UNIVERSITATEA **POLITEHNICA** DIN BUCUREŞTI
ŞCOALA DOCTORALĂ DE ŞTIINŢE APLICATE

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Asupra categoriilor de acoperiri fuzzy şi relaţii de toleranţă

Autor: Neacşu Adrian Gabriel
Conducător ştiinţific: Conf. dr. Mircea Cimpoeaş

Cuvinte cheie: mulţime fuzzy, acoperire fuzzy, acoperire fuzzy normală, acoperire fuzzy non-inclusivă, acoperire fuzzy disjunctă, relaţie fuzzy, relaţie de toleranţă fuzzy torelarance, partiţie fuzzy, categorie, izomorfism

Bucureşti
2023

Contents

Sumar

Mulţimile fuzzy au fost introduse de Lotfi Zadeh [26] în 1965. Ele reprezintă generalizări ale mulţimilor. Afirmaţia că un element aparţine unei mulţimi fuzzy poate fi nu doar falsă sau adevărată, ci orice între acestea. Pentru o introducere în teoria mulţimilor fuzzy, recomandăm [17] şi [18].

Definiţia 2.1.1. *(Vezi de asemenea [7, Definition 1])*

Fie X o mulţime. Spunem că $(X, (A_i)_{i\in I})$ este o acoperire fuzzy*, sau o* acoperire *a lui X, dacă $A_i : X \to [0, 1]$ sunt mulţime fuzzy, astfel încât pentru orice $x \in X$, există $i \in I$ cu $A_i(x) = 1$.*

Noţiunea de acoperire este similară cu cea a unei mulţimi cu atribute, astfel încât fiecare element din mulţime are cel puţin un atribut. Acoperirile fuzzy au o importanţă deosebită în teoria controlului fuzzy dar şi în machine learning. Există o vastă literatură în acest domeniu, din cate cităm [21] şi [8].

Definiţia 2.1.17.*(Vezi de asemenea [1, Definition 2])*

Fie I o mulţime finită de indici. Spunem că $(X, (B_i)_{i\in I})$ este o partiţie fuzzy*, sau, mai simplu, o* partiţie *a lui X, dacă $B_i : X \to [0, 1]$ sunt mulţimi fuzzy pentru care $\sum_{i\in I} B_i(x) = 1$ pentru orice $x \in X$.*

De remarcat că o partiţie fuzzy este similară cu un proces stochastic cu un spaţiu al stărilor finit.

O relaţie (fuzzy) R pe o mulţime X este o submulţime (fuzzy) a lui $X \times X$ ([19], [24]). Dacă relaţia (fuzzy) este reflexivă şi simetrică, atunci ea se numeşte relaţie (fuzzy) de toleranţă. Relaţiile de toleranţă a fost introduse de Zeeman în [27] şi studiate ulterior în numeroase lucrări ca [3], [4], [6], [9], [22] şi [23].

Scopul acestei teze este acela de a folosi teoria categoriilor ([2], [11], [25]) în studiul acoperirilor fuzzy, relaţiilor de toleranţă fuzzy şi partiţiilor fuzzy ([3], [7]) şi de a stabili relaţii între acestea.

Teza este structurată astfel. În primul capitul sunt reamintite definiţiile şi rezultatele de bază legate de mulţimi fuzzy, relaţii fuzzy, categorii şi functori. În Sectiunea 2.1 prezentăm o introducere în teoria acoperirilor şi partiţiilor fuzzy. În Secţiunea 2.2 introducem noţiunile de permutare a unei acoperiri şi de incluziune de acoperiri şi demonstrăm câteva rezultate despre ele.

Definiţia 2.2.1. *Spunem că acoperirea* $\left(X,(B_j)_{j\in J}\right)$ *este o* permutare *a acoperirii* $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)$ *şi scriem* $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right) \simeq \left(X,(B_j)_{j\in J}\right)$ *dacă există o funcţie bijectivă* $\rho : I \to J$ *astfel încât:*

$$A_i(x) = B_{\rho(i)}(x) \text{ for all } x \in X \text{ and } i \in I.$$

De observat că $\simeq$ este o relaţie de echivalenţă; vezi Propoziţia 2.2.2.

