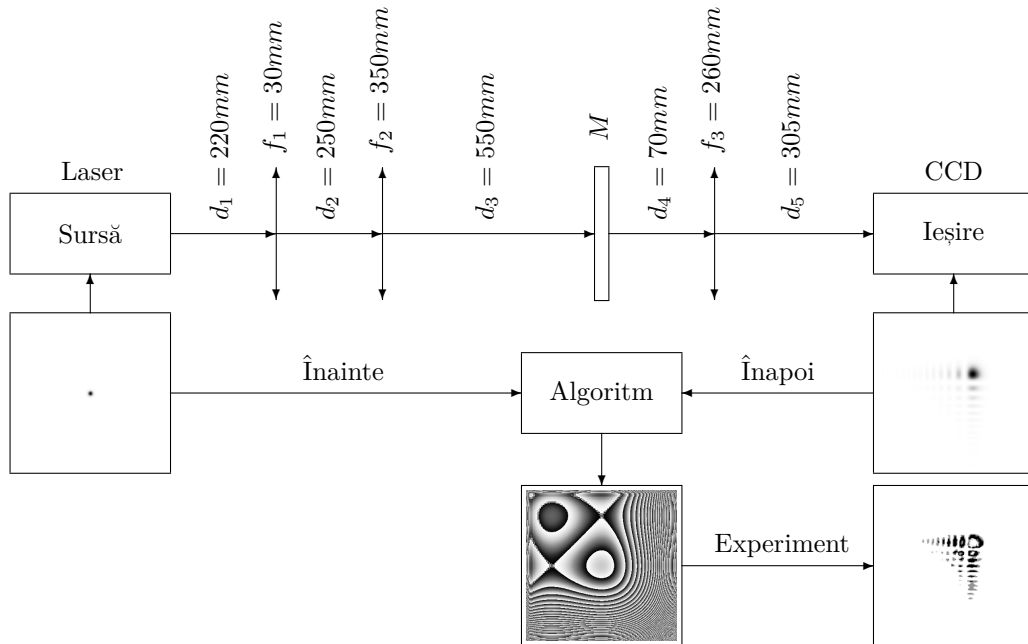


Fig. 3.3: Diagramă instalație experimentală.

Algoritmul a fost validat experimental folosind un sistem descris în figura 3.3. Se folosește un laser He-Ne acordabil la 543nm cu o deviație standard a fasciculului de aproximativ 0.2mm, lentile de focale menționate și amplasate la distanțele din figură, un modulator spațial de lumină (SLM) Holoeye LC2002 800×600 pixeli cu pitch de $32\mu\text{m}$ și o cameră CCD 1SP cu pixel de $3.2\mu\text{m}$.

Optimizarea în acest caz a fost realizată din poziționarea lentilelor, rezultând valorile menționate în figura 3.3, împreună cu masca și fasciculul Airy înregistrat. Verificările de scalare între fasciculul produs numeric și cel înregistrat au confirmat că maximele sunt separate la aceleași intervale spațiale de aproximativ $44\mu\text{m}$. Pentru verificarea traiectoriei simularea numerică a propagării returnează co-

eficientul termenului de ordin 2 care în acest caz este de aproximativ $0.119\mu\text{m}/\text{mm}^2$, ceea ce este aproape de valorile măsurate experimental de $0.13\mu\text{m}/\text{mm}^2$ în lungul axei x , respectiv $0.136\mu\text{m}/\text{mm}^2$ în lungul axei y . Diferențele pot fi atribuite nepotrivirii perfecte a amplitudinii în planul măștii de fază și toleranțelor la aliniere, respectiv măsurarea distanțelor.

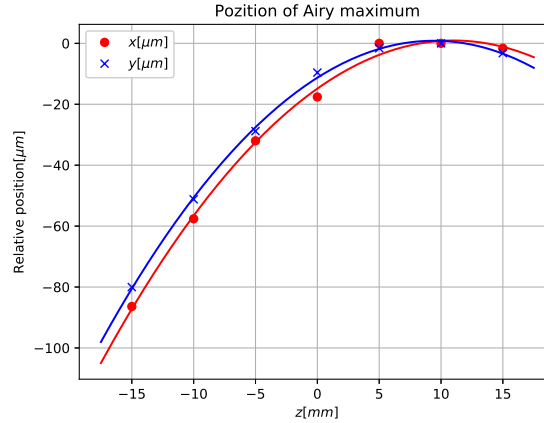


Fig. 3.4: Traiectoria maximului de intensitate al fascicului Airy 2-dimensional după axele transversale x și y .

