



**MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII**

**Universitatea Națională de Știință și Tehnologie**

**POLITEHNICA BUCUREȘTI**

**Școala Doctorală de Ingineria Sistemelor Biotehnice**

**Ing. Andrei VASILE**

# **REZUMAT TEZĂ DE DOCTORAT**

**Conducător științific:**

**Prof. Univ. Habil. Dr. Ing. Mihai BUGARU (UNSTPB)**

**2023**

**UNIVERSITATEA NAȚIONALĂ DE ȘTIINȚĂ ȘI TEHNOLOGIE  
POLITEHNICA BUCUREȘTI  
ȘCOALA DOCTORALĂ DE INGINERIA SISTEMELOR BIOTEHNICE**

**REZUMAT TEZĂ DE DOCTORAT**

**STUDIUL COMPORTAMENTULUI DINAMIC AL ARBORILOR  
PLANETARI PENTRU AUTOVEHICULE RUTIERE**

**Conducător științific:**

**Prof. Univ. Habil. Dr. Ing. Mihai BUGARU**

**Doctorand:**

**Ing. Andrei VASILE**

**BUCUREȘTI**

**2023**



## Cuprins

<b>Capitolul 1. Stadiul actual al cercetărilor teoretice privind comportamentul dinamic al mecanismelor planetare pentru autovehicule rutiere.....</b>	<b>4</b>
<b>Capitolul 2. Neuniformitatea izometrică a arborilor planetari.....</b>	<b>7</b>
<b>Capitolul 3. Modele de vibrații forțate de torsiune ale arborelui planetar.....</b>	<b>17</b>
<b>Capitolul 4. Modele de vibrații forțate de încovoiere ale arborelui planetar.....</b>	<b>37</b>
<b>Capitolul 5. Comportamentul haotic al arborilor planetari în cazul vibrațiilor forțate de încovoiere.....</b>	<b>55</b>
<b>Capitolul 6. Concluzii generale. Contribuțiile originale aduse temei. Perspective generale pentru dezvoltarea cercetărilor în domeniu.....</b>	<b>67</b>
6.1 Concluzii generale.....	67
6.2 Contribuțiile originale aduse temei.....	68
6.3 Perspective pentru cercetări viitoare.....	69
<b>Bibliografie.....</b>	<b>70</b>

## Capitolul 1. Stadiul actual al cercetărilor teoretice privind comportamentul dinamic al arborilor planetari pentru autovehiculele rutiere

Primul Capitol al acestei teze realizează un studiu al stadiului actual al cercetărilor teoretice privind comportamentul dinamic al arborilor planetari pentru autovehiculele rutiere utilizând sursele bibliografice [B.G.1- B.G.16], [B.C.1-B.C.14], abordând următoarele aspecte:

1. definirea conceptului de arbore homocinetic utilizând teoria articulațiilor de viteză constantă (CVJ-Constant Velocity Joints),
2. cinematica articulațiilor polipode ale arborilor planetari pentru autovehicule rutiere,
3. determinarea cuplului mecanic al arborelui planetar pentru autovehicule rutiere.

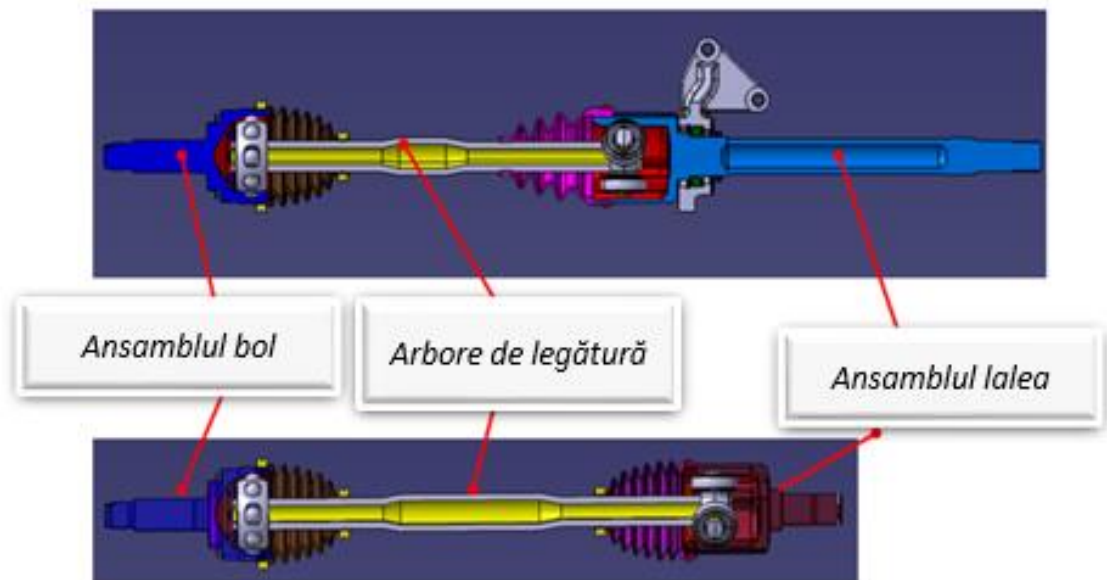


Figura 1.1 Exemplu detaliat de arbore planetar pentru autovehicule rutiere [B.C.1.1].

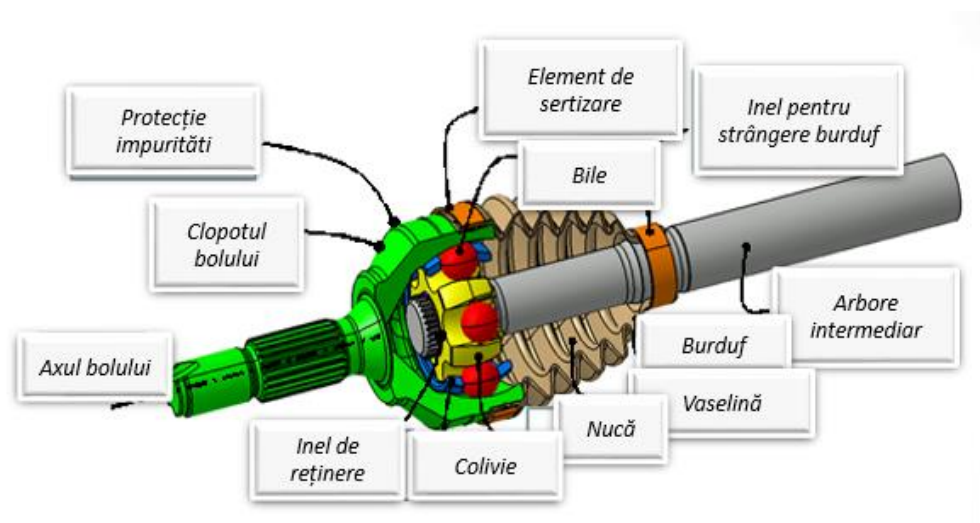


Figura 1.2 Exemplul detaliat al ansamblului bol al arborelui planetar [B.C.1.1].