Definiţia 2.2.4. *Fie* $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)$ *şi* $\left(X,(B_j)_{j\in J}\right)$ *două acoperiri. Spunem că acoperirea* $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)$ *este* inclusă *în acoperirea* $\left(X,(B_j)_{j\in J}\right)$ *şi scriem*

$$\left(X,(A_i)_{i\in I}\right) \subseteq \left(X,(B_j)_{j\in J}\right),$$

dacă există o funcţie $\rho : I \to J$ *astfel încât pentru toţi* $x \in X$ *şi* $i \in I$ *să avem:*

$$A_i(x) \leq B_{\rho(i)}(x).$$

ρ *se numeşte* funcţie de incluziune *asociată incluziunii de acoperiri.*

În Propoziţia 2.2.6 demonstrăm că relaţia de incluziune este reflexivă şi tranzitivă.

În Secţiunea 2.3, introducem şi studiem noi tipuri de acoperiri fuzzy: acoperiri normale, acoperiri non-inclusive şi acoperiri disjuncte.

Definiţia 2.3.1. *O acoperire* normală $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)$ *este o acoperire cu proprietatea că pentru toţi* $i \in I$*, există* $x \in X$ *astfel încât* $A_i(x) = 1$.

Definiţia 2.3.6. *Spunem că* $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)$ *este o acoperire* non-inclusivă *dacă pentru orice* $i, j \in I$*:*

$$A_i(x) \leq A_j(x), \text{pentru toţi } x \in X \text{ dacă şi numai dacă } i = j.$$

O acoperire care nu este non-inclusivă se numeşte inclusivă.

De observat că o partiţie este o acoperire non-inclusivă. În Teorema 2.3.9 arătăm că relaţia de incluziune de acoperiri este o relaţie de ordine pe mulţimea acoperirilor non-inclusive, modulo relaţia de echivalenţă de acoperiri $\simeq$.

Definiţia 2.3.10. *Spunem că* $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)$ *este o acoperire* disjunctă *dacă pentru orice* $x \in X$ *şi* $i \neq j \in I$ *avem:*

$$A_i(x) \wedge A_j(x) < 1.$$

Teorema 2.3.14. *Fie* $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)$ *o acoperire. Următoarele sunt echivalente:*

(1) $\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)$ *este o acoperire normală disjunctă.*

(2) $\left(X,\left(A_i^{\downarrow}\right)_{i\in I}\right)$ *este o partiţie.*

În Secţiunea 2.4 introducem acoperirile de proiecţie şi stabilim proprietăţile lor de bază.

Definiţia 2.4.1. *O* acoperire de proieţie *a lui* $X \times Y$ *este o pereche* $\left(X \times Y, (A_i)_{i\in I}\right)$ *astfel încât* $\Big(X, (A_i(-,y))_{(y,i)\in Y\times I}\Big)$ *şi* $\Big(Y, (A_i(x,-))_{(x,i)\in X\times I}\Big)$ *sunt acoperiri.*

Unei acoperiri de proiecţie $\left(X \times Y, (A_i)_{i\in I}\right)$, îi putem asocia o pereche de funcţii: $f : X \to Y$ şi $g : Y \to X$, astfel că, pentru orice $x \in X$ există $i \in I$ cu $A_i(x, f(x)) = 1$ şi pentru orice $y \in Y$ există $j \in J$ cu $B_j(g(y), y) = 1$. f şi g se numesc *subfuncţii.* În general, ele nu sunt unice.

În Teorema 2.4.12. arătăm că dacă f şi g sunt unice, atunci f şi g sunt bijective şi $f^{-1} = g$.

În Capitolul 3, introducem şi studiem mai multe categorii de acoperi fuzzy, relaţii fuzzy şi partitţii fuzzy. În Secţiunea 3.1 introducem **Covering**, categoria acoperirilor fuzzy, astfel:

Definiţia 3.1.1. *Fie* **Covering** *categoria care are:*

(1) $\mathrm{Ob}(\mathbf{Covering}) = \left\{\left(X, (A_i)_{i\in I}\right) \mid \left(X, (A_i)_{i\in I}\right) \textit{ is a fuzzy covering}\right\}$.

(2) $\mathrm{Hom}\Big(\left(X, (A_i)_{i\in I}\right), \Big(Y, (B_j)_{j\in J}\Big)\Big) = \{(f,\rho) | f : X \to Y, \rho : I \to J,$ $A_i(x) \le B_{\rho(i)}(f(x)),\ \textit{for all } x \in X, i \in I\}$.

(3) $(g,\theta)\circ(f,\rho) = (g\circ f, \theta\circ\rho) \in \mathrm{Hom}\left(\left(X, (A_i)_{i\in I}\right), \left(Z, (C_k)_{k\in K}\right)\right)$ *pentru orice* $(f,\rho) \in \mathrm{Hom}\Big(\left(X, (A_i)_{i\in I}\right), \Big(Y, (B_j)_{j\in J}\Big)\Big)$, $(g,\theta) \in \mathrm{Hom}\Big(\Big(Y, (B_j)_{j\in J}\Big), \left(Z, (C_k)_{k\in K}\right)\Big)$.

