UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI

FACULTATEA DE ȘTIINȚE APLICATE

TEZĂ DE ABILITARE / HABILITATION THESIS

O Abordare Ergodică a Unor Algoritmi de Reprezentare a Numerelor Reale

An Ergodic Approach to Real Number Representation Algorithms

REZUMAT / ABSTRACT

DOMENIUL: MATEMATICĂ / DOMAIN: MATHEMATICS

Conf. Dr. Gabriela-Ileana SEBE

București, 2023

Rezumat

Această teză prezintă cele mai importante rezultate ale cercetării mele în teoria metrică a fracţiilor continue. Publicate după 2005, în jurnale internaţionale de impact, aceste rezultate reprezintă noi realizări după obţinerea titlului de doctor în 1996.

Exceptând teoria clasică a fracţiilor continue regulate (FCR) fondată pe celebra funcţie a lui Gauss, multe cercetări au fost dedicate studiului diferiţilor algoritmi de reprezentare a numerelor reale prin intermediul şirurilor de numere întregi. Teoria metrică a fracţiilor continue se referă la studiul şirului aleator al numitorilor parţiali ai fracţiei continue şi al altor şiruri aferente. Această teorie are conexiuni cu multe domenii, inclusiv teoria probabilităţilor, teoria ergodică, teoria numerelor, sistemele dinamice (vezi [11, 17, 21, 31, 42, 43, 50, 64]).

Teza este organizată în şase capitole. Nucleul tezei constă din studiul sistematic a trei familii mari de fracţii continue. Pentru a înţelege comportamentul global al unor astfel de familii, sunt explorate proprietăţile sistemelor dinamice care generează aceste dezvoltări. Teoremele de tip Gauss-Kuzmin sunt necesare deoarece rezultatele ergodice nu furnizează rate de convergenţă pentru proprietăţile de mixing.

Capitolul 1 are două scopuri. Primul este acela de a descrie câteva aspecte istorice referitoare la problema Gauss-Kuzmin-Lévy împreună cu evoluţiile sale actuale. Al doilea obiectiv este prezentarea unor concepte, notaţii şi rezultate generale. Descriem aici principalele proprietăţi ale operatorilor Perron-Frobenius şi discutăm despre construcţia unui lanţ Markov (LM) omogen cu un spaţiu măsurabil de stări arbitrar. Cel mai important în acest capitol (vezi Secţiunea 1.4) este un studiu al sistemelor aleatoare cu legături complete (SALC) şi al lanţurilor Markov asociate [25]. Ne concentrăm asupra unei clase speciale de LM, numite LM compacte, introduse de Norman [45]. Un LM compact are spaţiul stărilor un spaţiu metric compact (W, d), iar operatorul său de tranziţie este

un operator Doeblin-Fortet [16] care acţionează pe spaţiul funcţiilor Lipschitz mărginite $L(W)$. O clasă importantă de LM compacte cu mare impact în teoria metrică a FC este cea a LM asociate unor SALC-uri cu contracţie pe un spaţiu metric compact. Astfel, este investigată existenţa şi unicitatea unei măsuri de probabilitate staţionare pentru LM. Aceste rezultate sunt utile în studiul comportamentului asimptotic al operatorului de tranziţie asociat LM pe $L(W)$.