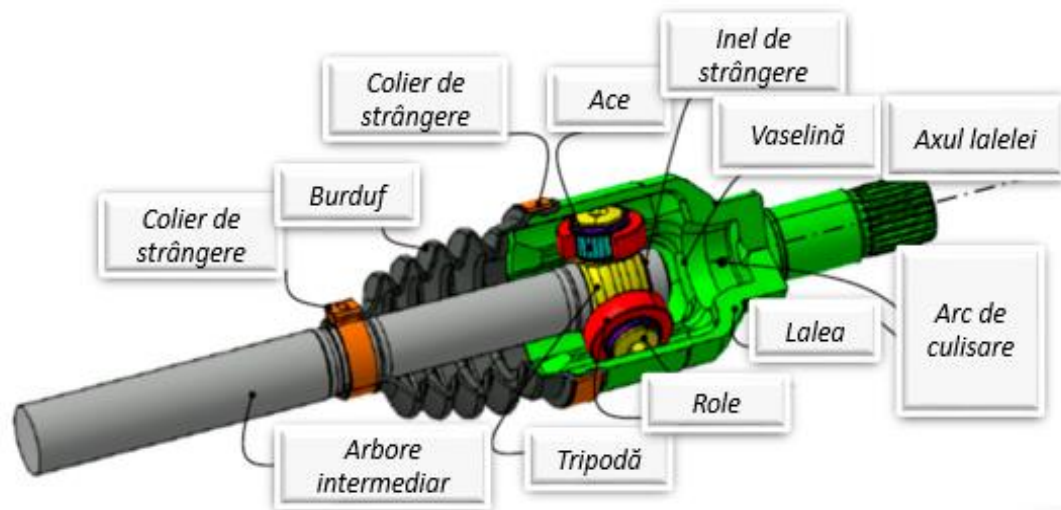


Figura 1.3 Exemplul detaliat al ansamblului lalea al arborelui planetar [B.C.1.1].

Teza de doctorat este structurată pe parcursul a 6 capitole după cum urmează:

- Capitolul 1. Stadiul actual al cercetărilor teoretice privind comportamentul dinamic al mecanismelor planetare pentru autovehicule rutiere;
- Capitolul 2. Neuniformitatea izometrică a arborilor planetari;
- Capitolul 3. Modele de vibrații forțate de torsiune ale arborelui planetar;
- Capitolul 4. Modele de vibrații forțate de încovoiere ale arborelui planetar;
- Capitolul 5. Comportamentul haotic al arborilor planetari în cazul vibrațiilor forțate de încovoiere;
- Capitolul 6. Concluzii generale. Contribuțiile originale aduse temei. Perspective generale pentru dezvoltarea cercetărilor în domeniu;

Capitolul 2 prezintă o analiză a CVJ (constant velocity joint) a arborilor planetari pentru autovehicule rutiere din punct de vedere al neuniformității izometriei geometrice și cinematice. În industria auto, se consideră că arborii planetari pentru autovehicule rutiere au viteză constantă prin articulațiile sale: articulații tripode libere și articulații sferice fixe, ceea ce a fost dovedit prin metoda indirectă a lui Mtnzer și metoda directă a lui Orain pentru tripodă comună.

Scopul capitolului 3 este acela de a proiecta un model consistent fizic pentru vibrațiile forțate de torsiune ale arborilor planetari pentru autovehicule rutiere care să țină cont de aspecte ale următoarelor fenomene:

- excitația datorată transmiterii motorului cu ardere prin cutia de viteze,
- excitația datorată geometriei drumului,
- quasi izometria arborelui planetar al autovehiculului,
- efectul de neuniformitate a momentului de inerție față de axa longitudinală a articulației lalea-tripodă și a articulației bol-colivie-cursă interioară,

- rigiditatea la torsiune,
- amortizarea la torsiune a fiecărei articulații.

În capitolul 4 este prezentată o tehnică de perturbare, și anume metoda asimptotică (AM)<sup>1</sup>[B.C.4.1], pentru a investiga rezonanța parametrică principală pentru vibrațiile forțate de încovoiere-forfecare ale unui arbore planetar pentru autovehicule rutiere, metoda asimptotică fiind un instrument eficace pentru investigarea vibrațiilor induse prin șocuri (excitații impulsive) așa cum a menționat Webber în literatură [B.C.4.2]. Pentru a investiga o astfel de regiune de rezonanță, a fost proiectat un PCM<sup>2</sup> (model fizic consistent) al vibrațiilor de încovoiere pentru un arbore planetar, conceput pentru SUV-uri grele, induse de excitațiile impulsive ale drumului, ținând cont de următoarele aspecte ale fenomenului:

- o articulațiile arborelui planetar pentru autovehicule rutiere sunt quasi-izometrice pentru viteza unghiulară[B.G.1], chiar și în general este considerată ca CVJ (Constant Velocity Joint).
- o efectul neuniformității pentru momentele de inerție geometrice axiale și momentele de inerție masice axiale ale articulațiilor care variază în funcție de unghiul de răsucire al fiecărui element al arborelui planetar și de efectul rigidității la încovoiere și la forfecare, precum și de amortizarea la încovoiere și forfecare pentru fiecare îmbinare a arborelui de antrenare.

Scopul capitolului 5 este de a confirma manifestarea haotică care constă în utilizarea portretelor fazelor într-o regiune specifică de rezonanță și anume regiunea parametrică principală. Pentru aceeași regiune a fost aplicată Metoda Exponenților Maximi Lyapunov (MLEM)<sup>3</sup> a fost cuplată cu criteriul de contracție pentru suma exponenților Lyapunov care certifică haosul. În plus, a fost aplicată secțiunea Poincaré ca metodă calitativă de reconfirmare a manifestării haosului. Astfel, a fost creat un instrument analitic pentru a investiga vibrațiile haotice de încovoiere forțată pentru condiții specifice în zona rezonanței parametrică principale (PPRA)<sup>4</sup>.

Capitolul 6 prezintă concluziile finale, originalitatea și direcții viitoare de cercetare.

---

<sup>1</sup> AM – Metoda asimptotică

<sup>2</sup> PCM - Model fizic consistent

<sup>3</sup>

MLEM - Maximum Lyapunov Exponents Method

<sup>4</sup> PPRA - Rezonanță parametrică principală

## Capitolul 2. Neuniformitatea izometrică a arborilor planetari

Acest capitol prezintă o analiză a CVJ (constant velocity joint) a arborilor planetari pentru autovehicule rutiere din punct de vedere al neuniformității proprietăților izometrice. Pentru o mai bună înțelegere, să privim în interiorul componentelor unui astfel de mecanism, uitându-ne la Figura 2.2, care constă din:

- a) articulația bol-bile fixată asamblată de roata mașinii;
- b) axa arborelui intermediar;
- c) îmbinarea lalea - trepied care permite deplasarea axială a tripodei în lalea și culisarea în cutia de viteze.

Primii cercetători care au considerat că este special acest fenomen pentru arbori planetari sunt Mazzei și Scott care au îmbunătățit comportamentul dinamic parametric neliniar al articulațiilor universale în [B.G.12].

Ceea ce este foarte ciudat pentru această lucrare de cercetare este că conține doar două referințe: dintre care una este o auto-citare în același domeniu al stabilității dinamice a arborilor antrenați printr-un cardan universal.