O extensie adusă algoritmului este utilizarea a două măști de fază separate de un subsistem optic intermediar. În această situație algoritmul poate fi generalizat obținându-se următorii pași:

1. Se definesc variabilele de intrare, anume profilul sursă ψ_{in} , profilul ieșire ψ_{out} , subsistemele optice S_1 , S_2 și S_3 .
2. Se propagă înapoi profilul ψ_{out} prin S_3 obținându-se amplitudinea pe a doua mască A .
3. Se aplică algoritmul pentru calcularea unei singure măști de fază pe sistemul optic format din S_1 , S_2 , sursa ψ_{in} și ieșirea A , de unde rezultă prima mască M_1 .
4. Se aplică algoritmul pentru calcularea unei singure măști de fază folosind ca subsisteme optice gruparea $S_1 + M_1 + S_2$ între sursă și a doua mască, respectiv S_3 între a doua mască și ieșire. Se obține astfel masca M_2 .

Un caz numeric investigat este redat în figura 3.5 unde la ieșire s-a dorit un profil mai complex format din puncte, cercuri și un pătrat. Subsistemul 1 este noul încă o dată, deci modularea măștii M_1 este aplicată direct pe profilul sursă. Masca M_2 este poziționată la 400mm de M_1 , această distanță reprezentând subsistemul S_2 , iar S_3 este dat de o lentilă de focală 400mm amplasată la 400mm de M_2 , respectiv profilul ieșire. Folosind pașii mai sus enumerați se calculează secvențial măștile M_1 și M_2 , apoi se verifică gradul de similitudine. După optimizarea dimensiunii profilului sursă similitudinea este de 92.66%. Pentru comparație, dacă se folosea algoritmul pentru o singură mască excluzând M_1 și subsistemul S_2 , similitudinea era de 70.17%, ceea ce indică o îmbunătățire.

Din cele menționate reiese că algoritmi prezentați pot fi utilizați pentru a construi profile optice atunci când amplitudinea și faza sunt definite.