Capitolul al 2-lea este dedicat studiului unei familii de FC legate de anumite şiruri aleatoare de tip Fibonacci. Aceste dezvoltări în FC asociate cu puteri întregi nepozitive ale unui întreg $m \geq 2$ apar în cercetările lui Chan [8, 9]. Aceste dezvoltări sunt generate de transformările τ_m, $m \geq 2$, care sunt ergodice în raport cu o măsură de probabilitate invariantă γ_m. În lucrările [55, Int.J.Math.Math.Sci., 2005] şi [27, AIP Conf. Proc., 2006] am făcut un studiu detaliat al teoriei metrice a acestor dezvoltări în cazul $m = 2$. Am demonstrat o versiune a unui rezultat Brodén-Borel-Lévy care ne-a permis să subliniem proprietăţile şirului numitorilor parţiali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ şi ale şirurilor aferente $(s_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_+}$ şi $(s^a_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_+}$, $a \geq 0$. Construind extensia naturală (vezi Nakada [44]) a sistemului dinamic, am evidenţiat proprietăţile stocastice ale şirului extins de numitori parţiali $(\bar{a}_l)_{l\in\mathbb{Z}}$. Am introdus o familie de măsuri de probabilitate $(\gamma_{2,a})_{a\geq 0}$ astfel încât în cazul limită $a = \infty$, $\gamma_{2,\infty}$ coincide cu măsura Lebesgue λ pe $(I, \mathcal{B}_I)$. Astfel, acest şir $(s^a_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_+}$ apare ca un LM cu valori în $I \cup \{a\}$ pe $(I, \mathcal{B}_I, \gamma_{2,a})$. În [55] am investigat operatorul Perron-Frobenius P_μ al transformării τ_2 în raport cu diferite măsuri de probabilitate μ pe $\mathcal{B}_I$. Studiul s-a axat pe operatorul Perron-Frobenius P_{γ_2} în raport cu măsura invariantă γ_2 indusă de funcţia de repartiţie limită. Trebuie spus că proprietăţile operatorului Perron-Frobenius definit pe spaţiul Banach $L^1_{\gamma_2}(I)$ nu sunt suficient de tari pentru a conduce la o soluţie satisfăcătoare a problemei Gauss-Kuzmin-Lévy. Totuşi, restricţionând P_{γ_2} la alte spaţii Banach, proprietăţile lui sunt substanţial mai tari. De fapt, pentru orice $a \geq 0$, operatorul liniar şi mărginit P_{γ_2} restricţionat la $B(I)$ (spaţiul Banach al funcţiilor măsurabile mărginite $f : I \to \mathbb{C}$ în raport cu norma supremum) coincide cu operatorul de tranziţie al LM $(s^a_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_+}$. Ulterior, în [55] am restricţionat operatorul P_{γ_2} la spaţiul Banach al funcţiilor care au derivată continuă pe I. Proprietăţile semnificative ale acestui operator ne-au permis să îmbunătăţim un rezultat al lui Chan [8] care a arătat că rata de convergenţă a funcţiilor de repartiţie $\lambda\left(\tau_2^n < x\right)$ ale iteratelor lui τ_2 la $\gamma_2([0, x])$, $x \in I$

este $\mathcal{O}(q^n)$ când $n \to \infty$ cu $q \leq 0.880555$ uniform în raport cu x. Pentru termenul eroare $e_{2,n}(\mu; x) = \mu\left(\tau_2^{-n}[0,x] - \gamma_2([0,x])\right)$, $n \geq 1$, $x \in I$, unde $\mu \ll \lambda$, am obţinut marginile superioară şi inferioară, $\mathcal{O}(w^n)$ şi, respectiv, $\mathcal{O}(v^n)$ când $n \to \infty$ cu $w < 0.209364308$ şi $v > 0.206968896$. Importanţa acestui rezultat a fost reliefată în articolul [27, AIP Conf. Proc., 2006]. Restricţionând operatorul P_{γ_2} la spaţiul Banach al funcţiilor cu variaţie mărginită pe I am demonstrat că rata de convergenţă exactă (optimă) a lui $\gamma_{2,a}(s^a_{2,n} \leq x)$ la $\gamma_2([0,x])$ este $\mathcal{O}(g^{2n})$ când $n \to \infty$, cu $g^2 = (3-\sqrt{5})/2 = 0.38196\ldots$ uniform în raport cu x. Este o sarcină foarte dificilă, dacă nu chiar imposibilă, obţinerea unei rate de convergenţă exacte. Pentru transformarea generalizată τ_m, $m \geq 3$, măsura invariantă γ_m are o expresie mult mai complicată. În articolul [56, Tokyo J. Math., 2010] am obţinut o soluţie aproape optimă a problemei Gauss-Kuzmin-Lévy în cazul $m \geq 3$.

