Universitatea POLITEHNICA din Bucureşti

REZUMAT

TEZĂ DE ABILITARE

Metode numerice pentru inegalităţi matematice

Domeniu: Matematică

Subdomeniu: Analiză Numerică

Conf. Dr. Gabriel-Dumitru BERCU
"Dunărea de Jos" Universitatea din Galaţi

Bucureşti, 2023

Rezumat

Această TEZĂ DE ABILITARE se bazează pe articolele mele ştiinţifice publicate şi are următoarele domenii principale de cercetare: teoria aproximării, şiruri generalizate de tip Euler-Macheroni, structuri geometrice generate de funcţii speciale.

Primele două capitole ale acestei teze sunt dedicate teoriei aproximării.

În primul capitol am folosit metoda aproximării Padé pentru rafinarea unor inegalităţi trigonometrice clasice, precum şi ale unor generalizări ale lor. Inegalităţile care conţin funcţii trigonometrice sunt utilizate în multe domenii ale matematicii precum teoria aproximărilor, teoria stabilităţii, ecuaţii diferenţiale, inegalităţi ([Abramowitz, M, Stegun, IA, 1972], [Agarwal, RP, 2000]).

În lucrarea [Mortici, C. Math. Inequal. Appl. 2011], C. Mortici a propus o metodă, numită „abordare naturală", în care a aproximat funcţiile cu polinoamele Taylor asociate. Această metodă s-a dovedit extrem de utilă în demonstrarea şi rafinarea unei largi categorii de inegalităţi trigonometrice. Inspirat de această metodă, în [Bercu, G. J. Math. Inequal. 2017], [Bercu, G. J. Inequal. Appl. 2016], [Bercu, G, Wu, S. J. Nonlinear Sci. Appl. 2016], [Wu, S, Bercu, G. J. Inequal. Appl. 2017 b], am aproximat funcţiile trigonometrice cu funcţiile raţionale obţinute prin metoda Padé. În acest mod am îmbunătăţit unele inegalităţi remarcabile ce conţin funcţii trigonometrice, funcţii trigonometrice inverse, precum şi funcţii trigonometrice hiperbolice.

Au urmat apoi numeroşi cercetători care au folosit metoda Padé în studiul inegalităţilor trigonometrice şi care au citat lucrările noastre [Chen, CP. RACSAM 2021], [Chen, CP. Result. Math. 2018], [Chen, S, Liu, Z. J. Sym. Comput. 2020], [Chen, XD et al. RACSAM 2022], [Elias Zúñiga,A et al. Fractals-Complex Geom. Patterns Scaling Nat. Soc. 2021], [Elias Zúñiga, A, Palacios-Pineda, LM. Fractals-Complex Geom. Patterns Scaling Nat. Soc. 2021], [Malešević, B, Mihailović, B. Appl. Anal. Discrete Math. 2021], [Nenezić, M, Zhu, L. Appl. Anal. Discrete Math. 2018], [Qian, C et al. RACSAM 2022], [Zhu, L. RACSAM 2020 a,b]).

În primul paragraf al capitolului 1 am folosit metoda Padé pentru a îmbunătăţi unele inegalităţi remarcabile ce conţin funcţii trigonometrice, printre care menţionăm: inegali-

tatea Cusa-Huygens, inegalitatea Wilker, inegalitatea Adamović-Mitrinović, inegalitatea Katsuura, inegalitatea Jordan, inegalitatea Kober, inegalitatea Becker-Stark.

Am obţinut aproximări raţionale simple ale funcţiilor implicate în inegalităţile de mai sus, aproximări care pot fi folosite şi în programare.

În al doilea paragraf al capitolului 1 am folosit metoda Padé pentru a rafina variantele inegalităţilor de mai sus care conţin funcţii trigonometrice inverse. În plus, am rafinat inegalităţile Shafer-Fink referitoare la funcţia arctangentă, respectiv la funcţia arcsinus.

În paragraful trei am obţinut aproximări raţionale ale variantelor inegalităţilor de mai sus care conţine funcţii trigonometrice hiperbolice.

În capitolul 2, ne-am îndreptat atenţia asupra studiul funcţiilor $sinc(x)$ şi $tanc(x)$. Funcţia *sinc*, numită şi funcţie eşantion, este o funcţie care apare în multe domenii ale matematicii aplicate: comunicaţii, domeniul spectral, analiză Fourier discretă, funcţiile wavelet de bază.

De asemenea, aproximările liniare $sinc(x) = 1$ şi $tanc(x) = 1$ pentru x în vecinătăţi ale lui 0 sunt foarte importante în aplicaţii.

Capitolul 2 este scris pe baza articolelor publicate [Bercu, G. Appl. Anal. Discrete Math. 2022], [Bercu, G. Symmetry - Basel 2020], [Bercu, G. Math. Inequal. Appl. 2019], [Wu, Y, Bercu, G. RACSAM 2020].

În primul paragraf al capitolului 2 am îmbunătăţit unele inegalităţi clasice care conţin funcţia *sinc*. Ideea principală este că funcţia *sinc* este o funcţie pară, aşadar poate fi aproximată ca o serie trigonometrică ce conţine cosinus. Apoi am considerat diferenţa dintre funcţia *sinc* şi seria trigonometrică cosinus asociată. Este obţinută cea mai bună aproximare în jurul originii prin anularea primilor coeficienţi ai diferenţei anterioare. Am folosit apoi noile aproximări ale funcţiei *sinc* obţinute prin algoritmul nostru pentru a îmbunătăţi câteva inegalităţi clasice: inegalitatea Jordan, inegalitatea Cusa-Huygens, inegalitatea Redheffer.

