Universitatea "Politehnica" din Bucureşti
Departamentul de Matematică & Informatică
Splaiul Independenţei 313
060042 Bucureşti, România

Sisteme iterative de funcţii cu condiţii de contractivitate orbitale

Iterated function systems with orbital contractivity conditions

Student doctorand Maria - Irina SAVU
Adresă e-mail: maria_irina.savu@upb.ro

Rezumatul tezei de doctorat

Sub îndrumarea Lect. dr. habil. Alexandru MIHAIL

Bucureşti, 2023

Cuprins

Cuvinte şi fraze cheie: sistem iterativ de funcţii posibil infinit, sistem iterativ de funcţii orbital contractiv, operator fractal, operator Picard, operator slab Picard, atractori, proiecţie canonică, conexitate, conexitate prin arce, sistem iterativ de funcţii orbital afin, sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy, fractal fuzzy, operator fuzzy Hutchinson-Barnsley.

2020 Mathematics Subject Classification: 03E72, 28A80, 37C25, 37C70, 54H20, 54H25

Motivaţie şi introducere

Obiectivul general. Scopul acestei teze este de a dezvolta o nouă direcţie de generalizare pentru conceptul de sistem iterativ de funcţii, concept ce reprezintă una dintre cele mai importante metode prin care se obţin fractali. Noţiunea de "fractal" nu are o definiţie formală, dar poate fi vazută ca o figură geometrică frântă, neregulată, în anumite cazuri având proprietatea că la orice scară, fiecare parte este (măcar aproximativ) o copie mai mică a figurii iniţiale.

Una din cele mai importante metode de obţinere a fractalilor este reprezentată de aplicarea teoremelor de punct fix pentru un anumit operator (numit operatorul fractal sau operatorul Hutchinson-Barnsley) asociat unui sistem iterativ de funcţii. Noţiunea de sistem iterativ de funcţii (notat pe scurt cu IFS) a fost introdusă de J. Hutchinson în 1981 (a se vedea [7]) şi a fost popularizată de M. F. Barnsley în 1998 în cartea "Fractals everywhere" (a se vedea [1]).

Există mai multe generalizări ale conceptului de sistem iterativ de funcţii. O direcţie de generalizare este reprezentată de considerarea unor condiţii de contractivitate mai slabe pentru funcţiile sistemului (a se vedea, de exemplu, [4], [23], [24], [26]). O altă direcţie de generalizare este reprezentată de considerarea unui număr arbitrar (finit sau infinit) de funcţii în sistem (a se vedea, de exemplu, [5], [6], [8], [13], [27]). O altă modalitate de generalizare este reprezentată de modificarea structurii funcţiilor componente sau structura spaţiului (a se vedea [2], [3], [10], [11], [28], [29], [30]). Pentru toate tipurile de generalizări menţionate mai sus, operatorul fractal asociat este Picard, iar unicul său punct fix este atractorul sistemului.

Această teză este dedicată studiului sistemelor iterative de funcţii pentru care operatorul fractal este slab Picard. Mai prezis, introducem şi studiem o nouă clasă de sisteme iterative de funcţii, şi anume sisteme iterative de funcţii posibil infinite (notate pe scurt cu IIFS) pentru care funcţiile componente sunt înzestrate cu condiţii de contractivitate mai slabe pe orbita elementelor din spaţiul pe care sunt definite funcţiile.

Motivaţia studiului prezentat în această teză este dată de faptul că una dintre cele mai importante metode de a genera fractali se bazează pe noţiunea de sistem iterativ de funcţii. În consecinţă, în ultimii ani, mulţi matematicieni au fost interesaţi în a găsi o varietate de generalizări ale noţiunii de IFS. În această teză definim şi studiem o nouă clasă de sisteme care sunt înzestrate cu condiţii de contractivitate orbitale şi aplicând o teoremă de punct fix mai slabă, demonstrăm că operatorul fractal asociat este slab Picard. Prin urmare, sistemele iterative de funcţii prezentate în această teză au o familie de atractori în loc sa aibă atractor unic. Am făcut un prim studiu în această direcţie în lucrarea [14], unde am arătat că operatorul fractal asociat unui IFS format din funcţii continue ce îndeplinesc condiţia orbitală Banach este un operator slab Picard. De asemenea, având ca punct de plecare studiile privitoare la sisteme iterative de funcţii infinite, sistemele cu condiţii mai slabe de contractivitate şi sistemele fuzzy prezentate în [5], [6], [12] şi [23], am luat în considerare ideea de a combina aceste concepte cu clasa de sisteme introdusă în această teză, iar pentru aceste sisteme nou obţinute am studiat operatorii asociaţi.

Descrierea tezei. Scopul acestei teze de doctorat este reprezentat de dezvoltarea unei noi direcţii de generalizare pentru noţiunea de sistem iterativ de funcţii. În această teză introducem noţiunile de sistem iterativ de funcţii φ-contractiv de tip părinte-copil posibil infinit (pcIIFS) şi sistem iterativ de funcţii orbital φ-contractiv posibil infinit (oIIFS). În Capitolul 2, demonstrăm că operatorul fractal asociat unui pcIIFS sau oIIFS este slab Picard. Pentru aceste tipuri de sisteme construim proiecţia canonică şi îi studiem proprietăţile. Mai mult, operatorul H_S care a fost studiat pentru φ-contracţii este generalizat pentru sistemele de tip pcIIFS şi oIIFS şi demonstrăm că acest operator generalizat este continuu şi slab Picard. Folosim această generalizare pentru a arăta că operatorul Markov asociat unui sistem finit de tip pcIIFS sau oIIFS cu probabilităţi este slab Picard. În Capitolul 3, studiem anumite proprietăţi topologice ale atractorilor sistemelor iterative de funcţii orbital contractive (care sunt un caz particular ale unui oIIFS, când sistemul are un număr finit de funcţii iar funcţia de comparaţie este liniară). În Capitolul 4, introducem noţiunea de sistem iterativ de funcţii orbital afin φ-contractiv (oAIFS) şi dăm două rezultate de structură pentru funcţiile componente ale unui oAIFS. În Capitolul 5, introducem noţiunea de sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi arătăm că operatorul fuzzy asociat este slab Picard. Mai mult, prezentăm câteva rezultate de structură care se referă la punctele fixe ale operatorului fuzzy. În fiecare capitol sunt prezentate câteva exemple.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol precizăm notaţiile şi terminologia utilizate în cadrul acestei teze.

Definiţia 1.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric.*

1) Un operator slab Picard este o funcţie $f : X \to X$ cu proprietatea că pentru orice $x \in X$, şirul $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent la un punct fix al lui f. În acest caz, definim operatorul $f^\infty : X \to X$ dat de $f^\infty(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f^n(x)$ pentru orice $x \in X$.

2) Un operator Picard este un operator slab Picard ce are un unic punct fix.

Definiţia 1.2. *O funcţie $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ se numeşte*

1) funcţie de comparaţie dacă $\varphi(r) < r$ pentru orice $r > 0$ şi φ este crescătoare;

2) funcţie de comparaţie sumabilă dacă φ este funcţie de comparaţie şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n(r)$ este convergentă pentru orice $r > 0$.

Definiţia 1.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet. O funcţie $f : X \to X$ se numeşte φ-contracţie dacă există $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie de comparaţie continuă la dreapta astfel încât $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$ pentru orice $x, y \in X$.*

Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Vom folosi următoarele notaţii:

$$P_b(X) = \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset \text{ şi } A \text{ este mărginită }\};$$

$$P_{cl,b}(X) = \{A \in P_b(X) \mid A \text{ este închisă }\};$$

$$P_{cp}(X) = \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset \text{ şi } A \text{ este compactă }\}.$$

Pentru $A \subseteq X$, diametrul mulţimii A este diam $(A) = \sup\limits_{x,y \in A} d(x, y)$ şi pentru un $x \in X$ fixat, distanţa dintre x şi A este $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.

Pentru două funcţii $f, g : X \to X$, distanţa uniformă dintre f şi g este $d_u(f, g) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

Pe $P_b(X)$ definim semimetrica generalizată Hausdorff-Pompeiu $h: P_b(X) \times P_b(X) \to [0, \infty)$ dată de $h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}$ pentru orice $A, B \in P_b(X)$, unde $d(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B)$. Restricţia lui h la $P_{cl,b}(X)$ se numeşte metrica Hausdorff-Pompeiu şi este notată tot cu h.

Spaţiul codurilor

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, prin $\Lambda_n(I)$ înţelegem mulţimea tuturor cuvintelor finite formate cu n litere din I, şi anume $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n$. În acest caz, n se numeşte lungimea lui ω şi se notează cu $|\omega|$. Pentru $\omega \in \Lambda_n(I)$ şi $m \in \mathbb{N}^*$, prin $[\omega]_m$ înţelegem cuvântul format cu primele m litere ale lui ω dacă $m \leq n$, sau cuvântul ω dacă $n < m$. Prin $[\omega]_0$ înţelegem cuvântul λ. $\Lambda_0(I) = \{\lambda\}$, unde λ se numeşte cuvântul vid.

Pentru o mulţime I, prin $\Lambda(I)$ înţelegem mulţimea cuvintelor infinite, şi anume $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n\cdots$, unde $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n, \cdots \in I$. Pentru $\omega \in \Lambda(I)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ prin $[\omega]_n$ înţelegem cuvântul format cu primele n litere ale lui ω. Prin $[\omega]_0$ înţelegem λ.

Pentru $\alpha \in \Lambda_n(I)$ şi $\beta \in \Lambda_m(I)$ sau $\beta \in \Lambda(I)$, cu $m, n \in \mathbb{N}^*$, prin $\alpha\beta$ înţelegem concatenarea cuvintelor α şi β.

Pentru o familie $(f_i)_{i \in I}$, unde $f_i: X \to X$ pentru orice $i \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n \in \Lambda_n(I)$, folosim notaţia $f_\omega = f_{\omega_1} \circ \cdots \circ f_{\omega_n}$. Prin f_λ înţelegem funcţia identitate.

Pentru o mulţime $B \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\omega \in \Lambda_n(I)$, folosim notaţia $B_\omega = f_\omega(B)$.

Prin $\Lambda^*(I)$ înţelegem mulţimea tuturor cuvintelor finite, şi anume $\Lambda^*(I) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n(I)$.