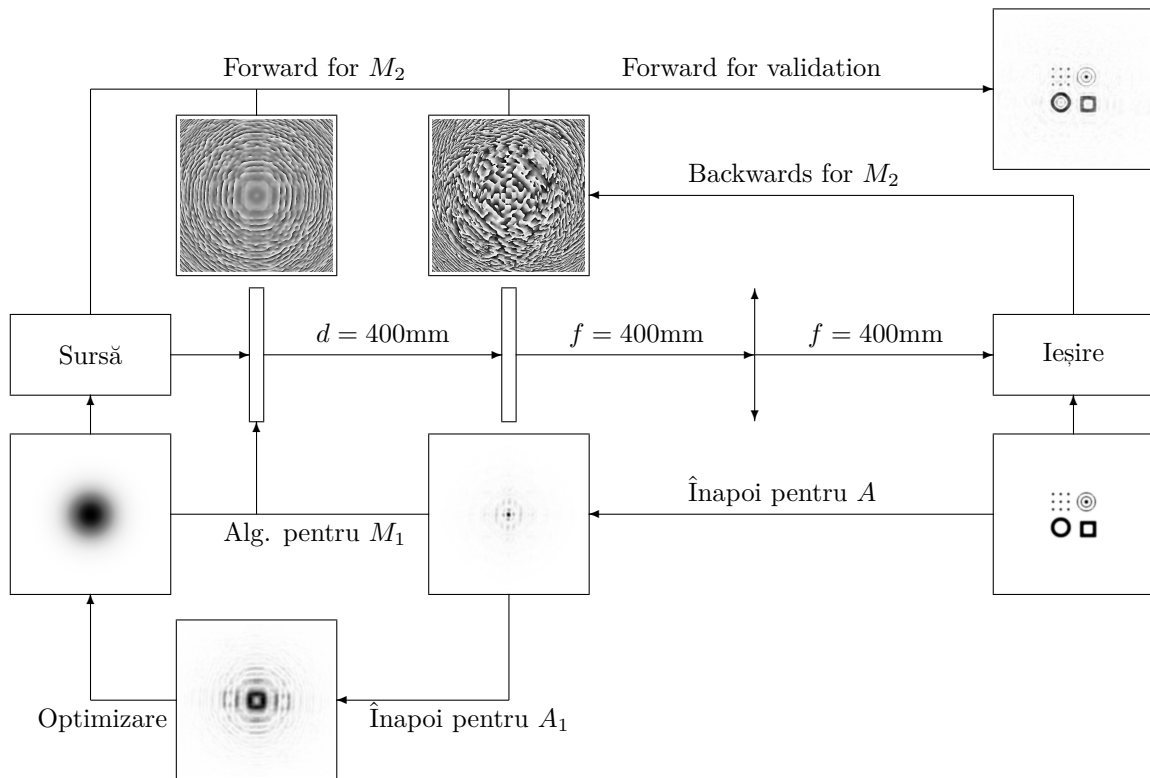


Fig. 3.5: Diagramă ce evidențiază modul în care este aplicată versiunea extinsă a algoritmului de calcul pentru două măști de fază.

Capitolul 4

Construirea unui fascicul optic pornind de la o funcție dată

Abordarea lui Aborahama et al.[22] poate fi considerată motivația teoretică pentru subiectul abordat în acest capitol, adică identificarea unei metode de a calcula, pornind de la o funcție arbitrară, o soluție pentru ecuația de propagare în aproximația paraxială.

Abordarea pe care am folosit-o constă într-o versiune aproximativă a acestei probleme. Dată fiind o funcție de amplitudine, se dorește determinarea funcției de fază corespunzătoare acesteia. Metoda propusă constă în abilitatea de a exprima faza unui fascicul de amplitudinea sa, ceea ce în anumite condiții permite scrierea relației

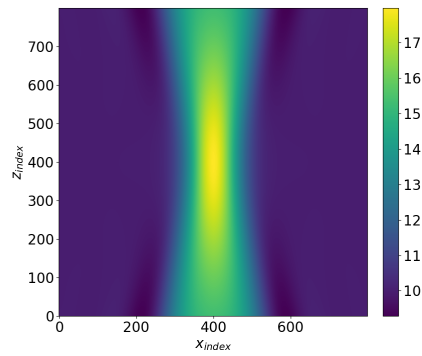
$$\nabla\phi = \mathbf{F} = \left(\begin{array}{c} -\frac{k}{\bar{A}^2} \partial_z \int_0^x \bar{A}^2 dx' \\ \frac{1}{2k\bar{A}} \left(\partial_x^2 \bar{A} - \bar{A} \left(\frac{k}{\bar{A}^2} \partial_z \int_0^x \bar{A}^2 dx' \right)^2 \right) \end{array} \right). \quad (4.1)$$

unde \bar{A} este funcția de amplitudine. Condiția în care ecuația (4.1) funcționează este ca amplitudinii \bar{A} să i se adauge o constantă comparabilă sau mai mare decât $\max(\bar{A})$.

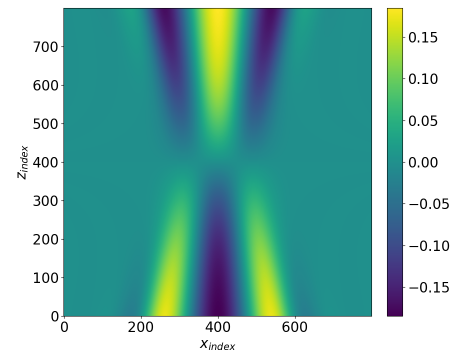
Dacă \bar{A} este întradevăr amplitudinea unui fascicul optic, atunci prin rezolvarea ecuației (4.1) se obține o fază care corespunde până la o constantă cu faza originală a fasciculului, la fiecare punct în lungul axei z .

Pentru rezolvarea ecuației (4.1) am aplicat operatorul divergentă pentru a obține o ecuație de tip Poisson. Rezolvarea ecuației Poisson a fost realizată numeric prin două metode, una folosind FT, cealaltă folosind diferențe finite pentru a transforma problema într-una de inversare a unei matrice.