(4) $\mathrm{id}_{\left(X,(A_i)_{i\in I}\right)} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_I)$, *pentru orice* $\left(X, (A_i)_{i\in I}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Covering})$.

Rezultatul principal din această secţiune este o teoremă în care determinăm limitele şi colimitele acestei categorii. Mai precis: obiectul iniţial, obiectul terminal, produsul, coprodusul, egalizatorul, coegalizatorul, pullback-ul, pushout-ul şi exponenţiala.

În Secţiunea 3.2 introducem două categorii de partiţii fuzzy, **Coverage** şi **Partition**, care au aceleaşi obiecte dar morfisme diferite şi demonstrăm următoarea teoremă:

Teorema 3.2.4. *Categoria* **Coverage** *este izomorfă cu* $\mathbf{f-Covering}$*, care este subcategoria plină a lui* **Covering** *consistând în acele acoperiri cu un număr finit de mulţimi fuzzy.*

În Secţiunea 3.3, introducem şi studiem $\mathbf{n-Covering}$, categoria acoperirilor normale fuzzy (acoperiri cu mulţimi fuzzy normale), şi demonstrăm următorul rezultat:

Teorema 3.3.4. *Fie* $\mathfrak{I} : \mathbf{n-Covering} \to \mathbf{n-Covering}$ *functorul definit prin:*

(a) Pe obiecte, $\mathfrak{I}\left(\left(X, (A_i)_{i\in I}\right)\right) = \left(I, (B_x)_{x\in X}\right)$*, where* $B_x(i) = A_i(x)$*,* $(\forall) x \in X$*,* $i \in I$.

(b) Pe morfisme, $\mathfrak{I}((f,\rho)) = (\rho, f)$.

Atunci $\mathfrak{I}$ *este un functor de involuţie, i.e.* $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{I} = 1_{\mathbf{n-Covering}}$.

În Secţiunea 3.4, introducem şi studiem categoria relaţiilor de toleranţă fuzzy:

Definition 3.4.1. *Fie* **Tol** *categoria care are:*

(1) $\mathrm{Ob}(\mathbf{Tol}) = \{(X,T) \ : \ T : X \times X \to [0,1]$ *e o relaţie de toleranţă fuzzy*$\}$.

(2) $\mathrm{Hom}\left((X,T),(Y,S)\right) = \{f : X \to Y | T(x,y) \leq S\left(f(x), f(y)\right), (\forall)x, y \in X\}$.

(3) Dacă $f : (X,T) \to (Y,S)$ *şi* $g : (Y,S) \to (Z,Q)$, *atunci compunerea lor este* $g \circ f : (X,T) \to (Z,Q)$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(4) $\mathrm{id}_{(X,T)} = \mathrm{id}_X$, *pentru orice* $(X,T) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Tol})$.

La fel ca în cazul categoriei **Covering**, determinăm limite şi colimite în **Tol**, i.e. obiectul iniţial, obiectul terminal, produsul, coprodusul, egalizatorul, coegalizatorul, pullback-ul, pushout-ul şi exponenţiala. Mai mult, arătăm că există un izomorfism între categoriile **Tol** şi $\mathbf{t-Covering}$, categoria acoperirilor de toleranţă, care este o subcategorie plină în **Covering**.

În Capitolul 4, folosind metode geometrice, construim câteva izomorfisme între diverse subcategorii ale lui **Covering** şi **Partition**. Ideea centrală este aceea de a interpreta o acoperire fuzzy a unei mulţimi cu n mulţime fuzzy, ca fiind o aplicaţie care ia valori pe frontiera unui cub n-dimensional, în timp ce o partiţie fuzzy poate fi interpretată ca o aplicaţie care ia valori într-un $(n-1)$-simplex.

Definiţia 4.1.2 *O acoperire* $(X,(A_i)_{i\in[n]})$ *a lui* X *se numeşte* acoperire bună *dacă satisface condiţia:* $\sum_{i\in[n]} A_i(x) \leq n \cdot A_i(x) + 1$, *pentru orice* $i \in [n]$ *şi* $x \in X$.