Dovezile experimentale privind neuniformitatea arborelui planetar este prezentată și evidențiată de Browne și Palazzolo în lucrare [B.G.13]. Dar cea mai importantă cercetare experimentală asupra neuniformității izometriei geometrice și cinematice a arborilor planetari a fost efectuată de Steinwede în timpul tezei sale de doctorat [B.G.5] (pp. 68–97); astfel, după 45 de ani, s-a dovedit în sfârșit prin date experimentale că Dudița și Diaconescu au avut dreptate, că arborii de planetari (CVJ)(AH) sunt quasi-homocinetici, iar toate brevetele proiectate și diagramele de flux de proiectare utilizate în industria auto cu privire la arborii planetari (CVJ)(AH) trebuie modificate și corectate așa cum s-a menționat deja în [B.G.5] (p.G78). În plus, Feng, Rakheja și Shangguan în [B.G.15] au tratat optimizarea forței axiale generate a unui sistem de arbore planetar cu un interval de incertitudine fără a lua în considerare izometria (CVJ)(AH) -ului pentru arborele planetar, care nu mai este izometrică, deoarece acest aspect a fost certificat prin experimente folosind metoda vârfulor pentru analiza variației legăturilor superioare și inferioare (ULBs) a parametrilor. Este clar acum că neuniformitatea izometriei geometrice și cinematice a arborilor planetari reprezintă punctul de plecare al tuturor cercetărilor referitoare la proiectarea, analiza și investigarea dinamică a comportamentului arborilor planetari auto. Această lucrare evidențiază această neuniformitate din izometria geometriei și cinematicii pentru arborii planetari auto (CVJ)(AH).



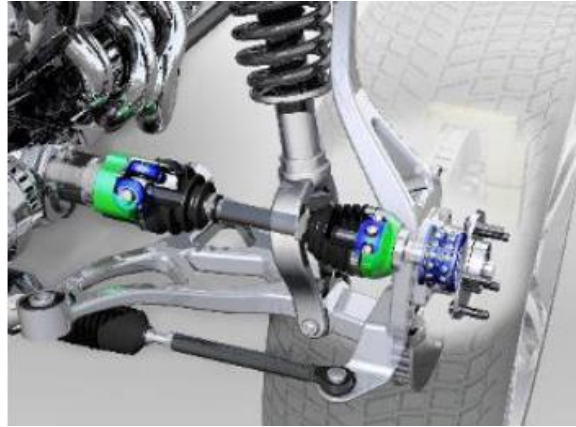


Fig. 2.1 Arbore planetar pentru autovehicule rutiere [B.G.18]

Pentru o mai bună înțelegere, în figura 2.2 remarcăm detaliile acestui mecanism.

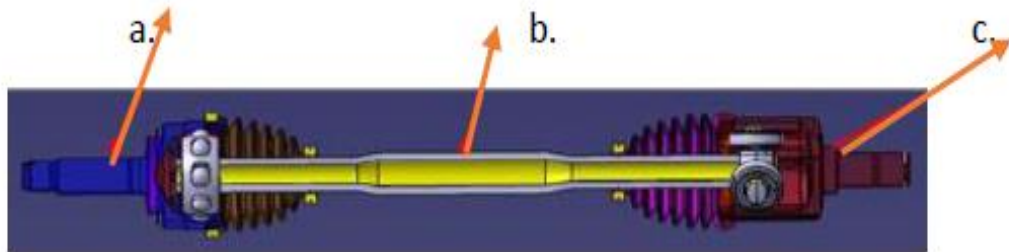


Fig. 2.2 Arbore planetar pentru autovehicule rutiere în detaliu general [B.G.18]

Primul care a introdus conceptul de articulație cu viteză constantă a fost Metzner, în 1967, menționat de literatura [B.G.7] ca și creator al primei metode indirecte (FIM). El a demonstrat viteza constantă pentru articulațiile speciale Hooke [B.G.7], bazat pe ideea că generatoarele geometrice ale unei articulații Hooke cu viteză constantă trebuie să fie imagini în oglindă în spațiu.

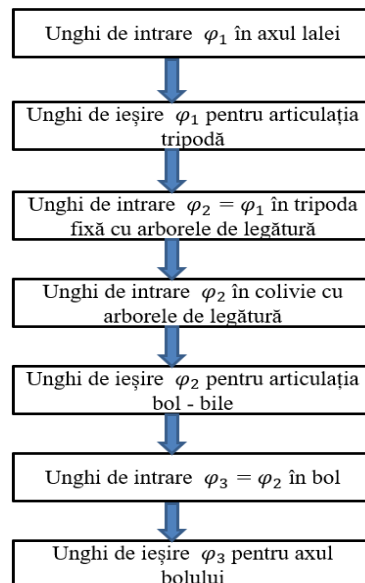


Fig. 2.3 Organigrama unui arbore planetar CVJ [B.G.18].

În figura 2.4, este prezentat în detaliu o tripodă care constă din trei cilindri egal înclinați față de arborele intermediar al arborelui planetar cu unghiurile fixe  $\psi_i$ , date de relația:

$$\psi_i = \frac{2\pi(i-1)}{\delta}, i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$



Fig. 2.4. Articulație lălea - tripodă [B.G.18]

Articulațiile tripode respectă condiția generală care conferă o viteză constantă.

O tripodă, pe care se intersectează axele tuturor pivoților ce se află într-un plan perpendicular pe arborele de intrare,

- element tripod format din 3 elemente echidistante unghiular
- trei role sferice, care fac ca una dintre axele tripodei să se intersecteze cu una dintre axele pistelor.

În figura 2.5 este prezentată reprezentarea schematică a unui arbore planetar în trei axe ale coordonatelor  $X_1Y_1Z_1$  atașat la lălea,  $X_2Y_2Z_2$  atașat la arborele intermediar și  $X_3Y_3Z_3$  atașat la bol, având următoarele mișcări rigide:

- rotație cu unghiul  $\varphi_1$  al lălelei față de  $X_1$ ,  $\varphi_1 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- rotație cu unghiul  $\varphi_2$  al arborelui intermediar față de  $X_2$ ,  $\varphi_2 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- rotație cu unghiul  $\varphi_3$  al bolului față de  $X_3$ ,  $\varphi_3 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- rotația relativă a axului longitudinal al arborelui intermediar (dată de direcția axului  $X_2$ ) față de direcția longitudinală a lălelei (dată de direcția axului  $X_1$ ), cu  $\beta_1$  (unghiul spațial dintre axele  $X_1$  și  $X_2$ ) față de axul  $Z_1$ ,  $\beta_1$  fiind unghiul dintre direcția lălelei și direcția longitudinală a arborelui intermediar,  $\beta_1 = 0^\circ \dots 15^\circ$ ;
- rotația relativă a axului longitudinal al bolului (dată de direcția axului  $X_3$ ) la direcția longitudinală a arborelui intermediar (dată de direcția axului  $X_2$ ), cu  $\beta_2$  (unghiul spațial dintre axele  $X_2$  și  $X_3$ ) față de axul  $Y_2$ ,  $\beta_2$  fiind unghiul dintre direcția arborelui intermediar și direcția longitudinală a bolului,  $\beta_2 = 0^\circ \dots 47^\circ$ .

Folosind toate aceste notații Orain a demonstrat în 1976 folosind a doua metodă directă [B.G.11] că articulațiile polipodice, în special articulațiile tripodei, sunt articulații izometrice din punct de vedere cinematic și dinamic, punctul de vedere cinematic fiind exprimat prin relațiile:

$$\tan\varphi_2 \cot\varphi_1 = 1 \quad (2.2)$$

$$\tan\varphi_2 = \tan\varphi_1 \quad (2.3)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (2.4)$$

Articulația cu tripodă este articulația lălelea-tripodă care este CVJ, dar în 1971 Dudiță și Diaconescu [B.G.1] au dovedit că articulația tripodă este quasi-isometrică, aspect recunoscut de cercetătorii din domeniu [B.G.7] abia în 2006. Se consideră că o nonuniformitate izometrică cinematică a articulațiilor tripode este de 5 ... 7%, valoare de proiectare acceptabilă până în anii 2000, acum când o îmbunătățire de 1% este un câștig imens în industria auto nu mai este acceptabilă. De asemenea, articulația bolului nu s-a demonstrat a fi o articulație CVJ.