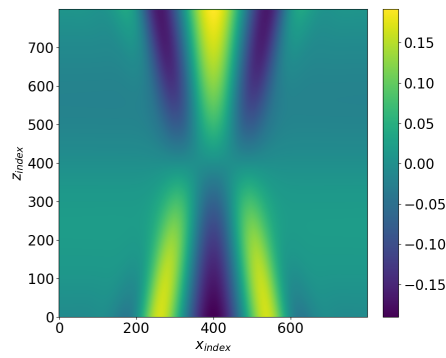
Ambele metode au fost analizate inițial pe o funcție de amplitudine ce corespunde unui fascicul optic. În acest sens am folosit un fascicul Gaussian normat la care a fost adăugată o constantă, iar rezultatele sunt reprezentate grafic în figura 4.1. Comparând cazurile (c) și (e) cu (b) se observă că fazele sunt comparabile, iar diferențele aproape constante dintre funcțiile calculate folosind (4.1) și faza rezultată din rezolvarea numerică a ecuației de propagare întăresc această observație.



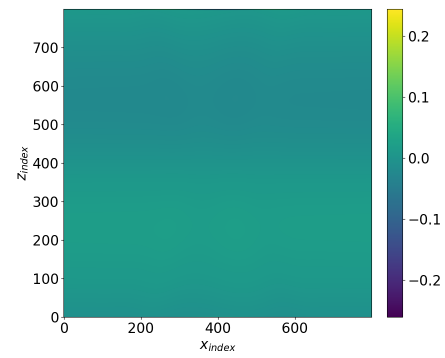
(a) Amplitudine fascicul Gaussian.



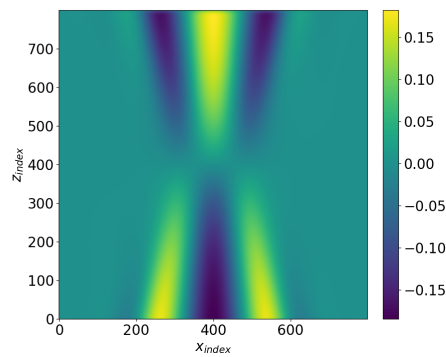
(b) Fază fascicul Gaussian.



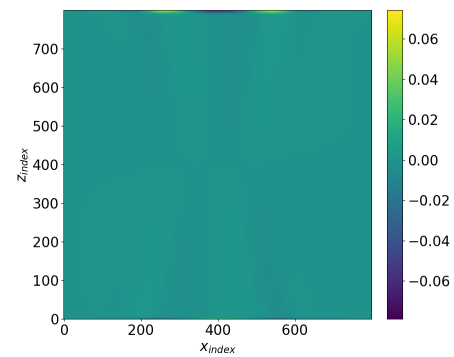
(c) Fază calculată cu FT.



(d) Diferență de fază metodă FT.



(e) Fază calculată cu inversare de matrice.



(f) Diferență de fază inversare de matrice.

Fig. 4.1: Rezultat calcul fază pentru fascicul Gaussian și diferențele între funcție fază originală și cele calculate rezolvând ecuația 4.1.

20CAPITOLUL 4. CONSTRUIREA UNUI FASCICUL OPTIC PORNIND DE LA O FUNCȚIE DATĂ

În continuare am folosit aceeași metodă de calculare a fazei pentru funcții de amplitudine care nu corespund unor fascicule optice. Cazurile investigate sunt asemănătoare celor bazate pe utilizarea traiectoriei causticii, în sensul că am folosit funcții Gaussiene înguste pentru a defini o traiectorie. Pe baza acestei metode de construcție a funcției de amplitudine au fost testate traiectorii de tipurile sinus și polinom de gradul 2, respectiv 3. Amplitudinile fasciculelor obținute reproduse în figura 4.2 unde traiectoriile folosite au fost polinom de gradul 2 și gradul 3.