Prin $\Lambda^t(I)$ înţelegem mulţimea tuturor cuvintelor cu litere din I, şi anume $\Lambda^*(I) \cup \Lambda(I)$.

Definiţia 1.4. *Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spaţii metrice şi $(f_i)_{i \in I}$ o familie de funcţii cu $f_i: X \to Y$ pentru orice $i \in I$. Familia $(f_i)_{i \in I}$ se numeşte*

1) mărginită dacă $\bigcup_{i \in I} f_i(B) \in P_b(X)$ pentru orice $B \in P_b(X)$,

2) echi-uniform continuă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ cu $d(x,y) < \delta_\varepsilon$ avem $\rho(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$, pentru orice $i \in I$.

Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $(f_i)_{i \in I}$ o familie de funcţii continue, cu $f_i: X \to X$ pentru orice $i \in I$. Fie $B \in P_b(X)$. Prin orbita lui B înţelegem mulţimea $\mathcal{O}(B) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in \Lambda(I)} f_{[\alpha]_n}(B)}$. Dacă $B = \{x\}$, orbita lui $\{x\}$ se notează cu $\mathcal{O}(x)$.

Definiţia 1.5. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $(f_i)_{i \in I}$ o familie de funcţii, unde $f_i: X \to X$ pentru orice $i \in I$. Perechea notată cu $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i \in I}\right)$ se numeşte sistem iterativ de funcţii posibil infinit (IIFS pe scurt) dacă* *i)* $f_i \colon X \to X$ *este o funcţie continuă pentru orice* $i \in I$,

ii) familia $(f_i)_{i\in I}$ *este echi-uniform continuă pe mulţimi mărginite, adică pentru orice* $B \in P_b(X)$ *şi orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_{\varepsilon,B} > 0$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in B$ *cu* $d(x,y) < \delta_{\varepsilon,B}$ *avem* $d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$, *pentru orice* $i \in I$,

iii) $(f_i)_{i\in I}$ *este o familie mărginită de funcţii.*

Fiind dat un IIFS $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$, funcţia $F_{\mathcal{S}} \colon P_b(X) \to P_{cl,b}(X)$, dată de

$$F_{\mathcal{S}}(B) = \overline{\bigcup_{i\in I} f_i(B)}$$

pentru orice $B \in P_b(X)$, se numeşte operatorul fractal asociat lui $\mathcal{S}$.

Definiţia 1.5 iii) ne asigură că $F_{\mathcal{S}}(B) \in P_{cl,b}(X)$ pentru orice $B \in P_b(X)$.

Restricţia lui $F_{\mathcal{S}}$ la $P_{cl,b}(X)$ va fi notată tot cu $F_{\mathcal{S}}$.

Definiţia 1.6. *Fie* $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un IIFS şi fie* $F_{\mathcal{S}} \colon P_{cl,b}(X) \to P_{cl,b}(X)$ *operatorul fractal asociat lui* $\mathcal{S}$. *Fiecare punct fix al lui* $F_{\mathcal{S}}$ *se numeşte un atractor al lui* $\mathcal{S}$. *Spunem că* $\mathcal{S}$ *are un unic atractor dacă există o unică mulţime notată cu* $A \in P_{cl,b}(X)$ *astfel încât* $F_S(A) = A$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} h(F_S^n(K), A) = 0$ *pentru orice* $K \in P_{cl,b}(X)$.

Definiţia 1.7. *Un IIFS* $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ *se numeşte*

1) sistem iterativ de funcţii φ*-contractiv de tip părinte-copil posibil infinit (pcIIFS pe scurt) dacă există* $\varphi \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *o funcţie de comparaţie sumabilă astfel încât*

$$d(f_\omega(x), f_{\omega i}(x)) \le \varphi^{|\omega|}(d(x, f_i(x))),$$

pentru orice $i \in I$, $\omega \in \Lambda^*(I)$ *şi* $x \in X$;

2) sistem iterativ de funcţii orbital φ*-contractiv posibil infinit (oIIFS pe scurt) dacă există* $\varphi \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *o funcţie de comparaţie continuă la dreapta astfel încât*

$$d(f_i(y), f_i(z)) \le \varphi(d(y,z))$$

pentru orice $i \in I$, $x \in X$ *şi* $y, z \in \mathcal{O}(x)$.

Definiţia 1.8. *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet şi* $(f_i)_{i\in I}$ *o familie finită de funcţii continue, unde* $f_i \colon X \to X$ *pentru orice* $i \in I$. *Perechea* $\left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right) \overset{not}{=} \mathcal{S}$ *se numeşte*

1) Sistem iterativ de funcţii contractiv dacă există $C \in [0,1)$ *astfel încât*

$$d(f_i(x), f_i(y)) \le C \cdot d(x,y)$$

pentru orice $i \in I$ *şi* $x, y \in X$.

2) Sistem iterativ de funcţii φ-contractiv dacă există $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie de comparaţie continuă la dreapta astfel încât

$$d\left(f_i\left(x\right), f_i\left(y\right)\right) \leq \varphi\left(d\left(x,y\right)\right)$$

pentru orice $i \in I$ şi $x, y \in X$.

3) Sistem iterativ de funcţii contractiv de tip părinte-copil dacă există $C \in [0,1)$ astfel încât

$$d\left(f_\omega\left(x\right), f_{\omega i}\left(x\right)\right) \leq C^{|\omega|} \cdot d\left(x, f_i\left(x\right)\right)$$

pentru orice $x \in X$, $i \in I$ şi $\omega \in \Lambda^*\left(I\right)$.

4) Sistem iterativ de funcţii orbital contractiv dacă există $C \in [0,1)$ astfel încât

$$d\left(f_i\left(y\right), f_i\left(z\right)\right) \leq C \cdot d\left(y,z\right)$$

pentru orice $x \in X$, $i \in I$ şi $y, z \in \mathcal{O}\left(x\right)$.

5) Sistem iterativ de funcţii orbital φ-contractiv dacă există $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie de comparaţie continuă la dreapta astfel încât

$$d\left(f_i\left(y\right), f_i\left(z\right)\right) \leq \varphi\left(d\left(y,z\right)\right)$$

pentru orice $x \in X$, $i \in I$ şi $y, z \in \mathcal{O}\left(x\right)$.

Operatorul fractal asociat unui sistem $\mathcal{S} = \left(\left(X,d\right), \left(f_i\right)_{i \in I}\right)$ din Definiţia 1.8, format dintr-un număr finit de funcţii, este $F_{\mathcal{S}}\colon P_{cp}\left(X\right) \to P_{cp}\left(X\right)$ dat de

$$F_{\mathcal{S}}\left(K\right) = \bigcup_{i \in I} f_i\left(K\right)$$

pentru orice $K \in P_{cp}\left(X\right)$.

Capitolul 2

Sisteme iterative de funcţii φ-contractive de tip părinte-copil posibil infinite şi sisteme iterative de funcţii orbital φ-contractive posibil infinite

În acest capitol, studiem operatorul fractal asociat unui sistem iterativ de funcţii φ-contractiv de tip părinte-copil posibil infinit (pcIIFS) şi arătăm că este slab Picard. Mai mult, prezentăm proprietăţile proiecţiei canonice asociate unui pcIIFS. De asemenea, pentru un sistem iterativ de funcţii orbital φ-contractiv posibil infinit (oIIFS), studiem proiecţia canonică şi proprietăţile echivalente cu cele ale sistemelor pcIIFS. Pentru aceste două tipuri de sisteme generalizăm operatorul H_S prezentat în [17] pentru φ-contracţii şi utilizăm acest operator pentru a demonstra că operatorul Markov asociat unui sistem finit de tip pcIIFS sau oIIFS cu probabilităţi este slab Picard. Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [18] şi [19].

2.1 Sisteme iterative de funcţii φ-contractive de tip părinte-copil posibil infinite (pcIIFSs)

Fie (X, d) un spaţiu metric complet.

Teorema 2.1 ([18]). *Fie* $\mathcal{S} = \big((X, d), (f_i)_{i\in I}\big)$ *un pcIIFS şi fie* $F_{\mathcal{S}}\colon P_{cl,b}(X) \to P_{cl,b}(X)$

operatorul fractal asociat lui $\mathcal{S}$. Atunci $F_{\mathcal{S}}$ este un operator slab Picard. Mai precis, pentru orice $B \in P_{cl,b}(X)$ există $A_B \in P_{cl,b}(X)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\mathcal{S}}^n(B) = A_B$ şi $F_{\mathcal{S}}(A_B) = A_B$. Mai mult,

$$h\left(F_{\mathcal{S}}^n(B), A_B\right) \leq \sum_{k\geq n} \varphi^k\left(\operatorname{diam}\left(B \cup F_{\mathcal{S}}(B)\right)\right)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Corolarul 2.1 ([14]). *Orice sistem iterativ de funcţii de tip părinte-copil are atractor. Mai precis, operatorul fractal asociat este slab Picard.*

Propoziţia 2.1 ([18]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS. Atunci $A_B = \overline{\bigcup\limits_{x\in B} A_x}$ pentru orice $B \in P_{cl,b}(X)$.*

Teorema 2.2 ([18]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS. Atunci funcţia $F_{\mathcal{S}}^{\infty}\colon P_{cl,b}(X) \to P_{cl,b}(X)$, dată de $F_{\mathcal{S}}^{\infty}(B) = \lim\limits_{m\to\infty} F_{\mathcal{S}}^m(B)$ pentru orice $B \in P_{cl,b}(X)$, este continuă.*

Propoziţia 2.2 ([18]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS. Atunci, pentru orice $B \in P_b(X)$ şi $\alpha \in \Lambda(I)$, şirul $\left(\overline{f_{[\alpha]_n}(B)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. Dacă notăm cu $a_\alpha(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_{[\alpha]_n}(B)}$, atunci $h\left(f_{[\alpha]_m}(B), a_\alpha(B)\right) \leq \sum\limits_{k=m}^{\infty} \varphi^k\left(\operatorname{diam}\left(\mathcal{O}(B)\right)\right)$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$.*

Lema 2.1 ([18]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS. Atunci*
1) $a_\alpha(B) = \overline{\bigcup\limits_{x\in B} \{a_\alpha(x)\}}$ pentru orice $B \in P_b(X)$ şi $\alpha \in \Lambda(I)$;
2) a_α este uniform continuă pe B pentru orice $\alpha \in \Lambda(I)$ şi $B \in P_{cl,b}(X)$;
3) $f_\omega(a_\alpha(B)) = a_{\omega\alpha}(B)$ pentru orice $\alpha \in \Lambda(I)$, $\omega \in \Lambda_n(I)$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $B \in P_b(X)$;
4) $a_\alpha(x) = a_\alpha(y)$ pentru orice $x \in X$, $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ şi $\alpha \in \Lambda(I)$.