Capitolul al 3-lea colectează toate rezultatele obţinute pentru θ-dezvoltări, incluse în articolele [57], [58] şi [59]. Chakraborty şi Rao [7] au introdus dezvoltarea în fracţie continuă a unui număr în raport cu un număr iraţional $\theta \in (0,1)$. În [58, J. Funct. Spaces, 2014] am făcut un studiu detaliat al proprietăţilor metrice ale acestor dezvoltări. Am dat o reprezentare de lanţ de ordin infinit şirului de numitori parţiali ai θ-dezvoltării. Am arătat că SALC-urile asociate acestor dezvoltări sunt cu contracţie şi operatorii lor de tranziţie sunt regulaţi în raport cu spaţiul Banach al funcţiilor Lipschitz. Acestea ne-au permis să demonstrăm prima teoremă Gauss-Kuzmin pentru θ-dezvoltări. Folosind o abordare de tip Wirsing [69] a operatorului Perron-Frobenius în raport cu măsura invariantă a transformării T_θ care generează θ-dezvoltările, în [57, J.Number Theory, 2017] am studiat optimizarea ratei de convergenţă. De fapt, în [57, J.Number Theory, 2017] pentru a ne apropia de rata de convergenţă optimă, am dedus marginile superioară şi inferioară ale termenului eroare care oferă o soluţie a problemei Gauss-Kuzmin-Lévy. În final, în [59, J.Number Theory, 2019] am demonstrat o teoremă Gauss-Kuzmin asociată extensiei naturale a transformării T_θ. În continuare, proprietăţile caracteristice ale operatorului Perron-Frobenius pe spaţiul Banach al funcţiilor cu variaţie mărginită ne-au permis să obţinem o estimare mai rafinată a ratei de convergenţă.

Capitolul al 4-lea este consacrat studiului asupra FC Rényi generalizate făcut în [36], [37], [61] şi [62]. Aceste FC reprezintă o clasă specială de backward FC investigate de Gröchenig şi Haas în [19, 20]. În [36, Acta Math. Hungar., 2020] am început o abordare a teoriei metrice a dezvoltărilor în FC de tip Rényi prin intermediul dependenţei cu legături complete şi am obţinut o versiune a teoremei Gauss-Kuzmin bazată pe comportamentul ergodic al SALC asociat. În [37, Acta Arith., 2020] am continuat investigaţia comportamentului asimptotic al funcţiilor de repartiţie ale iteratelor transformării de tip Rényi R_N. Pentru a demonstra o teoremă Gauss-Kuzmin-Lévy pentru aceste dezvoltări, am aplicat metoda lui Szüsz [67]. De fapt, am obţinut mai multe informaţii despre rata de convergenţă pentru care am găsit o expresie explicită în termeni de funcţiile zeta ale lui Hurwitz. Prin restricţionarea operatorului Perron-Frobenius al lui R_N în raport cu măsura invariantă la spaţiul Banach al funcţiilor care au derivata continuă, în [61, Period. Math. Hungar., 2020] am obţinut cel mai bun ordin de convergenţă. În lucrarea recentă [62, Period. Math. Hungar., 2022] am demonstrat o teoremă Gauss-Kuzmin bidimensională pentru funcţia de repartiţie comună a lui R_N^n şi $s_{N,n}^a$, $n \in \mathbb{N}_+$, $N \geq 2$, $a \in I$, cu o estimare foarte bună a termenului eroare.

Capitolul al 5-lea prezintă investigarea eficienţei familiilor de FC studiate în capitolele precedente. În plus, considerăm o nouă familie de N-FC pe care am studiat-o recent în [60, Publ. Math. Debrecen, 2020]. Deoarece există mai mulţi algoritmi pentru FC, ne întrebăm care dintre ei oferă cea mai bună aproximare a unui număr real. Reprezentarea unui număr real printr-o FC poate fi privită ca o sursă de informaţie despre acel număr. Conceptul de entropie Kolmogorov-Sinai este adecvat pentru clasificarea sistemelor dinamice, distingând sistemele dinamice non-izomorfe. Folosind un rezultat extins al lui Lochs [39], care a comparat eficienţa dezvoltărilor zecimale şi în FCR, în [38, Mathematics, 2021] am studiat eficienţa FCR, a FC Chan, a θ-dezvoltărilor, a N-FC şi a FC de tip Rényi. Teorema Dajani-Fieldsteel [10] reprezintă un instrument util de comparare a oricăror două dezvoltări de numere care sunt generate de transformări surjective, în anumite condiţii. Folosind proprietăţile metrice ale acestor dezvoltări, formula lui Rohlin [48] pentru calculul entropiei, în ipoteza în care condiţia lui Rényi este satisfăcută, am decis că N-FC sunt mai eficiente decât FC de tip Rényi, că N-FC şi FC de tip Rényi sunt mai eficiente decât FCR, care sunt mai eficiente decât FC-Chan. Astfel, N-FC sunt cele mai eficiente pentru reprezentarea unui număr real din intervalul unitate.