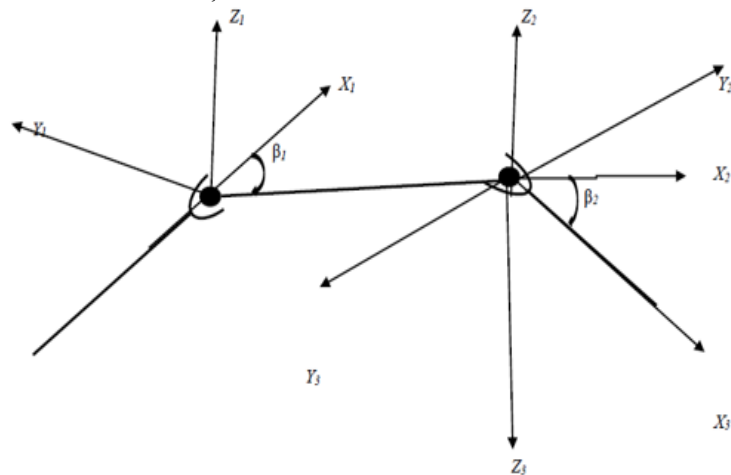


Fig. 2.5 - Representarea schematică a unui arbore planetar auto folosind 3 sisteme de coordonate carteziane [B.G.1].

Să considerăm o articulație transversală generală Hooke, așa cum este prezentată în Figura 2.6, unde elementul de antrenare este  $S_1$ , având atașat la sistemul cartezian  $R_1(OX_1, Y_1, Z_1)$ , elementul antrenat este  $S_2$ , având atașat sistemul cartezian  $R_2(OX_2, Y_2, Z_2)$ ; articulația transversală este  $A'O A-B'OB$ , având unghiul  $AOB = \delta$ , unghiul de intrare de antrenare este  $\varphi_1$ , unghiul de ieșire antrenat este  $\varphi_2$  și unghiul dintre direcția longitudinală a elementului de intrare  $S_1$  și direcția longitudinală al elementului de ieșire  $S_2$  este  $\theta$ .

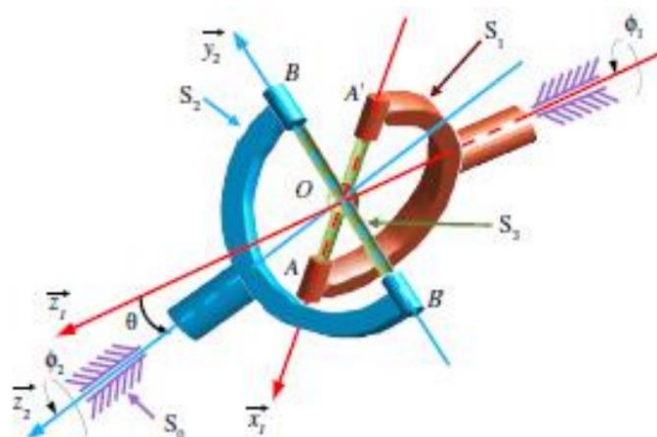


Fig. 2.6 Prezentare generală a articulației lui Hook [B.G.1]

Putem considera vectori  $\vec{e}_n, \vec{e}_v, \vec{e}_w$  cu trei unități

$$\vec{e}_n \times \vec{e}_v = \vec{e}_{z_1} \quad (2.5)$$

$$\vec{e}_n \times \vec{e}_w = \vec{e}_{z_2} \quad (2.6)$$

acesta rezultă să exprime vectorii unitari ai:

$$\vec{e}_{x_1} = \cos \phi_1 \vec{e}_n + \sin \phi_1 \vec{e}_v, \quad (2.7)$$

$$\vec{e}_{y_2} = -\sin \phi_2 \vec{e}_n + \cos \phi_2 \vec{e}_w = -\sin \phi_2 \vec{e}_n + \cos \phi_2 (\cos \theta \vec{e}_v + \sin \theta \vec{e}_{z_1}). \quad (2.8)$$

Pe baza ecuațiilor (2.7) și (2.8) rezultă:

$$\vec{e}_{x_1} \cdot \vec{e}_{y_2} = \cos \delta \Rightarrow -\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \theta = \cos \delta \quad (2.9)$$

În mod uzual număr de bile pentru o articulație cu bile este de șase, deci folosind ecuația (2.10) pentru articulația cu bile (vezi figurile 2.7 și 2.8), folosind expresia:

$$\psi_i = \frac{2\pi(i-1)}{i_{max}}, i = 1, 2, 3 \dots i_{max} \quad (2.10)$$

unde  $i_{max}$  este numărul de bile ale articulației bol cu bile. În figura 2.7 este prezentată o imagine a articulației bolului cu bile, iar în figura 2.8 sunt prezentate componentele acestuia, luând în considerare o articulație modernă cu bile CVJ - AH.

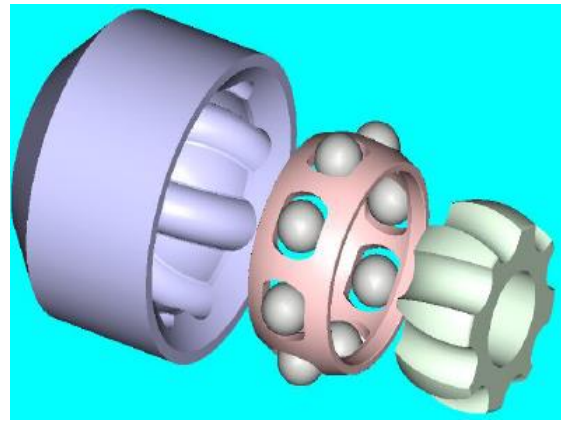


Fig. 2.7 Imagine a unei articulații bol cu bile [B.G.18] Fig. 2.8 Componentele articulației bol cu bile [B.G.18]

Cel mai utilizat număr de bile pentru o articulație bol cu bile este șase, astfel încât să putem scrie primele trei grupuri de ecuații ale Metodei Orain direct aplicate pentru articulația bolurilor cu bile, având în vedere toate bilele 1-3-5 ca o articulație tripodă.

- Pentru primul element de transmisie la  $\Psi_1 = 0^\circ$

$$-\cos \phi_2 \sin \phi_3 + \sin \phi_2 \cos \phi_3 \cos \beta_2 = \cos 0 \quad (2.11)$$

- Pentru al treilea element de transmisie la  $\Psi_3 = 120^\circ$

$$-\cos \left( \phi_2 + \frac{2\pi}{3} \right) \sin \left( \phi_3 + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( \phi_2 + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \phi_3 + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \beta_2 = \cos \frac{2\pi}{3} \quad (2.12)$$

- Pentru al cincilea element de transmisie la  $\Psi_5 = 240^\circ$

$$-\cos\left(\varphi_2 + \frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(\varphi_3 + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\varphi_2 + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi_3 + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\beta_2 = \cos\frac{4\pi}{3} \quad (2.13)$$

Ecuatiile (2.12)–(2.14) sunt identice cu cele ale articulației tripodei, prin urmare se obțin:

$$\varphi_2 = \varphi_3 \quad (2.14)$$

Relațiile care exprimă neuniformitatea izometriei cinematice a arborilor planetari pot fi obținute din formularea generală găsită de Dudiță și Diaconescu [B.G.1] pentru un arbore de acționare de intrare cu unghi de rotație rigid  $\varphi_2$  și un arbore de acționare de ieșire  $\varphi_1$ , sunt :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{r}{2i}\tan\beta\tan^2\frac{\beta}{2}\cos(3\varphi_1) \quad (2.18)$$

unde  $r$  este raza articulației,  $l$  este lungimea arborelui antrenat și  $\beta$  este unghiul dintre direcțiile longitudinale ale celor doi arbori. Odată cu semnificația termenilor menționați înainte putem obține:

- pentru articulația lalea-tripoda

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{r}{2i}\tan\beta_1\tan^2\frac{\beta_1}{2}\cos(3\varphi_1) \quad (2.19)$$

- pentru articulația bol

$$\varphi_3 = \varphi_2 + r_1 / 2i\tan\beta_2\tan^2\frac{\beta_2}{2}\cos(3\varphi_2) \quad (2.20)$$

unde  $r_1$  este raza lalelei,  $r_2$  este raza bolului,  $l$  este lungimea arborelui intermediar.