Teorema 2.3 ([18]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS. Atunci $A_B = \overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda(I)} a_\alpha(B)} = \overline{\bigcup\limits_{x\in B} \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda(I)} \{a_\alpha(x)\}}$ pentru orice $B \in P_{cl,b}(X)$.*

Propoziţia 2.3 ([18]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS. Atunci $A_B = A_x$ pentru orice $x \in X$ şi $B \in P_{cl,b}\left(\overline{\mathcal{O}(x)}\right)$.*

Propoziţia 2.4 ([18]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS. Atunci, pentru orice $x, y \in X$ astfel încât $\overline{\mathcal{O}(x)} \cap \overline{\mathcal{O}(y)} \neq \emptyset$, avem $A_x = A_y$. În particular, dacă $\overline{\mathcal{O}(x)} \cap \overline{\mathcal{O}(y)} \neq \emptyset$ pentru orice $x, y \in X$, avem că $F_{\mathcal{S}}$ este un operator Picard.*

Propoziţia 2.5 ([18]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS. Atunci $\left(\operatorname{diam}\left(A_{[\alpha]_n,x}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la 0 şi $\{a_\alpha(x)\} = \lim\limits_{n\to\infty} A_{[\alpha]_n,x}$ pentru orice $x \in X$ şi $\alpha \in \Lambda(I)$.*

Teorema 2.4 ([18]). *Fie* $\mathcal{S} = \left((X,d),(f_i)_{i\in I}\right)$ *un pcIIFS. Atunci funcţia* $\Theta\colon \Lambda^t(I)\times P_{cl,b}(X)\to P_{cl,b}(X)$ *definită de*

$$\Theta(\alpha,B)=\begin{cases} a_\alpha(B),\ \text{dacă } \alpha\in\Lambda(I)\\ f_\alpha(B),\ \text{dacă } \alpha\in\Lambda^*(I)\setminus\{\lambda\}\\ B,\ \text{dacă } \alpha=\lambda\end{cases}$$

pentru orice $(\alpha,B)\in\Lambda^t(I)\times P_{cl,b}(X)$ *este uniform continuă pe mulţimi mărginite. În particular,* Θ *este continuă.*

Teorema 2.5 ([25]). *Fie* $\mathcal{S}_1=\left((X,d),(f_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}\right)$ *şi* $\mathcal{S}_2=\left((X,d),(g_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}\right)$ *două sisteme iterative de funcţii contractive de tip părinte-copil, astfel încât:*

i) există $C\in(0,1)$ *astfel încât* $F_{\mathcal{S}_1}\colon\mathcal{O}_{\mathcal{S}_1}(x)\to\mathcal{O}_{\mathcal{S}_1}(x)$ *şi* $F_{\mathcal{S}_2}\colon\mathcal{O}_{\mathcal{S}_2}(x)\to\mathcal{O}_{\mathcal{S}_2}(x)$ *sunt contracţii Banach cu constanta de contracţie* C*, pentru orice* $x\in X$*, unde* $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_1}(x)=\{f_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x)|\ m\in\mathbb{N},\ \alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\{1,\cdots,n\}\}$ *şi* $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_2}(x)=\{g_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x)|\ m\in\mathbb{N},\ \alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\{1,\cdots,n\}\}$.

ii) $\mathcal{S}=\left((X,d),(l_i)_{i\in\{1,\cdots,2n\}}\right)$*, unde* $l_i=f_i$ *şi* $l_{n+i}=g_i$ *pentru orice* $i\in\{1,\cdots,n\}$*, este un sistem iterativ de funcţii contractiv de tip părinte-copil. Atunci*

$$h\left(FixF_{\mathcal{S}_1},\ FixF_{\mathcal{S}_2}\right)\le\frac{1}{1-C}\max_{i=1}^{n}d_u(f_i,\ g_i),$$

unde prin $FixF_{\mathcal{S}}$ *înţelegem mulţimea punctelor fixe ale operatorului fractal* $F_{\mathcal{S}}$.

2.2 Sisteme iterative de funcţii orbital φ-contractive posibil infinite (oIIFSs)

Teorema 2.6 ([18]). *Fie* $\mathcal{S}=\left((X,d),(f_i)_{i\in I}\right)$ *un oIIFS şi fie* $F_{\mathcal{S}}\colon P_{cl,b}(X)\to P_{cl,b}(X)$ *operatorul fractal asociat lui* $\mathcal{S}$*. Atunci* $F_{\mathcal{S}}$ *este un operator slab Picard.*

Mai mult, $h\left(F_{\mathcal{S}}^n(B),A_B\right)\le\varphi^n\left(\operatorname{diam}\left(\overline{\mathcal{O}(B)}\right)\right)$ *pentru orice* $n\in\mathbb{N}$ *şi* $B\in P_{cl,b}(X)$*, unde* $A_B=\overline{\bigcup_{x\in B}A_x}$.

Teorema 2.7 ([18]). *Fie* $\mathcal{S}=\left((X,d),(f_i)_{i\in I}\right)$ *un oIIFS. Atunci funcţia* $F_{\mathcal{S}}^\infty\colon P_{cl,b}(X)\to P_{cl,b}(X)$*, dată de* $F_{\mathcal{S}}^\infty(B)=\lim_{m\to\infty}F_{\mathcal{S}}^m(B)$ *pentru orice* $B\in P_{cl,b}(X)$*, este continuă.*

Propoziţia 2.6 ([18]). *Fie* $\mathcal{S}=\left((X,d),(f_i)_{i\in I}\right)$ *un oIIFS. Atunci, pentru orice* $B\in P_b(X)$ *şi* $\alpha\in\Lambda(I)$*, şirul* $\left(f_{[\alpha]_n}(B)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent. Dacă îi notăm limita cu* $a_\alpha(B)$*, avem* $h\left(f_{[\alpha]_n}(B),a_\alpha(B)\right)\le\varphi^n(\operatorname{diam}(\mathcal{O}(B)))$ *pentru orice* $n\in\mathbb{N}$*. Mai mult,* $a_\alpha(B)=\overline{\bigcup_{x\in B}\{a_\alpha(x)\}}$.

Teorema 2.8 ([18]). *Fie* $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un oIIFS. Atunci* $A_B = \overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda(I)} a_\alpha(B)} = \overline{\bigcup\limits_{x\in B}\ \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda(I)} \{a_\alpha(x)\}}$ *pentru orice* $B \in P_{cl,b}(X)$.

Teorema 2.9 ([18]). *Fie* $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un oIIFS. Atunci funcţia* $\Theta\colon \Lambda^t(I) \times P_{cl,b}(X) \to P_{cl,b}(X)$ *definită de*

$$\Theta(\alpha, B) = \begin{cases} a_\alpha(B),\ \text{dacă } \alpha \in \Lambda(I) \\ f_\alpha(B),\ \text{dacă } \alpha \in \Lambda^*(I) \setminus \{\lambda\} \\ B,\ \text{dacă } \alpha = \lambda \end{cases}$$

pentru orice $(\alpha, B) \in \Lambda^t(I) \times P_{cl,b}(X)$ *este uniform continuă pe mulţimi mărginite.*

2.3 Operatorul $H_{\mathcal{S}}$

Fiind date (X,d) şi (Y,ρ) două spaţii metrice, folosim următoarele notaţii:
$\mathcal{C}(X,Y) = \{f\colon X \to Y \mid f \text{ este continuă}\}$; $\mathcal{C}_b(X,Y) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f \text{ este mărginită}\}$.

Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un IIFS. Prin $\widetilde{\mathcal{C}}$ înţelegem mulţimea $\widetilde{\mathcal{C}} = \{(f,g) \mid f \in \mathcal{C}_b(Y \times \Lambda(I), X),\ g \in \mathcal{C}_b(Y,X),$ astfel încât $f(y,\alpha) \in \overline{\mathcal{O}(g(y))}$ pentru orice $y \in Y, \alpha \in \Lambda(I)\}$.

Pe $\mathcal{C}_b(Y \times \Lambda(I), X)$ definim operatorul $H_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{C}_b(Y \times \Lambda(I), X) \to \mathcal{C}_b(Y \times \Lambda(I), X)$ dat de $H_{\mathcal{S}}(f)(y, i\alpha) = f_i \circ f(y,\alpha)$ pentru orice $f \in \mathcal{C}_b(Y \times \Lambda(I), X)$, $y \in Y$, $i \in I$ şi $\alpha \in \Lambda(I)$.

Pe $\widetilde{\mathcal{C}}$ considerăm $\widetilde{H}_{\mathcal{S}}\colon \widetilde{\mathcal{C}} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ definit de $\widetilde{H}_{\mathcal{S}}(f,g) = (H_{\mathcal{S}}(f), g)$ pentru orice $(f,g) \in \widetilde{\mathcal{C}}$.

Propoziţia 2.7. *Fie* $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un IIFS. Atunci* $\widetilde{H}_{\mathcal{S}}$ *este continuă şi* $\widetilde{H}_{\mathcal{S}}\left(\widetilde{\mathcal{C}}\right) \subset \widetilde{\mathcal{C}}$. *Mai mult, pentru orice* $(f,g) \in \widetilde{\mathcal{C}}$, *şirul* $\left(\widetilde{H}^n_{\mathcal{S}}(f,g)\right)_n$ *este convergent.*

Pentru $g \in \mathcal{C}_b(Y,X)$ folosim notaţia $\widetilde{\mathcal{C}}_g = \{(f,g) \mid f \in \mathcal{C}_b(Y \times \Lambda(I), X),\ f(y,\alpha) \in \overline{\mathcal{O}(g(y))}$ pentru orice $y \in Y,\ \alpha \in \Lambda(I)\}$.