Capitolul al 6-lea este dedicat prezentării unor planuri de viitor privind cariera profesională şi ştiinţifică a autoarei.

Abstract

This thesis presents the most important results of my research in the metrical theory of continued fractions. Published after 2005, in several high impact international journals, they represent new achievements after obtaining the PhD title in 1996.

Except for the classical theory of regular continued fractions (RCFs) based on the famous Gauss map, a large amount of research has been devoted to the study of various algorithms for the representation of real numbers by means of sequences of integers.

The metrical theory of the continued fraction expansion is about the sequence of its incomplete quotients and related sequences. This theory has connections with many fields, including probability theory, ergodic theory, number theory, dynamical systems (see, e.g. [11, 17, 21, 31, 42, 43, 50, 64]).

The thesis is organized in six chapters. The core of the thesis consists of the systematic study of three large families of continued fractions. To understand the global behavior of such families of expansions of numbers, the properties of dynamical systems that generate them are explored. Since the ergodic results do not yield rates of convergence for mixing properties, Gauss-Kuzmin-type theorems are needed.

Chapter 1 has two purposes. The first one is to describe some historical aspects concerning the Gauss-Kuzmin-Lévy Problem together with its current developments. The second goal is to present some concepts, notations and general results. We describe the main properties of Perron-Frobenius operators and we discuss the construction of a homogeneous Markov chain with an arbitrary measurable state space. The most important part of this chapter (see Section 1.4) is a survey of random systems with complete connections (RSCCs) and the associated Markov chains (MCs) [25]. We focus on a special class of MCs, called compact MCs, introduced by Norman [45]. For a compact MC its state space is a compact metric space (W, d) and its transition operator is a Doeblin-Fortet

operator [16] acting on the space of bounded Lipschitz functions $L(W)$. An important class of compact MCs with great impact in the metrical theory of continued fractions is that of MCs associated with RSCCs with contraction on a compact metric space. Thus, the existence and uniqueness of a stationary probability measure for the chain is investigated. These results are very useful in order to study the asymptotic behavior of the associated transition operator of the MC on $L(W)$.