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \frac{r_1}{2l}\tan\beta_1\tan^2\frac{\beta_1}{2}\cos(3\varphi_1) + \frac{r_2}{2l}\tan\beta_2\tan^2\frac{\beta_2}{2}\cos\left(3\varphi_1 + 1,5\frac{r_1}{l}\tan\beta_1\tan^2\frac{\beta_1}{2}\cos(3\varphi_1)\right) \quad (2.21)$$

Dependența vitezei unghiulare a bolului față de viteza unghiulară a lalelei este:

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_1 - 1,5\dot{\varphi}_1\frac{r_1}{l}\tan\beta_1\tan^2\frac{\beta_1}{2}\sin(3\varphi_1) - 1,5\dot{\varphi}_1\frac{r_2}{2l}\tan\beta_2\tan^2\frac{\beta_2}{2}\sin\left(3\varphi_1 + 1,5\frac{r_1}{l}\tan\beta_1\tan^2\frac{\beta_1}{2}\cos(3\varphi_1)\right) \cdot \left(3 - 4,5\frac{r_1}{l}\tan\beta_1\tan^2\frac{\beta_1}{2}\sin(3\varphi_1)\right) \quad (2.22)$$

În Figura 2.9 este prezentată o diagramă de flux a unui arbore planetar al autovehiculului CVJ quasi-izometric.

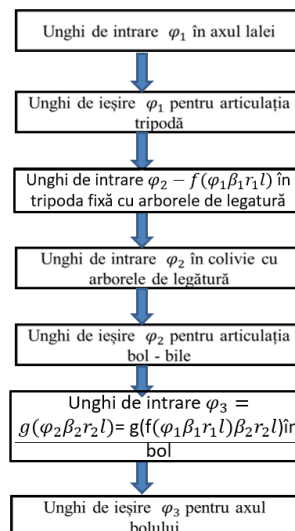


Fig. 2.9 - Diagrama de flux a unui arbore planetar al autovehiculului CVJ cvasi-izometric [B.G.18]

Pe baza relației (2.22), software-ul din MATLAB a fost folosit pentru a calcula neuniformitatea izometriei geometrice pentru arborele planetar  $\Delta_\varphi = \varphi_3 - \varphi_1 = \tau_1(\varphi_1, \beta_1, \beta_2)$  și  $\varphi_1$  după cum poate fi se vede în figurile 2.10 și 2.11.

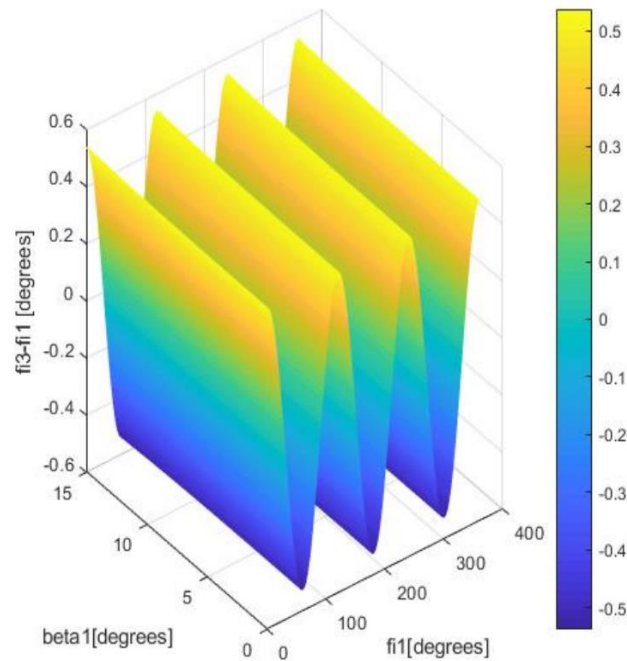


Fig. 2.10 Neuniformitatea izometriei geometrice pentru arborele planetar.  $r_1 / l = 0,11$ ,  $r_2 / l = 0,09$ ,  $\beta_1 = 0 \dots 15^\circ$  [B.G.18].

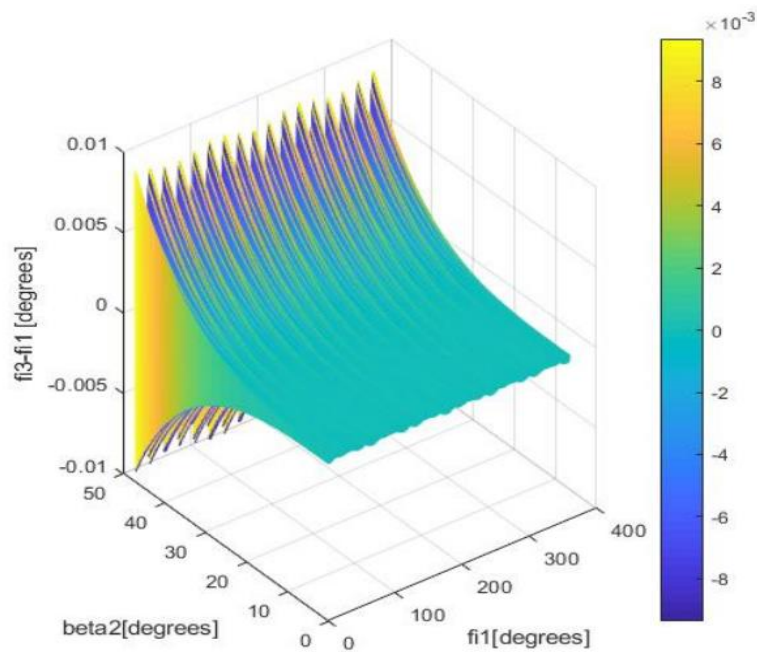


Fig. 2.11 Neuniformitatea izometriei geometrice pentru arborele planetar.  $r_1 / l = 0,11$ ,  $r_2 / l = 0,09$ ,  $\beta_2 = 0 \dots 47^\circ$  [B.G.18].



După cum se poate observa din acest grafic, neuniformitatea izometriei geometrice este în intervalul  $\pm 0,01$  fiind maximă atunci când  $\beta_2$  are valoarea maximă de  $470$ . Analizând aceste cifre, se poate concluziona că neuniformitatea izometriei geometrice a fost în intervalul  $\pm 0,009^\circ$  fiind maximă atunci când  $\beta_2$  are valoarea maximă de  $47^\circ$ . Comparând aceste rezultate cu datele experimentale din literatură [B.G.4] (pp.70–71), se poate remarca că a avut un acord strâns.