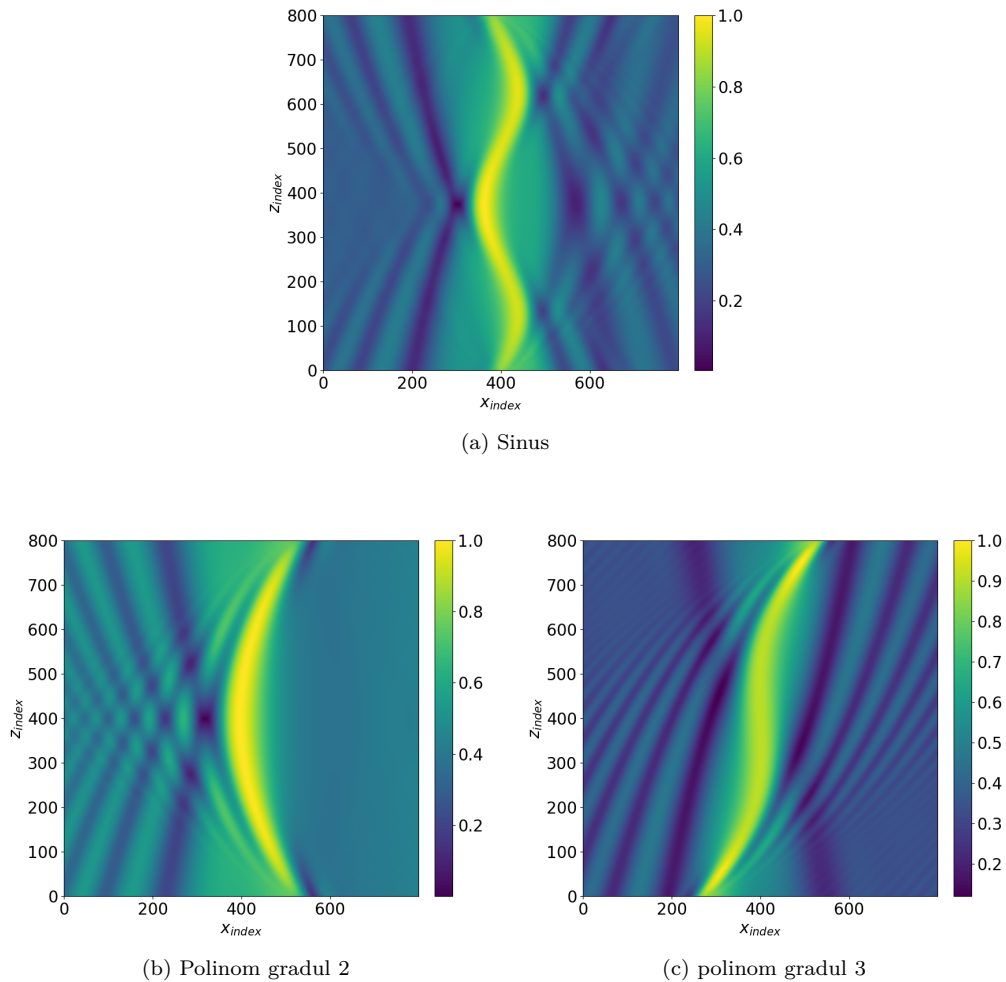


Fig. 4.2: Fascicule optice produse pornind de la o funcții de amplitudine ce descriu un polinom de gradul 2, respectiv gradul 3.

Din rezultatele prezentate anterior se poate afirma că metoda propusă pentru calcularea fazei unui profil de amplitudine poate fi folosită, dacă se folosesc funcții de amplitudine ce fie corespund unui fascicul optic, fie sunt formate din Gaussiene înguste ce descriu o traiectorie.

Capitolul 5

Solver numeric

Dezvoltarea produsului software a început cu o primă implementare în Python a unei scheme numerice cu diferențe finite pentru a rezolva ecuația de propagare. Sub această formă, solver-ul numeric nu era optimizat pentru librăriile de calcul existente însă putea fi folosit pentru a testa diverse rezultate de la începutul perioadei de studiu. Aceasta poate fi considerată a fi **versiunea 1.0**.

Trecerea la **versiunea 2.0** a reprezentat cel mai mare salt din evoluția produsului software deoarece a implicat următoarele modificări majore:

- Organizarea bucăților de cod într-o structură cu 4 clase:
 - parametri numerici
 - solvere numerice
 - generator de condiții inițiale
 - simulator pentru sisteme optice
- Introducerea de solvere pentru ecuația de propagare în spațiu liber folosind schema Crank-Nicolson (cu opțiunea de *perfectly matched layer*[25]), neliniaritate Kerr folosind metoda numerică Euler înainte (forward Euler) și Adams-Bashforth, dispersie pentru cazul 1-dimensional transversal folosind metoda *alternate direction implicit method* și solver bazat pe FT[23].
- Proceduri pentru construirea condițiilor inițiale pe baza proprietăților punctelor de inflexiune și a curbelor isotimice.
- Generatoare de măști de fază liniare și pătratice.
- Introducerea sistemelor optice și a procedurilor de propagare prin acestea.
- Funcții de calculare a măștilor de fază pentru subsisteme și profile sursă/ieșire date
- Funcții de analiză a erorilor introduse în propagare datorate toleranțelor la aliniere sau al distanței focale a lentilelor.
- Generator de condiții inițiale pentru calibrare de tipul grid puncte, cercuri concentrice, pătrate și o implementare a GSA.