Chapter 2 is devoted to the study of a family of continued fractions related to some random Fibonacci-type sequences. These continued fraction expansions associated with non-positive integer powers of an integer $m \geq 2$ appear in the investigations of Chan [8, 9]. These expansions are generated by transformations τ_m, $m \geq 2$, which are ergodic with respect to an invariant probability measure γ_m. In our papers [55, Int.J.Math.Math.Sci., 2005] and [27, AIP Conf. Proc., 2006] we made a detailed study of the metrical theory of these expansions in the case $m = 2$. We proved a version of a Brodén-Borel-Lévy result, which allowed to emphasize the properties of the sequence of partial quotients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ and related sequences $(s_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_+}$, and $(s^a_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_+}$, $a \geq 0$. By constructing the natural extension (see Nakada [44]) of the measure-dynamical-system, we revealed the stochastic property of the sequence of extended partial quotients $(\bar{a}_l)_{l\in\mathbb{Z}}$. We introduced a family of probability measures $(\gamma_{2,a})_{a\geq 0}$, such that in the limit case $a = \infty$, $\gamma_{2,\infty}$ is the Lebesgue measure λ on $(I, \mathcal{B}_I)$. Thus, the sequence $(s^a_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_+}$ appears as an $I\cup\{a\}$-valued Markov chain on $(I, \mathcal{B}_I, \gamma_{2,a})$. In [55] we investigated the Perron-Frobenius operator P_μ of the transformation τ_2 under different probability measures μ on $\mathcal{B}_I$. The study focused on the Perron-Frobenius operator P_{γ_2} of τ_2 under the invariant measure γ_2 induced by the limit distribution function. It should be said that the asymptotic properties of the Perron-Frobenius operator defined on the Banach space $L^1_{\gamma_2}(I)$ are not strong enough to lead to a satisfactory solution to Gauss-Kuzmin-Lévy problem. Nevertheless, when restricting P_{γ_2} to other Banach spaces they are substantially stronger. Actually, for any $a \geq 0$ the bounded linear Perron-Frobenius operator P_{γ_2} restricted to $B(I)$ (the Banach space of all bounded measurable functions $f : I \to \mathbb{C}$ under the supremum norm) is the transition operator of the Markov chain $(s^a_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_+}$. Subsequently, in [55] we restricted the Perron-Frobenius operator P_{γ_2} on the Banach space of functions which have a continuous derivative on I. The significant properties of this operator allowed us to improve a result of Chan who showed in [8] that the convergence rate of the distribution function $\lambda\left(\tau_2^n < x\right)$ of τ_2^n to $\gamma_2([0,x])$, $x \in I$ is $\mathcal{O}(q^n)$ as $n \to \infty$ with $q \leq 0.880555$ uniformly in x. For the error term $e_{2,n}(\mu; x) = \mu\left(\tau_2^{-n}[0,x] - \gamma_2([0,x])\right)$, $n \geq 1$, $x \in I$, where $\mu \ll \lambda$, we obtained upper and lower bounds, respectively $\mathcal{O}(w^n)$ and $\mathcal{O}(v^n)$ as $n \to \infty$ with $w < 0.209364308$ and $v > 0.206968896$. The impact of this result was given in our next paper [27, AIP Conf. Proc., 2006]. By restricting the Perron-Frobenius operator P_{γ_2} to the Banach space of functions of bounded variation on I, we proved that the exact (optimal) convergence rate of $\gamma_{2,a}(s_{2,n}^a \leq x)$ to $\gamma_2([0,x])$ is $\mathcal{O}(g^{2n})$ as $n \to \infty$, with $g^2 = (3-\sqrt{5})/2 = 0.38196\ldots$ uniformly in x. To obtain an exact convergence rate is a very difficult task, if not impossible. For the generalized transformation τ_m, $m \geq 3$, the invariant measure γ_m has a much more complicated expression. In our paper [56, Tokyo J. Math., 2010] we provided a near-optimal solution to the Gauss-Kuzmin-Lévy problem in the case $m \geq 3$.

Chapter 3 collects all our results obtained on θ-expansions included in the papers [57], [58] and [59]. Chakraborty and Rao [7] have introduced the continued fraction expansion of a number in terms of an irrational $\theta \in (0,1)$. In [58, J. Funct. Spaces, 2014] we made a detailed study of the metric properties of these expansions. We gave an infinite-order-chain representation of the sequence of the incomplete quotients of the θ-expansions. We showed that the RSCCs associated with these expansions are with contraction and their transition operators are regular with respect to the Banach space of Lipschitz functions. These allowed us to prove the first Gauss-Kuzmin theorem for θ-expansions. Using a Wirsing-type approach [69] to the Perron-Frobebius operator of the map T_θ generating θ-expansions, under its invariant measure, in [57, J.Number Theory, 2017] we studied the optimality of the convergence rate. Finally, in [59, J.Number Theory, 2019], we proved a Gauss-Kuzmin theorem related to the natural extension of the map T_θ. Next, the characteristic properties of the Perron-Frobenius operator on the Banach space of functions of bounded variations allowed us to obtain a more refined estimate of the convergence rate involved.

Chapter 4 is devoted to our study on generalized Rényi CFs done in [36], [37], [61] and [62]. These CFs represent a special class of backward CFs investigated by Gröchenig and Haas in [19, 20]. In [36, Acta Math. Hungar., 2020] we started an approach to the metrical theory of Rényi-type CF expansions via dependence with complete connections and we obtained a version of the Gauss-Kuzmin theorem based on the ergodic behavior of the associated RSCC. In [37, Acta Arith., 2020] we continued our investigation on the asymptotic behavior of the distribution functions of the Rényi-type transformation R_N. In order to prove a Gauss-Kuzmin-Lévy theorem for these expansions, we applied the method of Szüsz [67]. In fact, we obtained more information on the convergence rate for which we gave an explicit expression in terms of Hurwitz zeta functions. By restricting the Perron-Frobenius operator of R_N under its invariant measure to the Banach space of functions which have a continuous derivative, in [61, Period. Math. Hungar., 2020] we obtained the best possible order of convergence. In our very recent paper [62, Period. Math. Hungar., 2022] we proved a two-dimensional Gauss-Kuzmin theorem for the joint distribution function of R_N^n and $s_{N,n}^a$, $n \in \mathbb{N}_+$, $N \geq 2$, $a \in I$, with a very good estimation of the error term.