Teorema 2.10. *Fie* $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un oIIFS. Atunci funcţia* $\widetilde{H}_{\mathcal{S}}\colon \widetilde{\mathcal{C}}_g \to \widetilde{\mathcal{C}}_g$ *este un operator Picard.*

Teorema 2.11. *Fie* $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un pcIIFS sau un oIIFS. Atunci operatorul* $\widetilde{H}_{\mathcal{S}}\colon \widetilde{\mathcal{C}} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ *este slab Picard.*

2.4 Operatorul Markov

Prin $\mathcal{B}(X)$ înţelegem σ-algebra submulţimilor Borel ale lui X. Prin $\mathcal{M}(X)$ înţelegem mulţimea tuturor măsurilor boreliene de probabilitate $\mu: \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ care au suport compact.

Definiţia 2.1. *Fie $\left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un pcIIFS care conţine un număr finit de funcţii sau un oIIFS care conţine un număr finit de funcţii şi fie $(p_i)_{i\in I}$ o familie finită, unde $p_i \in (0,1)$ pentru orice $i \in I$ şi $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$. Printr-un sistem iterativ de funcţii cu probabilităţi (IFSp pe scurt) înţelegem sistemul notat cu $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}, (p_i)_{i\in I}\right)$.*

Definiţia 2.2. *Fiind dat un IFSp $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}, (p_i)_{i\in I}\right)$, definim operatorul $M_{\mathcal{S}}: \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ numit operatorul Markov asociat lui $\mathcal{S}$, dat de $M_{\mathcal{S}}(\mu) = \sum\limits_{i\in I} p_i \cdot \mu \circ f_i^{-1}$ pentru orice $\mu \in \mathcal{M}(X)$.*

Următorul rezultat arată că operatorul Markov asociat unui IFSp $\mathcal{S}$ este un operator slab Picard şi demonstraţia se bazează pe proprietăţile operatorului $H_{\mathcal{S}}$ asociat unui sistem $\mathcal{S}$.

Teorema 2.12. *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}, (p_i)_{i\in I}\right)$ un IFSp şi fie $M_{\mathcal{S}}: \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ operatorul Markov asociat unui $\mathcal{S}$. Atunci $M_{\mathcal{S}}$ este un operator slab Picard.*

2.5 Exemple

Cu π_1 notăm funcţia $\pi_1: X \times Y \to X$ dată de $\pi_1(x,y) = x$ pentru orice $(x,y) \in X \times Y$ şi cu π_2 notăm funcţia $\pi_2: X \times Y \to Y$ dată de $\pi_2(x,y) = y$ pentru orice $(x,y) \in X \times Y$.

Exemplul A. Considerăm spaţiul metric $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, unde $\|\cdot\|_2$ este norma Euclidiană pe $\mathbb{R}^2$, şi submulţimea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -y^2 - 100\}$. Definim funcţiile $f_0, f_1: X \to X$ date de $f_0(x,y) = \left(\frac{x}{3}, y\right)$ şi $f_1(x,y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}y^2, y\right)$ pentru orice $(x,y) \in X$. Astfel, $f_i(x,y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2i}{3}y^2, y\right)$ pentru orice $i \in \{0,1\}$ şi $(x,y) \in X$.

Am demonstrat că $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in\{0,1\}}\right)$ este un pcIIFS.

Fie $\alpha = i_1 i_2 \cdots i_n \cdots \in \Lambda(I)$. Avem că $a_\alpha(x,y) = \left(2\sum\limits_{n\geq 1} \frac{i_n}{3^n} y^2, y\right)$ pentru orice $(x,y) \in X$. Deci, pentru orice $(x,y) \in X$, atractorul este $A_{(x,y)} = (2Cy^2, y)$, unde C este mulţimea Cantor. Pentru o mulţime $B \in P_{cl,b}(X)$ avem că

$$A_B = \left\{\left(2ty^2, y\right) \ |\text{există } t \in C \text{ şi } (x,y) \in B\right\}$$

şi

$$\widetilde{H}_{\mathcal{S}}^{m}(f,g)(y,\beta\alpha) = \left(H_{\mathcal{S}}^{m}(f)(y,\beta\alpha), g(y)\right) = \left(f_{\beta}(f(y,\alpha)), g(y)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3^m} f_{[1]}(y,\alpha) + 2\left(\frac{i_1}{3} + \frac{i_2}{3^2} + \cdots + \frac{i_m}{3^m}\right) f_{[2]}^2(y,\alpha), f_{[2]}^2(y,\alpha), g(y)\right)$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $\beta = i_1 i_2 \cdots i_m \in \Lambda_m(I)$, $\alpha \in \Lambda(I)$, şi $(f,g) \in \widetilde{\mathcal{C}}$.

Exemplul B. Fie $\alpha \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ şi $\beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $0 < \beta < \alpha^3$. Considerăm mulţimea $X \subset \mathbb{R}$ dată de $X = \{0, 1, \alpha, \alpha+\alpha^2, \alpha+\alpha^2+\alpha^3, \alpha+\alpha^2+\alpha^3-\beta\}$ şi notăm cu d metrica uzuală pe $\mathbb{R}$, şi anume $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$, $d(x,y) = |x-y|$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Pe spaţiul metric (X,d) considerăm două funcţii $f_1, f_2\colon X \to X$ date de $f_1(1) = f_2(1) = 0$, $f_1(0) = f_2(0) = \alpha$, $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = \alpha+\alpha^2$, $f_1(\alpha+\alpha^2) = \alpha+\alpha^2+\alpha^3$, $f_2(\alpha+\alpha^2) = \alpha+\alpha^2+\alpha^3-\beta$, $f_1(\alpha+\alpha^2+\alpha^3) = \alpha+\alpha^2+\alpha^3$, $f_2(\alpha+\alpha^2+\alpha^3) = \alpha+\alpha^2+\alpha^3-\beta$, $f_1(\alpha+\alpha^2+\alpha^3-\beta) = \alpha+\alpha^2+\alpha^3$, $f_2(\alpha+\alpha^2+\alpha^3-\beta) = \alpha+\alpha^2+\alpha^3-\beta$.

Am arătat că $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ este un pcIIFS cu funcţia de comparaţie sumabilă φ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ dată de $\varphi(t) = \alpha t$ pentru orice $t \in [0,\infty)$ dar $\widetilde{\mathcal{S}} = \left(\left(\widetilde{\mathcal{C}}, \widetilde{d}\right), \widetilde{H}_{\mathcal{S}}\right)$ nu este un pcIIFS în raport cu φ.

Exemplul C. Considerăm spaţiul $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, unde $\|\cdot\|_2$ este norma Euclidiană. Fie $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 4,\ y \le 4 + \frac{1}{x+4}\right\}$ şi $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -4,\ y \le 4 - \frac{1}{x-4}\right\}$. Considerăm funcţiile f_1, f_2, cu $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus (D_1 \cup D_2) \to \mathbb{R}^2$, date de $f_1(x,y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, y\right)$ şi $f_2(x,y) = \left(\frac{2}{3}x, y\right)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (D_1 \cup D_2)$.

Se poate arăta cu uşurinţă că $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2), (f_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ este un pcIIFS şi un oIIFS. Pentru un $K \in P_{cp}(\mathbb{R}^2 \smallsetminus (D_1 \cup D_2))$, atractorul este $A_K = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \pi_2(K)$.

Exemplul D. Considerăm spaţiul metric $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, unde $\|\cdot\|_2$ este norma Euclidiană şi $a > 0$. Notăm cu $\mathcal{S}_1$ sistemul $\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2), (f_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$, unde f_1, $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sunt date de $f_1(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, y\right)$ şi $f_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, y\right)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pentru o mulţime $K \in P_{cp}(\mathbb{R}^2)$, atractorul este $A_K^1 = [0,1] \times \pi_2(K)$.

Notăm cu $\mathcal{S}_2$ sistemul $\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2), (g_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$, unde g_1, $g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sunt date de $g_1(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, y\right)$ şi $g_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \alpha, y\right)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Fiind dat un element $K \in P_{cp}(\mathbb{R}^2)$, atractorul corespunzător lui $\mathcal{S}_2$ este $A_K^2 = [0, 2\alpha] \times \pi_2(K)$.

Se poate vedea că $\mathcal{S}_1$ şi $\mathcal{S}_2$ sunt atât sisteme de tip pcIIFS cât şi oIIFS. Pentru $K \in P_{cp}(\mathbb{R}^2)$, avem

$$H\left(FixF_{\mathcal{S}_1}, FixF_{\mathcal{S}_2}\right) \le \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \max_{i\in\{1,2\}} d_u(f_i, g_i)$$

obţinând o confirmare a Teoremei 2.5.

Capitolul 3

Conexitatea atractorilor sistemelor iterative de funcţii orbital contractive

În acest capitol, studiem anumite proprietăţi topologice ale atractorilor sistemelor iterative de funcţii orbital contractive (care sunt un caz particular ale sistemelor de tip oIIFS si care conţin un număr finit de funcţii, iar funcţia de comparaţie este liniară). Dăm o condiţie necesară şi suficientă ca un atractor să fie conex şi condiţii suficiente pentru ca un atractor să fie conex prin arce. Dăm o generalizare pentru ultimul rezultat şi studiem în ce condiţii un atractor are un număr finit de componente conexe prin arce. Oferim câteva exemple. Aceste rezultate au fost publicate în [20].

3.1 O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un atractor să fie conex

Definiţia 3.1. *O submulţime $A \neq \emptyset$ a unui spaţiu metric (X, d) se numeşte conexă prin arce dacă pentru orice $x, y \in A$, există o funcţie continuă $\gamma\colon [0,1] \to A$ astfel încât $\gamma(0) = x$ şi $\gamma(1) = y$.*

Definiţia 3.2. *Fie A o mulţime nevidă a unui spaţiu metric (X, d) şi $x, y \in A$. Considerăm relaţia $\widetilde{R}$ pe mulţimea A dată de $x\widetilde{R}y$ dacă există $B \subset A$, B conexă prin arce, astfel încât $x, y \in B$. Este uşor de arătat că $\widetilde{R}$ este o relaţie de echivalenţă. Clasele de echivalenţă ale relaţiei $\widetilde{R}$ se numesc componentele conexe prin arce ale lui A.*

Fie $\mathcal{S} = \left((X, d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv. Pentru $K \in P_{cp}(X)$ fixat, considerăm mulţimea $M_K := \{A_x \mid x \in K\}$. Fie $g\colon A_K \to M_K$ o funcţie definită de $g(x) = A_x$ pentru orice $x \in A_K$. Cum g este continuă şi surjectivă, M_K este compactă.