În plus, Steinwede în [B.G.4] (pp. 88-94) a demonstrat experimental că această neuniformitate a izometriei geometrice pentru un arbore planetar este cauza principală a defectelor premature pe flancurile tripodei, pe flancurile interne ale lălelei, pe bile ale articulației bol-cursă interioară, iar pe flancurile interne ale bolului din cauza designului insuficient pentru controlul contactului hertzian în raport cu fenomenele care implică neuniformitatea geometrică a izometriei care implică arborele planetar pentru autovehicule rutiere.

Folosind relația (2.23), a fost dezvoltat un software în MATLAB pentru a calcula neuniformitatea izometriei cinematice pentru arborele planetar pentru autovehicule rutiere în funcție de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  și  $\varphi_1$ , așa cum se poate vedea în figurile 2.12 și 2.13.

$$\frac{\dot{\varphi}_3}{\dot{\varphi}_1} = f(\varphi_1, \beta_1, \beta_2)$$

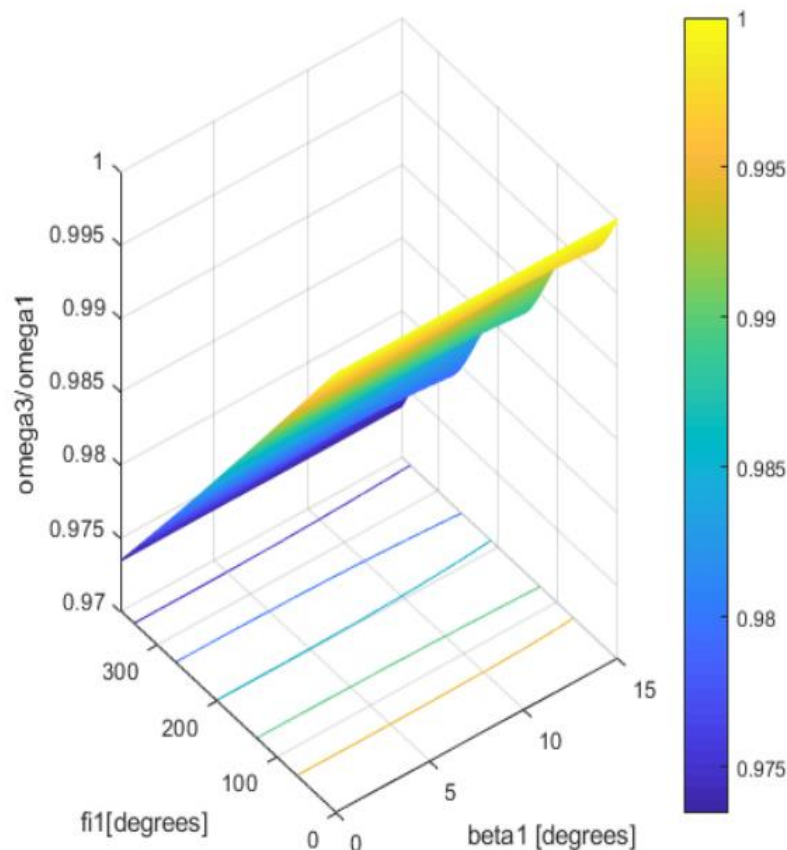


Fig. 2.12 Neuniformitatea izometriei cinematice pentru arborele planetar.  $r_1 / l = 0,11$ ,  $r_2 / l = 0,09$ ,  $\beta_1 = 0.15^\circ$  [B.G.18]

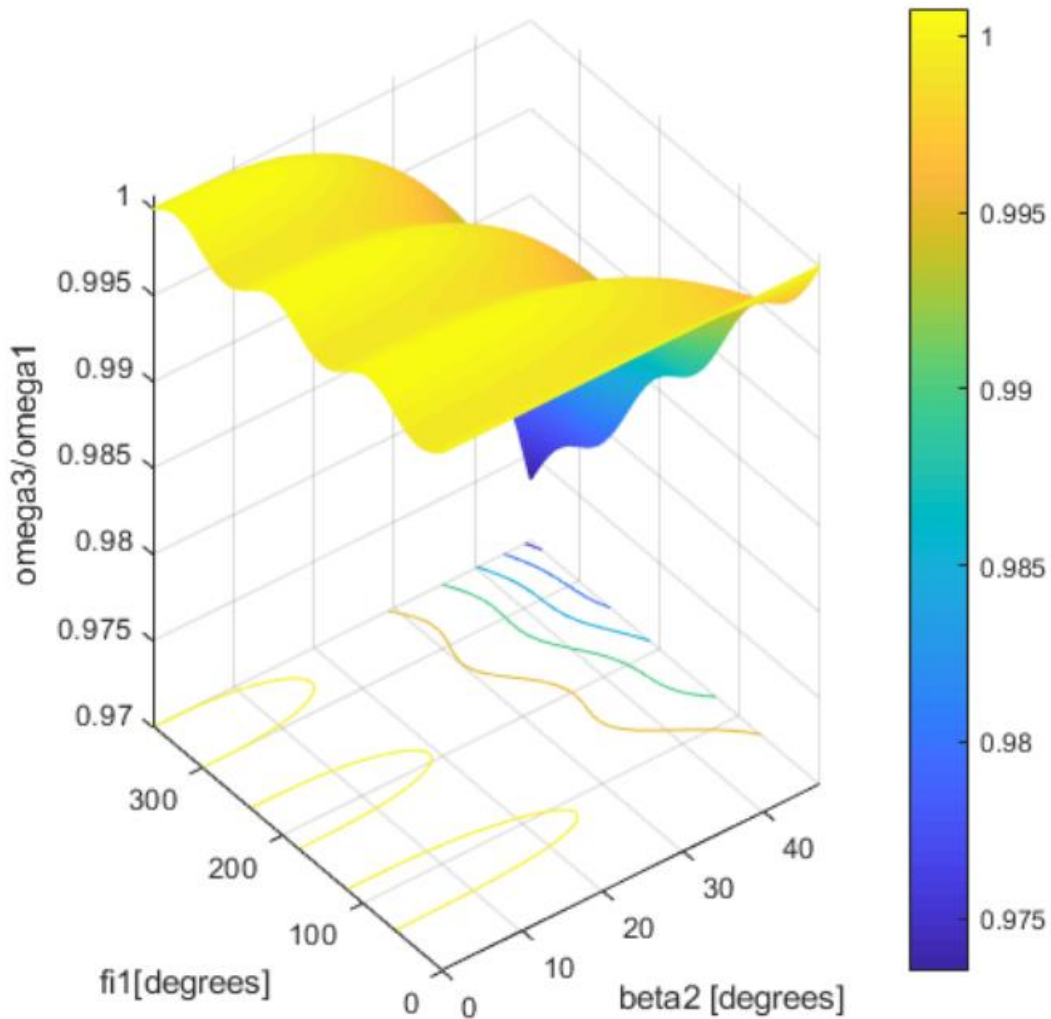


Figura 2.13 Neuniformitatea izometriei cinematice pentru arborele planetar.  $r_1 / l = 0,11$ ,  $r_2 / l = 0,09$ ,  $\beta_2 = 0.. 47^\circ$  [B.G.18]

Analizând figura 2.12, se poate remarca că neuniformitatea izometriei cinematice pentru arborele planetar, când  $\beta_2 = 47^\circ$  și  $\beta_1$  este în intervalul  $0-15^\circ$ , este în intervalul  $(-0,027, 0)$ , având maxim absolut valorile pentru  $\varphi_1 = 93^\circ, 213^\circ$  și  $325^\circ$ , în timp ce valorile minime absolute au fost obținute pentru  $\varphi_1 = 33^\circ, 151^\circ$  și  $271^\circ$ . În ceea ce privește figura 2.13, se poate concluziona că neuniformitatea izometriei cinematice pentru arborele planetar, când  $\beta_1 = 15^\circ$  și  $\beta_2$  este în intervalul  $0-47^\circ$ , a fost în câmp  $(-0,024, 0,001)$  având valoarea maximă pentru  $\varphi_1 = 76^\circ, 190^\circ, 316^\circ$ , iar minimul valorii obținute este  $\varphi_1 = 31^\circ, 169^\circ, 258^\circ$ .