Chapter 5 presents the investigation of the efficiency of the families of CFs studied in the previous chapters. In addition, a new family of N-CFs recently studied by us in [60, Publ. Math. Debrecen, 2020] is considered. Since there are several CF algorithms, we ask ourselves which of them provides the best approximation of a real number. The representation of a real number by a CF can be viewed as a source of information about the number. The concept of Kolmogorov-Sinai entropy is adequate in the classification of dynamical systems, by distinguished non-isomorphic dynamical systems. Using an extended result of Lochs [39] who compared the efficiency of decimal and RCF expansions, in [38, Mathematics, 2021] we decided about the efficiency of RCFs, Chan's CFs, θ-expansions, N-CFs and Rényi-type CFs. Dajani-Fieldsteel theorem [10] represents an useful tool to compare any two expansions of numbers which are generated by surjective transformations, under certain conditions. Using metric properties of these expansions, a Rohlin's entropy formula [48], under the assumption that Rényi's condition is satisfied, we decided that N-CFs are more efficient than Rényi-type CFs, N-CFs and Rényi-type CFs are more efficient than RCFs, which are more efficient than Chan's CFs. Thus, N-CFs are the most efficient at representing a number in the unit interval.

Chapter 6 is dedicated to presentation of some future plans regarding the professional and scientific career of the author.

Bibliography

[1] Adler, R., Flatto, L., *Geodesic flows, interval maps, and symbolic dynamics*, *Bull. Am. Math. Soc.* **25** (1991) 229–334.

[2] Barnsley, M., Demko, S., Elton, J., Gerinomo, J., *Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities*, Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Statist **24**(3) (1988) 367–394.

[3] Barnsley, M., Elton, J., *A New Class of Markov Processes for Image Encoding*, Adv. in Appl. Probab. **20** (1988) 14–32.

[4] Boyarsky, A., Góra, P., Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension, Birkhäuser, Boston, 1997.

[5] Burton, R., Kraaikamp, C., Schmidt, T., *Natural extensions for the Rosen fractions*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000) 1277–1298.

[6] Chakraborty, P.S., Dasgupta, A., *Invariant measure and a limit theorem for some generalized Gauss maps*, J. Theoret. Probab. **17**(2) (2004) 387–401.

[7] Chakraborty, S., Rao, B.V., *θ-expansions and the generalized Gauss map*, In Athreya, K., Majumdar, M., Puri, M., and Waymire, E. (eds.), "Probability, Statistics, and Their Applications: Papers in Honor of Rabi Bhattacharya", Institute of Mathematical Statistics, Lecture Notes-Monograph Series **41** (2003) 49–64.

[8] Chan, H.-C., *A Gauss-Kuzmin-Lévy theorem for a certain continued fraction*, Int. J. Math. Math. Sci. **20** (2004) 1067–1076.

[9] Chan, H.-C., *The asymptotic growth rate of random Fibonacci type sequences.II.*, The Fibonacci Quarterly **44**(1) (2006) 73–84.

[10] Dajani, K., Fieldsteel, A., *Equipartition of Interval Partitions and an Application to Number Theory*, Proc. Amer. Math. Soc., **129**(12) (2001) 3453–3460.

[11] Dajani, K., Kraaikamp, C., Ergodic Theory of Numbers, The Carus Mathematical Monographs, Washington, 2002.

[12] Dajani, K., Kraaikamp, C., *A Gauss-Kuzmin theorem for optimal continued fractions*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999) 2055–2079.

[13] Dajani, K., Kraaikamp, C., Van der Wekken, N., *Ergodicity of N-continued fraction expansions.* J. Number Theory **133**(9) (2013) 3183–3204.

[14] Davison, J.L., *A series and its associated continued fraction*, Proc. Amer.Math. Soc. **63**(1) (1977) 29–32.