În paragraful 2 al capitolului 2 am îmbunătăţit câteva inegalităţi trigonometrice, observând că funcţiile implicate sunt funcţii pare şi deci se poate aplica algoritmul pe baza polinoamelor cosinus din primul paragraf.

În al treilea paragraf am găsit noi aproximări pentru funcţiile pare $sinc(x) - 1$ şi $tanc(x) - 1$ folosind metoda polinoamelor cosinus. În acest mod am reuşit să îmbunătăţim inegalitatea Becker-Stark.

În paragraful 2.4 am scris funcţiile implicate în inegalităţile Huygens-Wilker-Lazarović ca polinoame în cosinus hiperbolic. Apoi am considerat dezvoltarea în serie Taylor a diferenţei dintre funcţiile implicate şi polinoamele în cosinus hiperbolic asociate. Pentru a creşte viteza de convergenţă în jurul lui 0, am anulat primii coeficienţi. În acest mod am îmbunătăţit inegalităţile Huygens-Wilker-Lazarović, precum şi variantele lor pentru funcţii trigonometrice hiperbolice. De asemenea, am arătat că valorile obţinute prin metoda seriilor trigonometrice sunt cele mai bune constante. Apoi am exprimat noile inegalităţi obţinute în termeni ai aproximării Taylor pe intervale finite.

Ultima parte a capitolului 2 este dedicată studiului funcţiei eroare erf. Aceasta este o funcţie specială, care este folosită în multe domenii de cercetare: statistică, modele matematice în biologie, matematică fizică, teoria difuziei.

Integrala prin care este definită funcţia eroare nu poate fi calculată, valorile pentru funcţia eroare calculându-se prin aproximări. Studiul funcţiei eroare are două aspecte importante: în primul rând, găsirea marginilor pentru funcţia eroare, iar în al doilea rând, aproximarea funcţiei eroare cu diferite funcţii elementare.

În acest paragraf am folosit metoda aproximării Padé, precum şi metoda seriilor trigonometrice pentru a obţine aproximări mai bune pentru funcţia eroare.

Aproximările raţionale obţinute au îmbunătăţit câteva inegalităţi remarcabile referitoare la funcţia eroare: inegalităţi de tip Neuman, inegalitatea Pólya, inegalităţile Komatsu. De asemenea, am prezentat o aproximare raţională cu o eroare mai mică de 10^{-4} pentru funcţia erf.

În a doua parte a paragrafului 5 am obţinut aproximări pentru funcţia eroare folosind metoda seriilor trigonometrice şi am propus o aproximare prin polinoame sinus cu o eroare mai mică de 10^{-3}.

Capitolul 3 se bazează pe articolele [Wu, S, Bercu, G. J. Inequal. Appl. 2018] şi [Wu, S, Bercu, G. J. Inequal. Appl. 2017] şi este dedicat studiului şirului Euler-Mascheroni şi generalizărilor sale. În primul paragraf am prezentat noi şiruri care generalizează şirul DeTemple şi care au o viteză de convergenţă mai mare. De asemenea, am găsit o nouă reprezentare a constantei Euler-Mascheroni în termeni ai funcţiei Riemann zeta calculată în numere naturale impare.

În al doilea paragraf am găsit un şir nou convergent la constanta Euler-Mascheroni şi care are viteza de convergenţă mai mare, utilizând o metodă de aproximare de tip Padé. Şirul nostru depinde de un parametru real şi are o formă relativ simplă ([Adell, J, Lekuona, A. Math. Comput. 2020]). De asemenea, am prezentat margini inferioare şi superioare pentru diferenţa dintre şirul nostru şi constanta Euler-Mascheroni.

În capitolul 4 am prezentat o legătură semnificativă între geometria diferenţială şi ştiinţele aplicate.

În primul paragraf am obţinut metrici Riemanniene în dimensiunea 1 de tipul $g(x) =$

$\phi(x)f(x)$, unde f este o funcţie specială şi ϕ este o funcţie proprie pentru problema egalităţii dintre metrica iniţială g şi Hessiana funcţiei f calculată în raport cu o conexiune liniară pe $\mathbb{R}$.

În acest mod am determinat metrici generate de funcţii speciale remarcabile ale fizicii matematice: funcţia Bessel, funcţia Hermite, funcţia Legendre, funcţia Laguerre, funcţia *sinc*, funcţia Chebyshev. De asemenea, am obţinut caracteristici geometrice ale unei PDE pe varietăţi doi-dimensionale.

În al doilea paragraf am găsit o clasă de funcţii auto-concordante definite pe varietăţi Riemanniene înzestrate cu metrici de tip diagonal. De asemenea, am rezolvat o problemă în geometria Riemanniană referitoare la existenţa unei metrici generate de o funcţie care este auto-concordantă.

În paragraful trei am introdus o clasă de funcţii auto-concordante care generează o metrică dată. De asemenea, am găsit exemple de funcţii auto-concordante pe o varietate Riemanniană, dar care nu sunt auto-concordante în spaţiul Euclidian.

Keywords: Padé approximant, rational refinement, trigonometric polynomials, Taylor formula, trigonometric inequalities, even functions, DeTemple sequence, Euler-Mascheroni constant, Riemann zeta function, error function, PDE, connection, Riemann metric.
2010 Mathematics Subject Classification: 11Y60; 26D05; 26D15; 33B10; 33B20; 41A21; 41A25; 41A60; 53B21; 57Q55.