- Convertor pentru măști din dimensiunea pixelului folosită în simulator la cea a SLM-ului folosit în experiment.
- Funcții pentru identificarea și fitarea traiectoriilor maximelor locare în amplitudine.

Aceste modificări au fost introduse gradual în funcție de necesitate, motiv pentru care versiunea 2.0 este cea folosită pentru a produce rezultatele numerice din părțile anterioare, cu excepția construcției de fascicule optice din capitolul 4.

Versiunile 3.0 și 4.0 s-au bazat în principal pe restructurarea și filtrarea codului util din versiunea anterioară. Motivul acestei tranziții aparent înapoi a fost excluderea codului neesențial sau limitat din punct de vedere al vitezei de calcul.

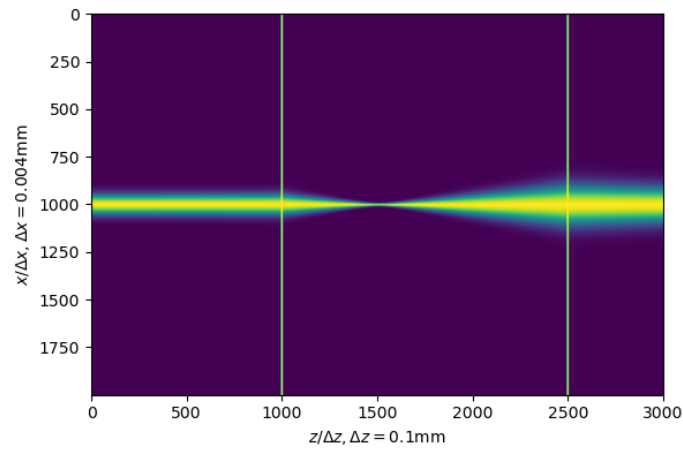


Fig. 5.1: Profil optic Gaussian 1-dimensional propagat printr-un sistem format din două lentile convergente.

Versiunea 5.0 este la momentul redactării tezei versiunea stabilă a codului. Rezultatul filtrării din versiunile anterioare a generat modulul PyParax pentru care au fost realizate documentație (prezentă în versiunea extinsă a tezei) și script-uri cu exemple de aplicare a modulului. Această versiune este prezentată în detaliu în teză și reprezintă prima formă ce poate fi distribuită spre alți utilizatori, fiind accesibilă la <https://github.com/victorcristianpalea/PyParax>.

Această versiune conține doar propagarea în spațiu liber folosind un solver FT datorită vitezei de calcul mărite față de Crank-Nicolson. Acest mod de propagare este aplicat pe sisteme optice, în calculul măștilor de fază și estimări de erori. Unul dintre rezultatele generate cu PyParax este dat în figura 5.1. Un profil Gaussian este propagat printr-un sistem optic format din două lentile. Distanța de la profilul sursă până la prima lentilă este de 100mm , cea dintre lentile este de 150mm , iar distanța de la lentila a doua până la ieșire este de 50mm . Distanțele focale ale lentilelor sunt de 50mm pentru prima și 80mm pentru a doua. Se observă că fasciculul este focalizat la aproximativ 50mm de prima lentilă iar la ieșirea din a doua acesta este ușor convergent datorită focalei de 80mm . Se poate concluziona deci că evoluția amplitudinii profilului optic este în conformitate cu așteptările dictate de optică.

De menționat că această versiune a fost folosită pentru a genera rezultatele privind construirea fasciculelor optice.

Versiunile 6.0 și 7.0 care încă sunt în dezvoltare au rolul de a rescrie încă o dată modulul pentru a permite și ușura dezvoltarea și includerea acestuia în proiecte mai ample.

Prin urmare produsul software dezvoltat, actual PyParax, a fost conceput ca un tool necesar testării rezultatelor și ipotezelor ce reieșeau din studiul teoretic, ajungând în final să permită prototiparea de sisteme optice în validarea experimentală.