[15] Doeblin, W., *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues*, Compositio Math. **7** (1940) 353–371.

[16] Doeblin, W., Fortet, R., *Sur des chaînes à liaisons complètes*, Bull. Soc. Math. France **65** (1937) 132–148.

[17] Durrett, R., Probability theory: Theory and examples 3rd ed., Thomson Brooks/Cole, 2005.

[18] Galambos, J., *The distribution of the largest coefficient in continued fraction expansions*, Q. J. MATH., **23**(2) (1972), 147–151.

[19] Gröchenig, K., Haas, A., *Backward continued fractions, Hecke groups and invariant measures for transformations of the interval*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996) 1241–1274.

[20] Haas, A., *Invariant measures and natural extensions*, Canad. Math. Bull. **45** (2002) 97–108.

[21] Haas, A., Molnar, D., *Metrical diophantine approximation for continued fraction like maps of the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004) 2851–2870.

[22] Harris, T.E., *On chains of infinite order,* Pacific J. Math. **5** (1955) 707–724.

[23] Iosifescu, M., *Random systems with complete connections with an arbitrary set of states*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **8** (1963) 611–645.

[24] Iosifescu, M., *On the Gauss-Kuzmin-Lévy theorem III*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **42**(1) (1997) 71–88.

[25] Iosifescu, M., Grigorescu, S., Dependence With Complete Connections and its Applications, Cambridge Tracts in Mathematics **96**, 1990, Cambridge Univ.Press, Cambridge. [(2009): second printing slightly corrected].

[26] Iosifescu, M., Kraaikamp, C., Metrical Theory of Continued Fractions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[27] Iosifescu, M., Sebe, G.I., *An exact convergence rate in a Gauss-Kuzmin-Lévy problem for some continued fraction expansion*, in vol. Mathematical Analysis and Applications, 90-109, AIP Conf. Proc. **835**, Amer. Inst. Physics, Melville, New York, 2006.

[28] Iosifescu, M., Sebe, G.I., *On Gauss problem for the Lüroth expansion*, Indag. Math. (N.S.) **24** (2013) 382–390.

[29] Iosifescu, M., Theodorescu, R., Random Processes and Learning, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[30] Karlin, S., *Some random walks arising in learning models. I*, Pacific J. Math. **3**(4) (1953) 725–756.

[31] Keane, M.S., Bedford, T., Series, C. (Eds.), *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces*, Oxford University Press, 1991.

[32] Kolmogorov, A.N. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces, *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)* **119** (1958) 861–864.

[33] Kuzmin, R.O., *On a problem of Gauss*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Ser. A (1928) 375–380. [Russian; French version in *Atti Congr. Internaz.Mat.* (*Bologna*, 1928), Tomo **VI** (1932) 83–89. Zanichelli, Bologna].

[34] Lascu, D., *On a Gauss-Kuzmin-type problem for a family of continued fraction expansions*, J. Number Theory **133**(7) (2013) 2153–2181.

[35] Lascu, D., *Dependence with complete connections and the Gauss-Kuzmin theorem for N-continued fractions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **444**(1) (2016) 610–623.

[36] Lascu, D., Sebe, G. I., *A dependence with complete connections approach to generalized Rényi continued fractions*, Acta Math. Hungar. **160** (2020) 292–313.

[37] Lascu, D., Sebe, G.I., *A Gauss-Kuzmin-Lévy theorem for Rényi-type continued fractions*, Acta Arith. **193** (2020) 283–292.

[38] Lascu, D., Sebe, G.I., *A Lochs-type approach via entropy in comparing the efficiency of different continued fraction algorithms*, Mathematics **9**(3) (2021) 255.

[39] Lochs, V.G., *Vergleich der Genauigkeit von Dezimalbruch und Kettenbruch*, Abh. Math. Sem. Hamburg **27** (1964) 142–144.

[40] Onicescu, O., Mihoc, Gh., *Sur les chaînes de variables statistiques*, Bull. Sci. Math. **59** (1935) 174–192.

[41] Lévy, P., *Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue*, Bull. Soc. Math. France **57** (1929) 178–194.

[42] Ma, L., Nair, R., *Haas Molnar Continued Fractions and Metric Diophantine Approximation*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **299**(1) (2017) 57–177.