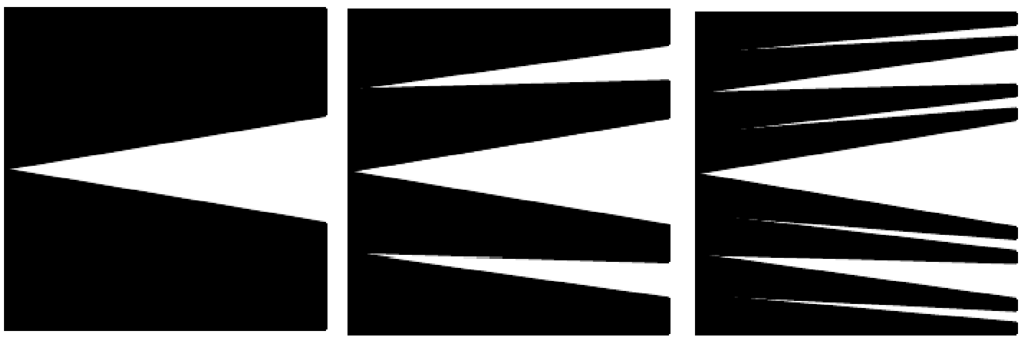
Teorema 3.1 ([20]). *Fie* $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv şi* $K \in P_{cp}(X)$. *Atunci* A_K *este conexă dacă şi numai dacă familia* $(A_{K,i})_{i\in I}$ *este conexă şi* M_K *este conexă.*

3.2 Atractori conecşi prin arce

Exemplul A. Să considerăm spaţiul normat $(X,d) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, unde $\|\cdot\|_2$ este norma Euclidiană. Definim funcţiile $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ date de $f_1(x,y) = (x, \eta_x y)$ şi $f_2(x,y) = (x, \eta_x y + 1 - \eta_x)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, unde

$$\eta_x = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ dacă } x \le 0 \\ \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(1-x), \text{ dacă } x \in (0,1) \\ \frac{1}{3}, \text{ dacă } x \ge 1. \end{cases}$$

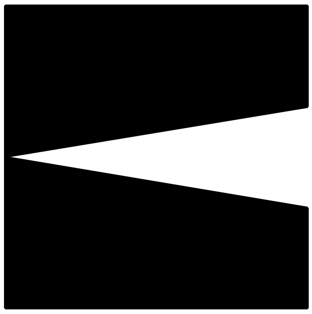
Am obţinut că sistemul $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2), (f_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ este un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv. Mulţimea $A_{(0,0)}$ este conexă şi pentru $K = [0,1]\times\{0\} \in P_{cp}(\mathbb{R}^2)$, M_K şi A_K sunt conexe prin arce. Figurile de mai jos reprezintă primii paşi din construcţia atractorului folosind operatorul fractal şi având ca punct de plecare mulţimea $[0,1]^2$.



Exemplul B. Considerăm spaţiul metric $(X,d) = \left([0,1]^2, d_2\right)$, unde d_2 este distanţa Euclidiană. Definim funcţiile $f_0, f_1 \colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ date de

$$f_0(x,y) = \begin{cases} \left(x, \frac{y}{2}\right), \text{ dacă } y \le a_x \\ \left(x, \frac{a_x}{2}\right), \text{ dacă } y \in (a_x, 1-a_x); \\ \left(x, \frac{y-1+2a_x}{2}\right), \text{ dacă } y \ge 1-a_x \end{cases} \quad f_1(x,y) = \begin{cases} \left(x, 1-\frac{y}{2}\right), \text{ dacă } y \le a_x \\ \left(x, \frac{2-a_x}{2}\right), \text{ dacă } y \in (a_x, 1-a_x) \\ \left(x, \frac{3-y-2a_x}{2}\right), \text{ dacă } y \ge 1-a_x \end{cases}$$

pentru orice $x, y \in [0,1]$, unde $a_x = \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{3}x$ pentru orice $x \in [0,1]$. Am obţinut că $\mathcal{S} = \left(\left([0,1]^2, \|\cdot\|_2\right), (f_i)_{i\in\{0,1\}}\right)$ este un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv. Pentru $K = [0,1] \times [0,1]$, A_K şi M_K sunt conexe prin arce. Avem că $f_0(A_K)$ şi $f_1(A_K)$ sunt conexe. Atractorul este reprezentat în următoarea figură.



Exemplele de mai sus sugerează enunţul Teoremei 3.2, care oferă condiţii suficiente ca un atractor al unui sistem iterativ de funcţii orbital contractiv să fie conex prin arce.

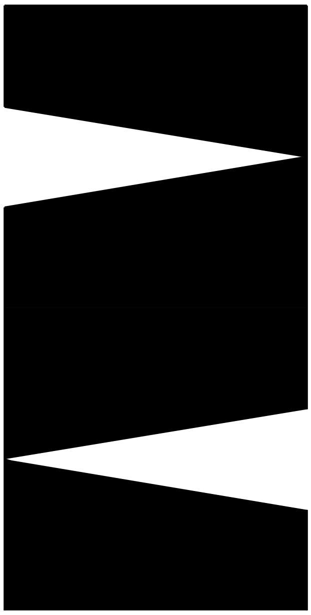
Teorema 3.2. *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv şi $K \in P_{cp}(X)$, astfel încât M_K este conexă prin arce. Dacă există $x_0 \in A_K$ astfel încât A_{x_0} este conexă, atunci A_K este conexă prin arce.*

Teorema 3.3. *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv şi $K \in P_{cp}(X)$. Dacă M_K este conexă prin arce şi dacă există $x_0 \in K$ astfel încât A_{x_0} să aibă un număr finit de componente conexe, atunci A_K are un număr finit de componente conexe prin arce, care este mai mic sau egal cu numărul de componente conexe ale lui A_{x_0}.*

În Teorema 3.3, numărul de componente conexe prin arce ale lui A_K este mai mic sau egal cu numărul de componente conexe ale lui A_{x_0}. În **Exemplele A** şi **B**, A_K are o componentă conexă prin arce şi A_{x_0} are o componentă conexă. În următorul exemplu (**Exemplul C**) această egalitate nu are loc (în funcţie de $x \in K$, A_x are două sau trei componente conexe, în timp ce A_K are o componentă conexă prin arce). În **Exemplul C** am considerat $K = [0,1] \times [0,2]$ şi am obţinut

$$A_K = \left\{(x,y) \ \mid x \in [0,1], \ y \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{x}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{x}{6}, \frac{4}{3} + \frac{x}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{3} - \frac{x}{6}, 2\right]\right\}.$$

Mulţimea A_K este conexă prin arce şi este reprezentată în următoarea figură:



Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv şi $K \in P_{cp}(X)$ şi presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, \cdots, x_n \in K$ astfel încât A_{x_j} are un număr finit de componente conexe, notate cu $n_j \in \mathbb{N}^*$ pentru orice $j \in \{1, \cdots, n\}$. Componentele conexe ale lui A_{x_j} sunt notate cu $A_{x_j}^1, \cdots, A_{x_j}^{n_j}$, pentru orice $j \in \{1, \cdots, n\}$.

Fie $\alpha, \beta \in \Lambda(I)$. Considerăm relaţia $\perp$, definită de $\alpha \perp \beta$ dacă există $j \in \{1, \cdots, n\}$ şi $k \in \{1, \cdots, n_j\}$ astfel încât $a_\alpha(x_j)$, $a_\beta(x_j) \in A_{x_j}^k$. Se poate observa că, în general, $\perp$ nu este o relaţie de echivalenţă. Considerăm relaţia de echivalenţă $E_\perp = \bigcap_{E \text{ este o relaţie de echivalenţă};\ \perp \subset E} E$.

Teorema 3.4 ([20]). *Fie $\mathcal{S} = \left((X,d), (f_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv şi fie $K \in P_{cp}(X)$ astfel încât M_K este conexă prin arce. Presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, \cdots, x_n \in K$ astfel încât A_{x_j} are un număr finit de componente conexe, pentru orice $j \in \{1, \cdots, n\}$. Dacă relaţia $E_\perp$ are o singură clasă de echivalenţă, atunci A_K este conexă prin arce.*

Capitolul 4

Sisteme iterative de funcţii afine orbital φ-contractive

În acest capitol introducem noţiunea de sistem iterativ de funcţii afin orbital φ-contractiv (oAIFS). Prezentăm două rezultate (Teorema 4.1 şi Teorema 4.2) care dau un rezultat de structură pentru funcţiile unui oAIFS şi stabilesc condiţii suficiente pentru existenţa unei norme cu anumite proprietăţi pe spaţiul vectorial unde sunt definite funcţiile. Dăm câteva exemple. Rezultatele prezentate aici au fost publicate în [22].

4.1 Preliminarii

Dacă $(Y, \|\cdot\|_Y)$ şi $(Z, \|\cdot\|_Z)$ sunt două spaţii normate şi $A \in L(Y, Z)$, prin $\|A\|_{Y,Z}$ înţelegem $\sup\limits_{y \in Y, y \neq 0_Y} \frac{\|Ay\|_Z}{\|y\|_Y}$.

Fie Y, $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ două spaţii vectoriale reale astfel încât $Y + Z = \mathbb{R}^n$ şi $Y \cap Z = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, atunci există un unic $y \in Y$ şi un unic $z \in Z$ astfel încât $y + z = x$. În acest caz, vom folosi notaţia $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$. Fie $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ şi $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Folosim notaţia $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, unde $A_{11} \in L(Y, Y)$, $A_{12} \in L(Z, Y)$, $A_{21} \in L(Y, Z)$ şi $A_{22} \in L(Z, Z)$ sunt date de $Ay = \begin{bmatrix} A_{11}y \\ A_{21}y \end{bmatrix}$ şi $Az = \begin{bmatrix} A_{12}z \\ A_{22}z \end{bmatrix}$ pentru orice $y \in Y$ şi $z \in Z$. Se observă că $Ax = \begin{bmatrix} A_{11}y \\ A_{21}y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12}z \\ A_{22}z \end{bmatrix}$ pentru orice $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Definiţia 4.1. *Pe $\mathbb{R}^n$ considerăm o normă fixată notată cu $\|\cdot\|$. Printr-un sistem iterativ de funcţii afin înţelegem o pereche notată cu $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (f_i)_{i \in I}\right)$, unde $(f_i)_{i \in I}$ este o* *familie finită de funcţii continue, cu* $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *pentru orice* $i \in I$*, având proprietatea că pentru orice* $i \in I$*, există* $\widetilde{A}_i \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *şi* $\widetilde{a}_i \in \mathbb{R}^n$ *astfel încât* $f_i(x) = \widetilde{A}_i x + \widetilde{a}_i$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^n$.