În figura 2.14 neuniformitatea izometriei geometrice pentru arborele planetar  $\Delta_\varphi = \varphi_3 - \varphi_1 = g_1(\beta_1, \beta_2)$  în funcție de  $\beta_1$  și  $\beta_2$ , fiind variabile, iar  $\varphi_1 = 243^\circ$ . După cum se poate remarca din figura 2.14, neuniformitatea izometriei geometrice pentru arborele planetar a fost maximă pentru  $\beta_2 = 47^\circ$  indiferent de variația  $\beta_1$  în intervalul  $0-15^\circ$ . Din perspectiva



ultimei simulări privind izometria neuniformității geometrice pentru arborele planetar, se poate concluziona o sensibilitate mare pentru unghiul maxim  $\beta_2$  al direcției longitudinale a bolului față de direcția longitudinală a arborelui intermediar. Din punct de vedere al designului, acest aspect implica o sensibilitate la șocurile primite de la roata arborilor planetari chiar dacă valoarea neuniformității era foarte mică [B.G.18;B.C.2.1]. În plus, analizând figurile 2.10 – 2.13, poate fi evidențiată fluctuația armonică a neuniformității din izometria geometrică și cinematică a arborelui planetar. Aceasta este o provocare pentru proiectanții arborelui planetar din cauza dificultății de a prezice cantități suplimentare pentru solicitările la oboseală. Mai mult, fluctuația armonică a neuniformității din izometria geometrică și cinematică a arborelui planetar induce comportamentul dinamic parametric nelinier al unui arbore homocinetic așa cum este menționat în [B.G.12]. Toate aceste neuniformități geometrice și cinematice din izometria arborilor planetari, trebuie luate în considerare în brevetele de proiectare pentru arbori planetari pentru autovehicule rutiere, cum ar fi în [B.C.2.4 - B.C.2.7]. Aceste aspecte de a considera arborele planetar ca transmisii quasi-izometrice (izometrie cu neuniformitate) CVJ (constant velocity joint) - AH (arbori homocinetici) permit dezvoltarea unor cercetări viitoare în vibrațiile forțate de torsiune și vibrațiile de încovoiere-forfecare ale arborilor planetari.

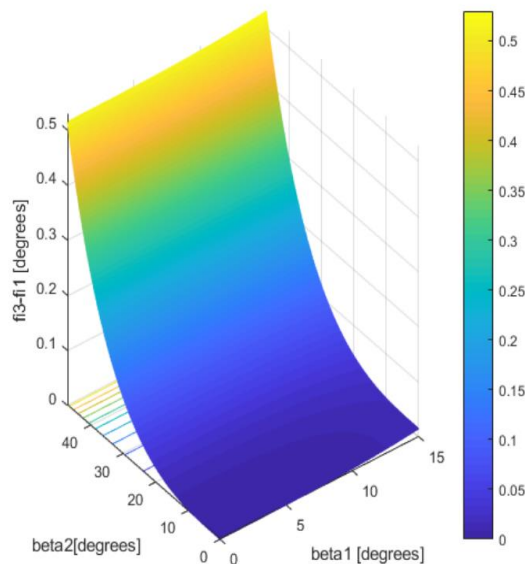


Figura 2.14 Neuniformitatea izometriei geometrice pentru arborele planetar.  $r_1 / l = 0,11$ ,  $r_2 / l = 0,09$ ,  $\varphi_1 = \text{const.} = 243^\circ$  [B.G.18]

Neuniformitatea izometriei geometrice și cinematice a arborelui planetar al autovehiculului poate avea implicații majore în dinamica a. Aceasta este o provocare pentru proiectanții arborilor planetari din cauza dificultății de a anticipa cantitățile suplimentare pentru solicitările la oboseală. Mai mult, fluctuația armonică a neuniformității din izometria geometrică și cinematică a arborelui planetar induce comportamentul dinamic parametric nelinier al unui CVJ așa cum este menționat în [B.G.12]. Aceste aspecte de a considera arborele planetar ca transmisii quasi-izometrice (izometrie cu neuniformitate) CVJ-AH(homocinetice) permit dezvoltarea unor cercetări viitoare pentru vibrațiile forțate de torsiune și vibrațiile de încovoiere-forfecare.

### Capitolul 3. Modele de vibrații forțate de torsiune ale arborelui planetar

Scopul acestei cercetări a fost acela de a proiecta un model consistent fizic pentru vibrațiile forțate de torsiune ale arborilor planetari pentru autovehicule rutiere care să țină cont de aspecte ale următoarelor fenomene:

- excitația datorată transmiterii cuplului motorului prin cutia de viteze,
- excitația datorată geometriei drumului,
- quasi izometria arborelui planetar al autovehiculului,
- efectul de neuniformitate a momentului de inerție față de axa longitudinală a articulației lalea-tripodă și a articulației bol-colivie-nucă interioară,
- rigiditatea la torsiune,
- amortizarea la torsiune a fiecărei articulații.

Pentru a rezolva ecuațiile de mișcare care descriu vibrațiile parametrice neliniare forțate de torsiune ale arborilor planetari auto, a fost utilizată o abordare variațională care implică principiul lui Hamilton, care ia în considerare neuniformitatea izometrică, unde se știe că articulațiile arborilor planetari pentru autovehicule rutiere sunt quasi-izometrice din punct de vedere al unghiului de răsucire, chiar dacă, în general, sunt considerate CVJ-uri (articulații cu viteză constantă) AH (arbori homocinetici).

În literatura de specialitate [B.G.18], neuniformitatea proprietăților izometrice ale arborilor planetari pentru autovehicule rutiere este deja un fapt recunoscut de mai bine de o jumătate de secol a cărui realitate a fost demonstrată în experimentele efectuate de Steinwede prin teza sa de doctorat [B.G.14] (p. 68–97). Această neuniformitate în proprietățile izometrice ale arborelui planetar pentru autovehicule rutiere este, fără îndoială, principala cauză a vibrațiilor parametrice neliniare ale arborelui planetar pentru autovehicule rutiere în intervalul 0,1–12 kHz, așa cum este stabilit de rezultatele experimentale documentate în literatură [B.G.14] (pp. 98–123). Primii cercetători care au luat în considerare fenomenele dinamice speciale ale arborilor planetari au fost Mazzei și Scott, care au îmbunătățit comportamentul dinamic parametric neliniar al unei articulații universale în lucrarea lor [B.G.12]. Dovezile experimentale pentru neuniformitatea transmisiei arborelui planetar pentru autovehicule rutiere sunt prezentate și evidențiate de Browne și Palazzolo în [B.G.13].

Scopul acestui studiu a fost de a stabili un model dinamic complet pentru un model de arborele planetar quasi-homocinetic auto care include elemente care descriu elementele neliniare în comportament dinamic parametric forțat. Se preconizează că acest model poate fi utilizat în stadiile incipiente de proiectare, precum și în prezicerea durabilității arborelui planetar pentru autovehicule rutiere [B.C.3.5].