Concluzii

Această teză poate fi rezumată folosind schema din figura 5.2. Capitolele 1 și 2 s-au axat pe caracterizarea și construirea profilelor optice. Aceste profile trebuie generate prin modulare pornind de la profile comune precum cel Gaussian. Capitolul 3 acoperă această problemă descriind propagarea prin sisteme optice, metode de calcul al măștilor de fază pentru modulare și posibilități de optimizare a rezultatelor. Pentru fascicule optice cu o traiectorie predefinită pentru maximum global în capitolul 4 se propune și o metodă de calculare a fazei pornind de la o funcție de amplitudine dată, cu posibilitatea de a folosi acest rezultat pentru a construi fascicule optice. În final pentru a rezolva numeric ecuația de propagare printr-un sistem optic este necesar un produsul software ale cărui evoluție și descriere a funcțiilor sunt prezentate în capitolul 5.

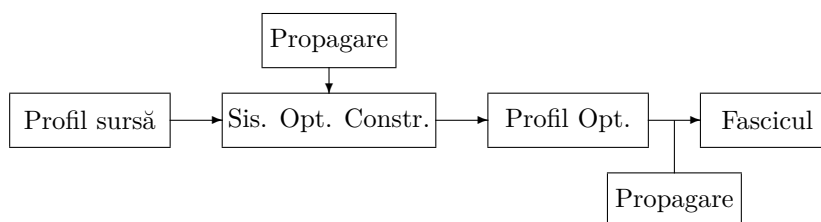


Fig. 5.2: Structura generală a unui sistem optic pentru construirea unui profil cu proprietăți aparte în propagare. Profilul sursă se propagă prin sistemul optic ce construiește (Sis. Opt. Constr.) profilul de interes (Profil Opt.), care apoi este propagat pentru a genera fasciculul de interes.

Contribuții personale

Contribuția mea la subiectele prezentate anterior acoperă toate aspectele menționate, anume:

1. dezvoltarea modelelor teoretice și a algoritmilor.
2. dezvoltarea modulului PyParax.
3. planificarea, implementarea și optimizarea aranjamentului experimental.
4. achiziția, filtrarea, interpretarea și procesarea datelor măsurate.
5. realizarea articolelor științifice publicate sau trimise spre publicare, incluzând formularea temelor abordate în fiecare, redactarea și comunicarea cu referenții.

Lista lucrărilor publicate este redată mai jos în ordinea cronologică a acceptării acestora:

1. **Victor-Cristian Palea**, Liliana A. Preda. *The control of intensity peak dynamics for paraxial waves*. Journal of Engineering Mathematics, Vol. **115(1)**, No. p. 89-98, (2019).
2. **Victor-Cristian Palea**, Liliana A. Preda. *Isotimic curves for the description and control of intensity profile dynamics of solutions to the paraxial wave equation*. University POLITEHNICA of Bucharest Scientific Bulletin-Series A - Applied mathematics and physics. Vol. **81(2)**, No. p. 287-96, (2019).
3. **Victor-Cristian Palea**, Liliana A. Preda. *Construction of finite non-diffractive and self-accelerating laser beams*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44: 11157- 11165, (2021).

Suplimentar mentionez un articol ce se afla în proces de review la data susținerii în fața comisiei de îndrumare, dar a fost acceptat ulterior. Motivul menționării acestuia este dat de utilizarea conținutului din articol în capitolul 3.

1. **Victor-Cristian Palea**, Liliana A. Preda. *Forward-Backward propagation algorithm for phase mask design in the paraxial approximation* sent for review at Romanian Journal of Physics.