Definiţia 4.2. *Printr-un sistem iterativ de funcţii afin orbital* φ*-contractiv (oAIFS pe scurt) înţelegem o pereche notată cu* $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (f_i)_{i\in I}\right)$ *care este un sistem iterativ de funcţii afin şi are proprietatea că există o funcţie de comparaţie* $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *astfel încât* $\mathcal{S}$ *este un sistem iterativ de funcţii orbital* φ*-contractiv.*

4.2 Rezultate principale

Propoziţia 4.1 ([22]). *Fie* $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un oAIFS,* $m \in \mathbb{N}$*,* $m \geq 2$ *şi* $\alpha \in \Lambda_m(I)$*. Atunci,* $f_\alpha(x) = \widetilde{A}_\alpha x + \widetilde{a}_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} \widetilde{A}_{[\alpha]_{k-1}} \widetilde{a}_{\alpha_k}$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1 ([22]). *Fie* $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un oAIFS. Atunci există două subspaţii vectoriale* $Y, Z \subset \mathbb{R}^n$ *astfel încât:*

1) $Y + Z = \mathbb{R}^n$*,* $Y \cap Z = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$*;*

2) pentru orice $i \in I$*, există* $B_i \in L(Z, Z)$*,* $C_i \in L(Y, Z)$ *şi* $b_i \in Z$ *astfel încât* $\widetilde{A}_i = \begin{bmatrix} I_Y & O_{Z,Y} \\ C_i & B_i \end{bmatrix}$ *şi* $\widetilde{a}_i = \begin{bmatrix} 0_Y \\ b_i \end{bmatrix}$*;*

3) există $c \in (0,1)$ *şi o normă* $\|\cdot\|_Z$ *pe* Z *astfel încât* $\|B_i\|_Z < c$ *pentru orice* $i \in I$.

Teorema 4.2 ([22]). *Fie* $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (f_i)_{i\in I}\right)$ *un oAIFS. Fie* Y *şi* Z *subspaţiile vectoriale ale lui* $\mathbb{R}^n$ *care rezultă din Teorema 4.1 şi fie* $\|\cdot\|_Y$ *o normă definită pe* Y*. Fie* $\mu = \max_{i\in I} \|B_i\|_Z$*,* $\beta = \max_{i\in I} \|C_i\|_{Y,Z}$ *şi* $\theta \in \left(0, \frac{1-\mu}{\beta}\right)$*. Considerăm norma* $\|\cdot\|_\theta : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *definită de*

$$\left\| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \right\|_\theta = \max\left\{ \|y\|_Y, \theta \|z\|_Z \right\}$$

pentru orice $y \in Y$ *şi* $z \in Z$ *şi norma* $|||\cdot|||\colon Z \to [0,\infty)$ *dată de* $|||z||| = \theta ||z||_Z$ *pentru orice* $z \in Z$*. Atunci,* $\left\|\widetilde{A}_i\right\|_\theta \leq 1$ *şi* $|||B_i||| = \|B_i\|_Z < 1$ *pentru orice* $i \in I$.

Capitolul 5

Sisteme iterative de funcţii orbitale fuzzy

În acest capitol introducem noţiunea de sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy. Demonstrăm că operatorul fuzzy Hutchinson-Barnsley asociat unui astfel de sistem este slab Picard. De asemenea, pentru fiecare mulţime fuzzy, descriem fractalul fuzzy corespunzător. În plus, studiem fractalul fuzzy generat de un sistem iterativ de funcţii canonic fuzzy şi dăm un rezultat de structură privitor la fractalii fuzzy generaţi de un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy. Dăm de asemenea câteva exemple. Rezultatele prezentate aici se găsesc în [15], [16] şi [21].

5.1 Preliminarii

Terminologia folosită în acest capitol se găseşte în [23].

Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Familia de submulţimi fuzzy ale lui X este notată cu $\mathcal{F}_X$. Pentru $u \in \mathcal{F}_X$, folosim următoarea notaţie: $[u]^*\colon = \{x \in X \mid u(x) > 0\}$. Spunem că $u \in \mathcal{F}_X$ este normală dacă există $x \in X$ astfel încât $u(x) = 1$.

Notaţia 5.1. $\mathcal{F}_X^{**} = \{u \in \mathcal{F}_X \mid u$ *este normală şi cu suport compact*$\}$*;*
$\mathcal{F}_X^{*} = \{u \in \mathcal{F}_X^{**} \mid u$ *este ssc (superior semicontinuă)*$\}$.

Topologia lui $\mathcal{F}_X^{**}$ este definită folosind semimetrica Hausdorff-Pompeiu aplicată tăieturilor de nivel α. Cum $P_b(X)$ conţine toate tăieturile de nivel α, putem defini o semimetrică d_∞ în $\mathcal{F}_X^{**}$ prin $d_\infty(u, v) = \sup\limits_{\alpha \in [0,1]} h\left([u]^\alpha, [v]^\alpha\right)$ pentru orice $u, v \in \mathcal{F}_X^{**}$. Restricţia lui d_∞ la $\mathcal{F}_X^{*}$ este o metrică, deoarece în acest caz tăieturile de nivel α se găsesc în $P_{cp}(X)$.

Fiind dat un spaţiu metric (X,d) şi $(f_i)_{i\in I}$ o familie de funcţii cu $f_i\colon X\to\mathbb{R}$ pentru orice $i\in I$, notăm cu $\underset{i\in I}{\vee} f_i\colon X\to\mathbb{R}$ funcţia dată de $(\underset{i\in I}{\vee} f_i)(x)=\sup_{i\in I} f_i(x)$ pentru $x\in X$.

Definiţia 5.1. *Fie $\mathcal{S}=((X,d),(f_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii contractiv şi $(\rho_i)_{i\in I}$ un sistem admisibil de funcţii de nivel gri. Sistemul $\mathcal{S}_Z=\left((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I}\right)$ se numeşte sistem iterativ de funcţii fuzzy.*

Definiţia 5.2. *Fie $\mathcal{S}=\left((X,d),(f_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii orbital contractiv şi $(\rho_i)_{i\in I}$ un sistem admisibil de funcţii de nivel gri. Sistemul $\mathcal{S}_Z=\left((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I}\right)$ se numeşte sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy.*

Dacă $\mathcal{S}_Z=\left((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I}\right)$ este un sistem iterativ de funcţii fuzzy sau un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy, funcţia $Z\colon\mathcal{F}_X^{**}\to\mathcal{F}_X^{**}$, dată de $Z(u)=\underset{i\in I}{\vee}\rho_i(f_i(u))$ pentru orice $u\in\mathcal{F}_X^{**}$, se numeşte operatorul fuzzy Hutchinson-Barnsley asociat lui $\mathcal{S}_Z$.

Funcţia $\hat{Z}\colon\mathcal{F}_X^{*}\to\mathcal{F}_X^{*}$ este dată de $\hat{Z}(u)=Z(u)$ pentru orice $u\in\mathcal{F}_X^{*}$. Pentru simplitate, vom nota $\hat{Z}$ cu Z.

5.2 Rezultate referitoare la operatorul fuzzy asociat unui sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy

Fie $\mathcal{S}_Z=\left((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy. Considerăm $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{**}=\{u\in\mathcal{F}_X^{**}|$ dacă pentru acei $x\in X$ cu proprietatea $u(x)>0$, există $w\in X$ şi $y\in\overline{\mathcal{O}(w)}$ astfel încât $x\in\overline{\mathcal{O}(w)}$ şi $u(y)=1\}$ şi $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{*}=\{u\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{**}|\ u$ este ssc $\}$.

Observăm că operatorul $Z\colon\mathcal{F}_X^{**}\to\mathcal{F}_X^{**}$ induce operatorul $\mathbf{Z}\colon\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{**}\to\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{**}$ dat de $\mathbf{Z}(u)=Z(u)$ pentru orice $u\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{**}$, care, pentru simplitate, va fi notat cu Z în loc de $\mathbf{Z}$.

De asemenea, $Z\colon\mathcal{F}_X^{*}\to\mathcal{F}_X^{*}$ induce operatorul $\hat{\mathbf{Z}}\colon\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{*}\to\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{*}$ dat de $\hat{\mathbf{Z}}(u)=Z(u)$ pentru orice $u\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{*}$, care, pentru simplitate, va fi notat cu Z în loc de $\hat{\mathbf{Z}}$.

Lema 5.1 ([21])**.** *Fie $\mathcal{S}_Z=\left((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy, cu I o mulţime nevidă finită. Atunci $(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{*},d_\infty)$ este o submulţime închisă a lui $(\mathcal{F}_X^{*},d_\infty)$.*

Teorema 5.1 ([21])**.** *Operatorul fuzzy asociat unui sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy $\mathcal{S}$ este un operator slab Picard pe $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^{*}$.*

Exemplul A. Considerăm spaţiul metric $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$, unde $\|\cdot\|_2$ este norma Euclidiană, şi funcţiile f_1 şi f_2, cu f_1, $f_2\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, date de $f_1(x,y)=\left(x,\frac{1}{2}y\right)$ şi $f_2(x,y)=\left(x,\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)$ pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Considerăm $I=\{1,2\}$. Se poate arăta uşor că $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2), (f_i)_{i\in I}\right)$ este un sistem iterativ de funcţii orbital şi pentru orice $K \in P_{cp}(\mathbb{R}^2)$, atractorul este $A_K = [0,1] \times \pi_2(K)$ (a se vedea **exemplul A** din [25]). Definim un sistem admisibil de funcţii $(\rho_i)_{i\in I}$, dat de $\rho_1(t) = t$ şi $\rho_2(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{3}, \text{ dacă } t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \frac{2}{3}, \text{ dacă } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$ pentru orice $t \in [0,1]$. Considerăm funcţia $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}_\Lambda}$, dată de $u(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } (x,y) \in [0,1] \times \{0\} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