Definim $\mathbf{g-Covering}$ *ca fiind subcategoria plină a lui* **Covering**, *ale cărei obiecte sunt acoperirile bune.*

Teorema 4.1.3 *Fie* $(B_i)_{i\in[n]}$ *o partiţie fuzzy a lui* X. *Pentru* $n = 1$, *definim* $A_1 := B_1$. *Pentru* $n \geq 2$, *definim* $(A_1(x), \ldots, A_n(x)) := \Phi(B_1(x), \ldots, B_n(x))$, *pentru toţi* $x \in X$, *unde* Φ *este definit mai jos:*

Atunci $(X,(A_i)_{i\in[n]})$ *este o acoperire bună a lui* X. *Mai mult, există un izomorfism de categorii, notat* $\Phi : \mathbf{Partition} \to \mathbf{g-Covering}$, *definit prin:*

(1) Pe obiecte, $\Phi((X,(B_i)_{i\in[n]})) := (X,(A_i)_{i\in[n]})$, *unde*

$$A_i(x) = B_i(x) + 1 - \bigvee_{i\in[n]} B_i(x), \text{ pentru toţi } i \in [n], x \in X.$$

(2) Pe morfisme, $\Phi((\rho, f)) := (\rho, f)$.

Inversul lui Φ *este* $\Phi^{-1} : \mathbf{g-Covering} \to \mathbf{Partition}$ *şi e definit:*

(1) Pe obiecte, $\Phi^{-1}((X,(A_i)_{i\in[n]})) := (X,(B_i)_{i\in[n]})$*, unde*

$$B_i(x) = A_i(x) - \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} A_i(x) + \frac{1}{n},\ \textit{pentru toţi } i \in [n], x \in X.$$

(2) Pe morfisme, $\Phi((\rho, f)) := (\rho, f)$.

În Secţiunea 4.2, stabilim un izomorfism între **Covering**$[n]$, categoria acoperirilor fuzzy cu n mulţimi fuzzy, şi o subcategorie a lui **Partition**, ale cărei obiecte sunt partiţii cu n mulţimi ce satisfac anumite condiţii tehnice.

Fie $\mathcal{P}$ acoperirea convexă a mulţimii de puncte:

$$\left\{\left(\frac{1-s}{n}+\alpha_1,\ldots,\frac{1-s}{n}+\alpha_n\right)\ :\ \alpha_i \in \{0,1\},\ s=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\right\}$$

Considerăm **Partition**$[n]_{\mathcal{P}P}$, subcategoria plină a lui **Partition**$[n]$, ale cărei obiecte sunt $(X,(B_1,\ldots,B_n))$ cu $(B_1(x),\ldots,B_n(x)) \in \mathcal{P}$ pentru orice $x \in X$.

Definiţia 4.2.10. *Definim un functor* $\mathbf{F[n]}$: **Covering**$[n] \to$ **Partition**$[n]_{\overline{\mathcal{P}}}$*, astfel:*

(1) Pe obiecte: $\mathbf{F[n]}((X,(A_i)_{i\in[n]})) := (X,(B_i)_{i\in[n]})$*, unde*

$$B_i(x) = \frac{1}{n-1}A_i(x) - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i\in[n]} A_i(x)\right) + \frac{1}{n}\ \textit{pentru toţi } i \in [n], x \in X.$$

(2) Pe morfisme: $\mathbf{F[n]}((f,\rho)) := (f,\rho)$.

Definim de asemenea functorul $\mathbf{G[n]}$: **Partition**$[n]_{\overline{\mathcal{P}}} \to$ **Covering**$[n]$*, astfel:*

(1) Pe obiecte: $\mathbf{G[n]}((X,(B_i)_{i\in[n]})) := (X,(A_i)_{i\in[n]})$*, unde*

$$A_i(x) = (n-1)(B_i(x) - \bigvee_{i\in[n]} B_i(x)) + 1\ \textit{pentru toţi } i \in [n], x \in X.$$

(2) Pe morfisme: $\mathbf{G[n]}((f,\rho)) := (f,\rho)$.

Teorema 4.2.11. *Cu notaţiile anterioare, functorii* $\mathbf{F[n]}$ *şi* $\mathbf{G[n]}$ *sunt bine definiţi şi fully faithful. Mai mult, ei induc un izomorfism de categorii între* **Covering**$[n]$ *şi* **Partition**$[n]_{\overline{\mathcal{P}}}$.

Cazurile $n = 2$ şi $n = 3$ sunt prezentate detaliat în Secţiunea 4.3, respectiv Secţiunea 4.4.

Concluzii

Teza introduce o nouă abordare, folosind teoria categoriilor, în studiul acoperirilor şi partiţiilor fuzzy, deschizând noi direcţii de cercetare în acest domeniu. Contribuţiile principale ale tezei sunt legate de introducerea şi studiul mai multor categorii de acoperiri fuzzy, relaţii fuzzy de toleranţă şi partiţii fuzii, precum şi a relaţiilor dintre acestea. Rezultatele au fost publicate în patru articole ISI ([14], [15], [5] şi [16]).