Bibliografie selectivă

- [1] L Taylor. The phase retrieval problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 29(2):386–391, 1981.
- [2] R W Gerchberg. Phase determination for image and diffraction plane pictures in the electron microscope. *Optik (Stuttgart)*, 34:275, 1971.
- [3] Rainer G Dorsch, Adolf W Lohmann, and Stefan Sinzinger. Fresnel ping-pong algorithm for two-plane computer-generated hologram display. *Applied optics*, 33(5):869–875, 1994.
- [4] Guo-zhen Yang, Bi-zhen Dong, Ben-yuan Gu, Jie-yao Zhuang, and Okan K Ersoy. Gerchberg–saxton and yang–gu algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system: a comparison. *Applied optics*, 33(2):209–218, 1994.
- [5] Tieyu Zhao and Yingying Chi. Modified gerchberg–saxton (gs) algorithm and its application. *Entropy*, 22(12):1354, 2020.
- [6] Chien-Yu Chen, Wu-Chun Li, Hsuan-Ting Chang, Chih-Hao Chuang, and Tsung-Jan Chang. 3-d modified gerchberg–saxton algorithm developed for panoramic computer-generated phase-only holographic display. *JOSA B*, 34(5):B42–B48, 2017.
- [7] Hone-Ene Hwang, Hsuan T Chang, and Wen-Nung Lie. Fast double-phase retrieval in fresnel domain using modified gerchberg-saxton algorithm for lensless optical security systems. *Optics express*, 17(16):13700–13710, 2009.
- [8] Mona Mihailescu, Liliana Preda, Al M Preda, and EI Scarlat. Modified gerchberg-saxton algorithm for diffractive optical element image retrieval. *University” Politehnica” of Bucharest Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, 67(4):65–76, 2005.
- [9] Haichao Wang, Weirui Yue, Qiang Song, Jingdan Liu, and Guohai Situ. A hybrid gerchberg–saxton-like algorithm for doe and cgh calculation. *Optics and Lasers in Engineering*, 89:109–115, 2017.
- [10] Gavin Sinclair, Jonathan Leach, Pamela Jordan, Graham Gibson, Eric Yao, Zsolt John Laczik, Miles J Padgett, and Johannes Courtial. Interactive application in holographic optical tweezers of a multi-plane gerchberg-saxton algorithm for three-dimensional light shaping. *Optics Express*, 12(8):1665–1670, 2004.
- [11] AP Porfirev. Modification of the gerchberg-saxton algorithm for the generation of speckle-reduced intensity distributions of micrometer and submicrometer dimensions. *Optik*, 195:163163, 2019.

- [12] James R Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Applied optics*, 21(15):2758–2769, 1982.
- [13] Michael V Berry and Nandor L Balazs. Nonspreading wave packets. *American Journal of Physics*, 47(3):264–267, 1979.
- [14] GA Siviloglou, J Broky, Aristide Dogariu, and DN Christodoulides. Observation of accelerating airy beams. *Physical Review Letters*, 99(21):213901, 2007.
- [15] Georgios A Siviloglou and Demetrios N Christodoulides. Accelerating finite energy airy beams. *Optics letters*, 32(8):979–981, 2007.
- [16] John Broky, Georgios A Siviloglou, Aristide Dogariu, and Demetrios N Christodoulides. Self-healing properties of optical airy beams. *Optics express*, 16(17):12880–12891, 2008.
- [17] Y. Kaganovsky and E. Heyman. Wave analysis of airy beams. *Opt. Express*, 18(8):8440–8452, Apr 2010.
- [18] Timor Melamed and Amir Shlivinski. Practical algorithm for custom-made caustic beams. *Opt. Lett.*, 42(13):2499–2502, Jul 2017.
- [19] Gabriel Lasry, Timor Melamed, and Yaniv Brick. Manipulation and control of 3-d caustic beams over an arbitrary trajectory. *Opt. Express*, 28(14):20645–20659, Jul 2020.
- [20] Yanping Lan, Fangrong Hu, and Yixian Qian. Generation of spirally accelerating optical beams. *Opt. Lett.*, 44(8):1968–1971, Apr 2019.
- [21] Lawrence Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, March 2010.
- [22] Yousuf Aborahama, Ahmed H. Dorrah, and Mo Mojahedi. Designing the phase and amplitude of scalar optical fields in three dimensions. *Opt. Express*, 28(17):24721–24730, Aug 2020.
- [23] A. Couairon, E. Brambilla, T. Corti, D. Majus, O. de J. Ramírez-Góngora, and M. Kolesik. Practitioner’s guide to laser pulse propagation models and simulation. *The European Physical Journal Special Topics*, 199(1):5–76, November 2011.
- [24] K. Unnikrishnan and A. R. P. Rau. Uniqueness of the airy packet in quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 64(8):1034–1035, August 1996.
- [25] Chunxiong Zheng. A perfectly matched layer approach to the nonlinear schrödinger wave equations. *Journal of Computational Physics*, 227(1):537–556, 2007.