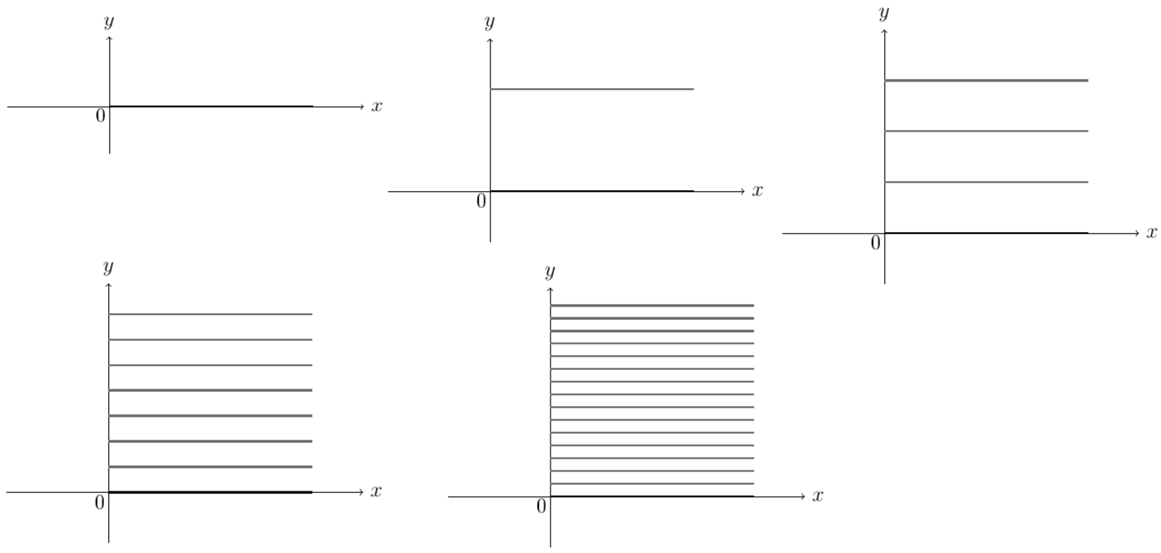
Fie $x \in [0,1]$. Considerăm acum sistemul $\mathcal{S}$ restricţionat la $X_x\colon = \{x\} \times \mathbb{R}$. Se poate arăta uşor că este un sistem iterativ de funcţii contractiv. În acest caz, atractorul este $A_x = \{x\} \times [0,1]$. Vom da acum detalii referitoare la $\mathbf{u}_u$.

Folosind metoda inducţiei matematice, se poate arăta că

$$Z^n(u)(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [0,1] \text{ şi } y = 0 \\ \frac{2}{3}, \text{ dacă } x \in [0,1] \text{ şi } y \in \left\{\frac{p}{2^n} \mid p \in \{0,1,2,\cdots,2^n-1\}\right\} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases},$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită, avem că $\mathbf{u}_u = \lim\limits_{n\to\infty} Z^n(u)$.

Figurile de mai jos ilustrează exemplul de mai sus. În primul pas este reprezentată u, în al doilea $Z(u)$, în al treilea $Z^2(u)$, al patrulea $Z^3(u)$ iar în ultima etapă am ilustrat $Z^4(u)$.



Exemplul B. Considerăm sistemul $\mathcal{S} = \left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2), (f_i)_{i\in I}\right)$ prezentat în **Exemplul**

A. Definim sistemul admisibil de funcţii $(\rho_i)_{i\in I}$, dat de $\rho_1(t) = t$ şi $\rho_2(t) = \frac{3t}{4}$ pentru orice $t \in [0,1]$.

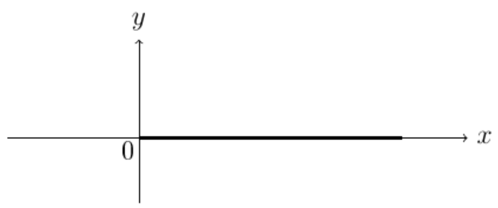
Fie $x \in [0,1]$. Consideăm acum sistemul $\mathcal{S}$ restricţionat la $X_x\colon = \{x\} \times \mathbb{R}$. Considerăm funcţia $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}_\Lambda}$ din **Exemplul A** şi vrem să descriem funcţia $\mathbf{u}_u$. Fie $p\colon \Lambda^*(I) \cup \Lambda(I) \to [0,1]$ dată de $p(\alpha) = \sum_{n=1}^{|\alpha|} \frac{\alpha_n - 1}{2^n}$, pentru orice $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots \in \Lambda^*(I) \cup \Lambda(I)$. Definim, de asemenea, funcţia $\eta\colon \Lambda^*(I) \cup \Lambda(I) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, dată de $\eta(\alpha) = |\{i \mid \alpha_i = 2,\ 1 \le i \le |\alpha|\}|$ pentru orice $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots \in \Lambda^*(I) \cup \Lambda(I)$, unde pentru o mulţime A notăm cu $|A|$ numărul de elemente ale lui A. Folosind metoda inducţiei matematice, se poate arăta că

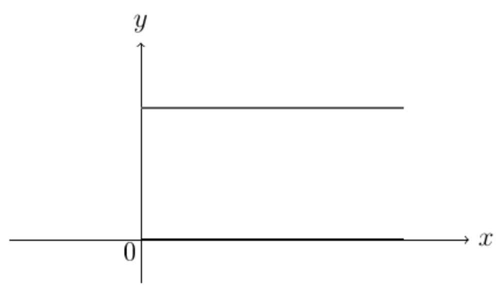
$$Z^n(u)(x,y) = \max_{p(\alpha)=y, |\alpha|\le n} \left(\frac{3}{4}\right)^{\eta(\alpha)},$$

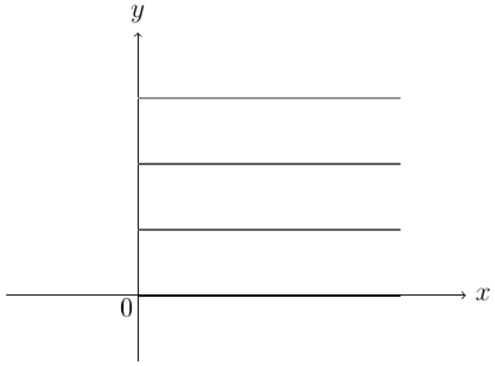
dacă $(x,y) \in [0,1]^2$ şi există $\alpha \in \Lambda^*(I)$ astfel încât $|\alpha| \le n$, $y = p(\alpha)$ şi $Z^n(u)(x,y) = 0$, altfel.

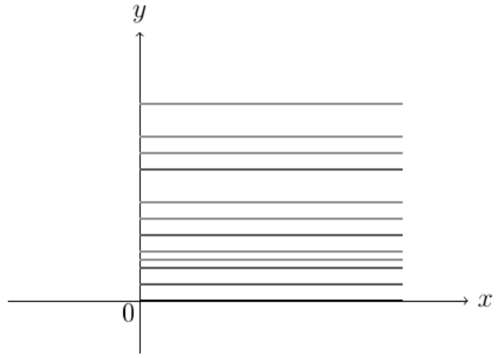
Trecând la limită, avem $\mathbf{u}_u(x,y) = \lim_{n\to\infty} Z^n(u)(x,y) = \max_{p(\alpha)=y, \alpha\in\Lambda^*(I)\cup\Lambda(I)} \left(\frac{3}{4}\right)^{\eta(\alpha)}$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Figurile următoare ilustrează exemplul prezentat mai sus. În prima figură este reprezentată funcţia u, în a doua $Z(u)$, în a treia $Z^2(u)$ şi în ultimul pas este reprezentă o parte din $Z^4(u)$.









5.3 O caracterizare a fractalilor fuzzy generaţi de un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy

Fixăm $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$ şi $x \in [u]^*$. Prin urmare, există $w_x, y_x \in X$ astfel încât $x, y_x \in \overline{\mathcal{O}(w_x)}$ şi $u(y_x) = 1$. Fixăm w_x ca mai sus. Considerăm funcţia $u^x \colon X \to [0,1]$ definită ca în Teorema 5.1, şi anume $u^x(y) = \begin{cases} u(y), \text{ dacă } y \in \overline{\mathcal{O}(w_x)} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$, pentru orice $y \in X$. Avem $u^x \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$.

Folosim notaţiile: $\mathbf{u}_u \colon = \lim\limits_{n\to\infty} Z^n(u)$, $w_u \colon = \bigvee\limits_{x\in[u]^*} \mathbf{u}_{x,w_x,u}$ şi $\mathbf{u}_{x,w_x,u} = \lim\limits_{n\to\infty} Z^n(u^x)$.

Existenţa limitelor de mai sus este bazată pe Teorema 5.1.

Pentru $x \in X$, considerăm $\delta_x \in \mathcal{F}^*_X$ dată de $\delta_x(t) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } t = x \\ 0, \text{ dacă } t \neq x \end{cases}$, pentru orice $t \in X$. Se observă că $\delta_x \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$ pentru orice $x \in X$.

Propoziţia 5.1 ([15]). *Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy, $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$ şi $x \in [u]^*$ (deci există $w_x, y_x \in X$ astfel încât $x, y_x \in \overline{\mathcal{O}(w_x)}$ şi $u(y_x) = 1$). Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} Z^n(\delta_s) = \mathbf{u}_{x,w_x,u}$, pentru orice $s \in \overline{\mathcal{O}(w_x)}$. În particular, $\lim\limits_{n\to\infty} Z^n(\delta_x) = \mathbf{u}_{x,w_x,u}$.*

Propoziţia 5.1 ne asigură că $\mathbf{u}_{x,w_x,u}$ nu depinde de funcţia u. Astfel, în loc de $\mathbf{u}_{x,w_x,u}$, vom folosi notaţia $\mathbf{u}_x$.