Mulţumiri

Autorul rămâne îndatorat coordonatorilor săi, Prof. dr. Paul Flondor şi Conf. dr. Mircea Cimpoeaş pentru ajutorul acordat în conceperea şi scrierea acestei teze.

De asemenea, autorul ţine să mulţumească familiei sale pentru toată susţinerea acordată.

Bibliography

[1] B. Baets, R. Mesiar, *$\mathcal{T}$-partitions*, Fuzzy Sets and Systems **97** (1998), 211–223.

[2] M. Barr, C. Wells, *Category Theory for Computing Science*, Prentice Hall, 1998.

[3] W. Bartol, J. Miro, K. Piro, F. Rossello, *On the coverings by tolerance classes*, Information Sciences, **166(1-4)** (2004), 193–211.

[4] R. Belohlávek, T. Funikova, *Similarity and Fuzzy Tolerance Spaces*, J. Logic Computat., **Vol. 14, No. 6** (2004), 827–855.

[5] M. Cimpoeaş, A. Neacşu, *Geometrical isomorphisms between categories of fuzzy coverings and fuzzy partitions*, Fuzzy Sets and Systems **461**, Paper No. 108493 (2023), 21 pp.

[6] I. Chajda, J. Niederle, Zelinka B., *On existence conditions for compatible tolerances*, Czechoslovak Mathematical Journal, **26(2)** (1976), 304–314.

[7] C. Cornelis C., L. D'eer, L. Godo, *Fuzzy neighborhood operators based on fuzzy coverings*, Fuzzy Sets and Systems, **312(1)** (2017), 17–35.

[8] C. Cornelis, L. D'eer, *A comprehensive study of fuzzy covering-based rough set models: definitions, properties and interrelationships*, Fuzzy Sets and Systems **336** (2018), 1–26.

[9] M. Das, M. K. Chakraborty, T. K. Ghoshal, *Fuzzy tolerance relation, fuzzy tolerance space and basis*, Fuzzy Sets and Systems, **97(3)** (1998), 361–369.

[10] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, 1962.

[11] M. Grandis, *Singularities and regular paths (An elementary introduction to smooth homotopy)*, Cahiers de topologie et géométrié différentielle catégoriques **52(1)** (2011), 45–76.

[12] T. R. Madurell, S.V. Ovchinnikov, *On fuzzy binary relations*, Stochastica **7(3)** (1983), 229-242.

[13] D. Hug, W. Weil, *Lectures on convex geometry*, Springer Nature Switzerland AG, 2020.

[14] A. Neacşu, *On the category of fuzzy covering and related topics*, U.P.B. Sci. Bull. Series A, **Vol. 83, Iss. 2** (2021), 203–214.

[15] A. Neacşu, *On the category of fuzzy tolerance relations and related topics*, U.P.B. Sci. Bull. Series A, **Vol. 84, Iss. 4** (2022), 203–214.

[16] A. Neacşu, *Several types of fuzzy coverings*, U.P.B. Sci. Bull. Series A, **Vol. 85, Iss. 3** (2023), 12pp.

[17] C. V. Negoiţă, D. A. Rălescu, *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Springer Basel AG, 1975.

[18] H. T. Nguyen , N. R. Prasad, C. L. Walker, E. A. Walker, *A First Course in Fuzzy and Neural Control*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[19] S. V. Ovchinnikov, T. R. Madurell, *On fuzzy binary relations*, Stochastica, **7(3)** (1983), 229–242.

[20] E. H. Ruspini, *A new approach to clustering*, Information and Control **15** (1969), 22-32.

[21] C.W. de Silva, *Inteligent Control: Fuzzy Logic Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[22] Ju. A. Schreider, *Equality, Resemblance and Order*, Mir Publishers, 1975.

[23] Ju. A. Schreider, *Spaces of tolerance*, J. Cybernet. **1, no. 2** (1971), 115–122.

[24] H. Thiele, *On isomorphisms between the lattice of tolerance relations and lattices of clusterings*, Proceedings of 26th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL'96), IEEE (1996), 198–202.

[25] M. Winter, *Goguen Categories. A Categorical Approach to L-fuzzy Relations*, Springer, 2007.

[26] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control **8** (1965), 338–353.

[27] E. Zeeman, *The topology of the brain and visual perception*, M.K. Fort Jr. (Ed.), University of Georgia Institute Conference Proceedings, Published, Topology of 3-Manifolds and Related Topics, Prentice-Hall, Inc. (1962), pp. 240–256.