[43] Mauldin, R.D., Urbański, M., *The doubling property of conformal measures of infinite iterated function systems*, J. Number Theory **102**(1) (2003) 23–40.

[44] Nakada, H., *Metrical theory for a class of continued fraction transformations and their natural extensions*, Tokyo J. Math. **4** (1981) 399–426.

[45] Norman, E., Markov Processes and Learning Models, Academic Press, New York, 1972.

[46] Pollicott, M., Yuri, M., Dynamical Systems and Ergodic Theory, Cambridge University Press, New York, 1998.

[47] Rényi, A., *Valòs szàmok elöàllitàsàra szölgàlò algoritmusokròl.*, M. T. A. Mat. ès Fiz. Oszt. Kžl. **7** (1957) 265–293.

[48] Rohlin, V. A., *Exact endomorphisms of a Lebesgue space*, Amer. Math. Soc. Transl.II. Ser. **39** (1964) 1–36.

[49] Ruelle, D., *Dynamical zeta functions for piecewise monotone maps of the interval*, American Mathematical Society, 1994.

[50] Ryll-Nardzewski, C., *On the ergodic theorems II (Ergodic theory of continued fractions)*, Studia Math. **12** (1951) 74–79.

[51] Schweiger, F., *Ergodic theory of fibred systems and metric number theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[52] Sebe, G.I., *A two-dimensional Gauss-Kuzmin theorem for singular continued fractions*, Indag. Mathem., N.S., **11** (4) (2000) 593–605.

[53] Sebe, G.I., *On convergence rate in the Gauss-Kuzmin problem for grotesque continued fractions*, Monatsh. Math. **133** (2001) 241–254.

[54] Sebe, G.I., *A Gauss-Kuzmin theorem for the Rosen fractions*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **14** (2) (2002) 667–682.

[55] Sebe, G.I., *A Wirsing-type approach to some continued fraction expansion*, Int. J. Math. Math. Sci. **12** (2005) 1943–1950.

[56] Sebe, G.I., *Convergence rate for a continued fraction expansion related to Fibonacci type sequences*, Tokyo J. Math. **33**(2) (2010) 487–497.

[57] Sebe, G.I., *A near-optimal solution to the Gauss–Kuzmin–Lévy problem for θ-expansions*, J. Number Theory **171** (2017) 43–55.

[58] Sebe, G.I., Lascu, D., *A Gauss-Kuzmin theorem and related questions for θ-expansions*, J. Funct. Spaces **2014** (2014) 12 pages.

[59] Sebe, G.I., Lascu, D., *On convergence rate in the Gauss-Kuzmin problem for θ-expansions*, J. Number Theory **195** (2019) 51–71.

[60] Sebe, G.I., Lascu, D., *A two-dimensional Gauss-Kuzmin theorem for N-continued fraction expansions*, Publ. Math. Debrecen **96**(3-4) (2020) 291–314.

[61] Sebe, G.I., Lascu, D., *Convergence rate for Rényi-type continued fraction expansions*, Period. Math. Hung. **81**(2) (2020) 239-249

[62] Sebe, G.I., Lascu, D., *Two asymptotic distributions related to Rényi-type continued fraction expansions*, Period. Math. Hung. **85**(2) (2022) 380–398

[63] Sebe, G.I., Lascu, D., *Some asymptotic results for the continued fraction expansions with odd partial quotients*, Turk. J. Math. **46**(7) (2022) 3011–3024

[64] Series, C., *The modular surface and continued fractions*, J. Lond. Math. Soc. **2** (1985) 69–80.

[65] Shannon, C. *A mathematical theory of communication.* Bell System Tech.J., **27** (1948) 379–423.

[66] Sinai, Ya.G. *On the notion of entropy of a dynamical system*, Dokl. Russ. Acad. Sci. **124** (1959) 768–771.

[67] Szüsz, P., *Über einen Kusminschen Satz*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** (1961) 447–453.

[68] Viswanath, D. *Random Fibonacci sequences and the number* $1.13198824\ldots$, Math. Comput. **69**(231) (2000) 1131-1155.

[69] Wirsing, E., *On the theorem of Gauss-Kuzmin-Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces*, Acta Arith. **24** (1974) 506–528.