Propoziţia 5.2 ([15]). *Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$. Atunci $\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_x$, pentru orice $x \in [u]^*$ şi orice $y \in [\mathbf{u}_x]^*$.*

Propoziţia 5.3 ([15]). *Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$. Atunci funcţia $U \colon [u]^* \to \mathcal{F}^*_X$, dată de $U(x) = \mathbf{u}_x$, pentru orice $x \in [u]^*$, este continuă.*

Propoziţia 5.4 ([15]). *Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$. Atunci $[\bigvee\limits_{x\in[u]^*} \mathbf{u}_x]^\alpha = \bigcup\limits_{x\in[u]^*} [\mathbf{u}_x]^\alpha$, pentru orice $\alpha \in (0,1]$ şi $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$.*

Propoziţia 5.5 ([15]). *Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$. Atunci $\{\mathbf{u}_x \mid x \in [u]^*\} = \{\mathbf{u}_x \mid x \in [u]^1\}$. În particular, $w_u = \bigvee\limits_{x\in[u]^*} \mathbf{u}_x = \bigvee\limits_{x\in[u]^1} \mathbf{u}_x$.*

Propoziţia 5.6 ([15]). *Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$. Atunci w_u este superior semicontinuă, deci $w_u \in \mathcal{F}^*_X$.*

Propoziţia 5.7 ([15]). *Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$. Atunci $d_\infty(\mathbf{u}_u, w_u) = 0$.*

Teorema 5.2 ([15]). *Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$. Atunci $\mathbf{u}_u = \bigvee_{x\in[u]^*} \mathbf{u}_x = \bigvee_{x\in[u]^1} \mathbf{u}_x = \max_{x\in[u]^*} \mathbf{u}_x = \max_{x\in[u]^1} \mathbf{u}_x$.*

5.4 Structura fractalilor fuzzy generaţi de un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy

Fie $\mathcal{S}_Z = \left((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I}\right)$ un sistem iterativ de funcţii fuzzy şi fie Z operatorul fuzzy Hutchinson-Barnsley asociat lui $\mathcal{S}_Z$. Notăm cu $\mathbf{u}_{\mathcal{S}}$ fractalul fuzzy generat de $\mathcal{S}_Z$.

Considerăm sistemul iterativ de funcţii canonic fuzzy care este notat cu $\mathcal{S}_\Lambda = ((\Lambda(I),d_c),(\tau_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$. Operatorul fuzzy Hutchinson-Barnsley asociat lui $\mathcal{S}_\Lambda$ va fi notat cu Z_Λ şi fractalul fuzzy al lui Z_Λ va fi notat cu $\mathbf{u}_\Lambda$. Deci, $Z_\Lambda(\mathbf{u}_\Lambda) = \mathbf{u}_\Lambda$ şi $\lim_{n\to\infty} d_\infty(Z^n_\Lambda(u),\mathbf{u}_\Lambda) = 0$, pentru orice $u \in \mathcal{F}^*_{\Lambda(I)}$.

Teorema 5.3 ([16]). *În cadrul de mai sus, avem $\mathbf{u}_\Lambda = \lim_{n\to\infty} u_n$, unde $u_n \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}_\Lambda}$ este dată de $u_n(\omega) = \rho_{[\omega]_n}(1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $\omega \in \Lambda(I)$.*

Teorema 5.4 ([16]). *În cadrul de mai sus, pentru orice sistem iterativ de funcţii fuzzy $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$, avem $\mathbf{u}_S = \pi(\mathbf{u}_\Lambda)$, unde π este proiecţia canonică asociată sistemului iterativ de funcţii contractiv $((X,d),(f_i)_{i\in I})$.*

Fie $\mathcal{S}_Z = ((X,d),(f_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I})$ un sistem iterativ de funcţii orbital fuzzy şi fie $u \in \mathcal{F}^*_{\mathcal{S}}$. Atunci, pentru orice $x \in [u]^*$, există $w_x, y_x \in X$ astfel încât $x, y_x \in \overline{\mathcal{O}(w_x)}$ şi $u(y_x) = 1$.

Considerăm sistemul iterativ de funcţii fuzzy $((\overline{\mathcal{O}(w_x)},d),(\widetilde{f_i})_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I}) \overset{not}{=} S_{w_x}$, unde $\widetilde{f_i}\colon \overline{\mathcal{O}(w_x)} \to \overline{\mathcal{O}(w_x)}$ este dată de $\widetilde{f_i}(y) = f_i(y)$, pentru orice $y \in \overline{\mathcal{O}(w_x)}$. Notăm cu π_x proiecţia sa canonică şi cu Z_{w_x} operatorul său fuzzy Hutchinson-Barnsley. Notăm de asemenea cu $\widetilde{\pi}_x(\mathbf{u}_\Lambda)$ funcţia dată de $\widetilde{\pi}_x(\mathbf{u}_\Lambda)(y) = \begin{cases} \pi_x(\mathbf{u}_\Lambda)(y), \text{ dacă } y \in \overline{\mathcal{O}(w_x)} \\ 0, \text{ dacă } y \in X \setminus \overline{\mathcal{O}(w_x)} \end{cases}$ pentru orice $y \in X$.

Teorema 5.5 ([16]). *În cadrul de mai sus, avem $\mathbf{u}_u = \bigvee_{x\in[u]^*} \widetilde{\pi}_x(\mathbf{u}_\Lambda) = \bigvee_{x\in[u]^1} \widetilde{\pi}_x(\mathbf{u}_\Lambda) = \max_{x\in[u]^*} \widetilde{\pi}_x(\mathbf{u}_\Lambda) = \max_{x\in[u]^1} \widetilde{\pi}_x(\mathbf{u}_\Lambda)$.*

Bibliografie

1. M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, MA, 1988.

2. M. Boriceanu, M. Bota, A Petruşel, *Multivalued fractals in b-metric spaces*, Cent. Eur. J. Math., **8** (2010), no. 2, 367-377.

3. D. Dumitru, L. Ioana, R. C. Sfetcu, F. Strobin, *Topological version of generalized (infinite) iterated function systems,* Chaos Solitons Fractals, **71** (2015), 78-90.

4. N. Van Dung, A. Petruşel, *On iterated function systems consisting of Kannan maps, Reich maps, Chatterjea type maps, and related results*, J. Fixed Point Theory Appl., **19** (2017), no. 4, 2271-2285.

5. H. Fernau, *Infinite iterated function systems*, Math. Nachr., **170** (1994), 79-91.

6. G. Gwóźdź-Lukowska, J. Jachymski, *The Hutchinson-Barnsley theory for infinite iterated function systems*, Bull. Austral. Math. Soc., **72** (2005), no. 3, 441-454.

7. J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J., **30** (1981), no. 5, 713-747.

8. I. Jaksztas, *Infinite iterated function systems depending on a parameter*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **55** (2007), no. 2, 105-122.

9. S. Kumari, K. Gdawiec, A. Nandal, M. Postolache, R. Chugh, *A novel approach to generate Mandelbrot sets, Julia sets and biomorphs via viscosity approximation method,* Chaos Solitons Fractals **163** (2022), no. 112540, 21 pp.

10. H. Kunze, D. La Torre, E. R. Vrscay, *From iterated function systems to iterated multifunction systems*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **15** (2008), no. 4, 1-13.

11. A. Lasota, J. Myjak, *Attractors of multifunctions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **48** (2000), no. 3, 319-334.

12. K. Leśniak, N. Snigireva, F. Strobin, *Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual*, J. Difference Equ. Appl., **26** (2020), no. 8, 1114-1173.

13. F. Mendivil, *A generalization of IFS with probabilities to infinitely many maps*, Rocky Mountain J. Math., **28** (1998), no. 3, 1043-1051.

14. R. Miculescu, A. Mihail, **I. Savu**, *Iterated function systems consisting of continuous functions satisfying Banach's orbital condition,* An. Univ. Vest Timiş. Ser. Mat.-Inform., **56** (2018), no. 2, 71-80.

15. R. Miculescu, A. Mihail, **I. Savu**, *A characterization of the fuzzy fractals generated by an orbital fuzzy iterated function system*, Carpathian J. Math., **38** (2022), no. 3, 583-595.

16. R. Miculescu, A. Mihail, **I. Savu**, *The structure of fuzzy fractals generated by an orbital fuzzy iterated function system*, submitted.

17. A. Mihail, *The canonical projection between the shift space of an IIFS and its attractor as a fixed point,* Fixed Point Theory Appl., **75** (2015), 15 pp.

18. A. Mihail, **I. Savu**, *φ-Contractive parent-child possibly infinite IFSs and orbital φ-contractive possibly infinite IFSs*, accepted for publication, will appear in Fixed Point Theory; arXiv:2103.07551.

19. A. Mihail, **I. Savu**, *Orbital φ-contractive iterated function systems*, Proceedings of Research World International Conference, Prague, Czech Republic, 21^{st}-22^{nd} September 2020.

20. A. Mihail, **I. Savu**, *On the connectedness of attractors of orbital contractive IFSs*, Topology Appl., **326** (2023), Paper No. 108412, 16 pp.

21. A. Mihail, **I. Savu**, *Orbital fuzzy iterated function systems,* Fuzzy Sets and Systems, https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.02.012; arXiv:2112.15496.

22. A. Mihail, **I. Savu**, *φ-Contractive orbital affine iterated function systems*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys., **85** (2023), no. 1, 13-24.

23. E. R. Oliveira, F. Strobin, *Fuzzy attractors appearing from GIFZS,* Fuzzy Sets and Systems, **331** (2018), 131-156.

24. A. Petruşel, A. Soos, *Self-similar sets and fractals generated by Ćirić type operators*, J. Nonlinear Sci. Appl., **8** (2015), no. 6, 1048-1058.

25. **I. Savu**, *New aspects concerning IFSs consisting of continuous functions satisfying Banach's orbital condition*, J. Fixed Point Theory Appl., **21** (2019), no. 2, Paper No. 62, 11 pp.

26. N. A. Secelean, *Iterated function systems consisting of F-contractions,* Fixed Point Theory Appl., **277** (2013), 13 pp.

27. N. A. Secelean, *Countable iterated function systems*, Lambert Academic Publishing, 2013.

28. N. A. Secelean, *Generalized iterated function systems on the space $l^\infty(X)$*, J. Math. Anal. Appl., **410** (2014), no. 2, 847-858.

29. N. A. Secelean, *Invariant Measure Associated with a Generalized Countable Iterated Function System*, Mediterr. J. Math., **11** (2014), no. 2, 361-372.

30. D. La Torre, F. Mendivil, E. R. Vrscay, *Iterated Function Systems on Multifunctions*, Math everywhere, 125-138, Springer, Berlin, 2007.

31. S.A. Urziceanu, *Possibly infinite generalized iterated function systems comprising φ-max contractions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **64** (2019), no. 2, 139-150.

32. R. Zaharopol, *Equicontinuity and existence of attractive probability measures for some iterated function systems*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **52** (2007), no. 2, 259-286.