Un arbore planetar pentru autovehicule rutiere este un mecanism care transmite o sarcină de cuplu de la cutia de viteze la roată, așa cum se poate vedea în Figura 2.1. Pentru o mai bună înțelegere geometrică, să ne uităm în interior unde componentele unui astfel de mecanism sunt prezentate în figura 2.2, care constă din:

- (a) articulația bol-colivie cu bile fixată asamblată cu roata mașinii;
- (b) axa arborelui intermediar;
- (c) articulația lalea-tripodă care permite glisarea axială a tripodei în lalea și glisarea asamblată în cutia de viteze.

În figura 2.5 este prezentată reprezentarea schematică a unui arbore planetar pentru autovehicule rutiere în trei axe ale coordonatelor  $X_1Y_1Z_1$  atașat la lalea,  $X_2Y_2Z_2$  atașat la arborele intermediar și  $X_3Y_3Z_3$  atașat la bol, având următoarele mișcări rigide:

- rotație cu unghiul  $\varphi_1$  al lalelei față de  $X_1$ ,  $\varphi_1 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- rotație cu unghiul  $\varphi_2$  al arborelui intermediar față de  $X_2$ ,  $\varphi_2 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- rotație cu unghiul  $\varphi_3$  al bolului față de  $X_3$ ,  $\varphi_3 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- rotația relativă a axului longitudinal al arborelui intermediar (dată de direcția axului  $X_2$ ) față de direcția longitudinală a lalelei (dată de direcția axului  $X_1$ ), cu  $\beta_1$  (unghiul spațial dintre axele  $X_1$  și  $X_2$ ) față de axul  $Z_1$ ,  $\beta_1$  fiind unghiul dintre direcția lalelei și direcția longitudinală a axului intermediar,  $\beta_1 = 0^\circ \dots 15^\circ$ ;
- rotația relativă a axului longitudinal al bolului (dată de direcția axului  $X_3$ ) la direcția longitudinală a arborelui intermediar (dată de direcția axului  $X_2$ ), cu  $\beta_2$  (unghiul spațial dintre axele  $X_2$  și  $X_3$ ) față de axul  $Y_2$ ,  $\beta_2$  fiind unghiul dintre direcția arborelui intermediar și direcția longitudinală a bolului,  $\beta_2 = 0^\circ \dots 47^\circ$ .

Pentru a calcula ecuațiile de mișcare pentru un arbore planetar pentru autovehicule rutiere folosind abordarea variațională a principiului lui Hamilton, este necesar să se reducă momentul de inerție al masei axiale al secțiunii transversale  $I_{x_1GT}$  și momentul geometric de inerție al secțiunii transversale  $J_{x_1GT}$  pentru laleaua globală (axa lalelei și laleaua) în raport cu axa longitudinală a arborelui intermediar  $X_2$  în centrul secțiunii transversale a tripodei fixat pe arborele intermediar, precum și momentul de inerție al masei axiale, secțiunea  $I_{x_3GB}$  și momentul de inerție geometric axial al secțiunii transversale  $J_{x_3GB}$  pentru bolul global (axa bolului și bolul) față de axa longitudinală a arborelui intermediar  $X_2$  în centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arborele intermediar.

Calcululele acestor momente masice de inerție axiale ale secțiunii transversale și momentele geometrice axiale de inerție ale secțiunii transversale iau în considerare următoarele:

- unghiul  $\beta_1$  dintre  $X_1$  și  $X_2$ ,
- distanța față de masă centrul axei lalelei la centrul secțiunii transversale a tripodei fixat pe arborele intermediar,
- distanța de la centrul de masă al lalelei până la centrul secțiunii transversale a tripodei fixat pe arborele intermediar, unghiul  $\beta_2$  între  $X_2$  și  $X_3$  (rotație față de  $Z_3$  paralel cu  $Z_2$ ),
- distanța de la centrul de masă al axei bolului până la centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arbore intermediar și distanța de la centrul de masă al bolului până la centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arborele intermediar.

În designul său, laleaua globală constă din două părți majore, clopotul lalelei și axul lalelei, care au geometrie diferită și, prin urmare, masă și momente geometrice de inerție diferite. Astfel, se obține că momentul de inerție geometric axial al secțiunii transversale pentru laleaua globală  $J_{x_2GT}$  poate fi redus la axa longitudinală a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale a tripodei fixat pe arborele intermediar și masa axială.

Momentul de inerție al secțiunii transversale pentru lăleaua globală  $I_{x_2GT}$  poate fi redus la axa longitudinală a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale a tripodei fixat pe arborele intermediar, dat de următoarele ecuații:

$$v_n = \frac{\omega n}{2\pi} = \frac{n}{2l_{Ms}} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, n = 1, 2, 3 \dots$$

$$J_{x_2GT} = J_{x_2T} + J_{x_2AT} \quad (3.1)$$

$$J_{x_2T} = 0,5(J_{1T} + J_{2T})[1 + \cos^2 \beta_1 + X_{nT} \cos(2\varphi_1) \sin^2 \beta_1] + S_T (d_{CT})^2 \quad (3.2)$$

$$X_{nT} = \frac{J_{1T} - J_{2T}}{J_{1T} + J_{2T}} \quad (3.3)$$

$$J_{x_2AT} = \frac{\pi d^4 AT}{64} (1 + \cos^2 \beta_1) + \frac{\pi d^2 AT}{4} (L_T + 0,5L_{AT})^2 \quad (3.4)$$

$$I_{x_2GT} = I_{x_2T} \rho L_T + I_{x_2AT} \rho L_{AT} \quad (3.5)$$

unde:

- $J_{1T}, J_{2T}$  sunt momentele principale geometrice de inerție în raport cu secțiunea transversală a lălelei în masa centrală a lălelei,
- $J_{x_2T}, J_{x_2AT}$ , momentul geometric de inerție al lălelei și momentul geometric de inerție al axului lălelei redus la axa longitudinală a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale al tripodei fixate pe arborele intermediar,
- $\rho$  este densitatea de masă în volum a materialului arborelui planetar pentru autovehicule rutiere,
- $d_{CT}$  este distanța dintre masa centrală a lălelei și centrul a tripodei,
- $S_T$  este secțiunea transversală a ariei lălelei,
- $X_{nT}$  este neuniformitatea momentelor geometrice de inerție în secțiunea transversală a lălelei,
- $L_T$  este lungimea lălelei,
- $L_{AT}$  este lungimea axa lălelei,
- $d_{AT}$  este diametrul axei lălelei
- $\varphi_1$  este unghiul de rotație al lălelei în raport cu axa  $X_I$ .

În designul său, bolul global este format din două părți majore, clopotul bolului și axa bolului, care au geometrie diferită și, prin urmare, masă și momente geometrice de inerție diferite. În aceeași manieră matematică se obține  $J_{x_2GB}$ , care este momentul de inerție geometric axial al secțiunii transversale pentru bolul global redus la axa longitudinală a arborelui intermediar în centroidul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arborele intermediar, la fel ca  $I_{x_2GB}$ , momentul de inerție al masei axiale al secțiunii transversale pentru bolul global redus la față de axa longitudinală a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arborele intermediar, dată de următoarele ecuații:

$$J_{x_2GB} = J_{x_2B} + J_{x_2AB} \quad (3.6)$$

$$J_{x_2B} = 0,5(J_{1B} + J_{2B})[1 + \cos^2 \beta_1 + X_{nB} \cos(2\varphi_3) \sin^2 \beta_1] + S_B (d_{CB})^2 \quad (3.7)$$

$$X_{nB} = \frac{J_{1B} - J_{2B}}{J_{1B} + J_{2B}} \quad (3.8)$$

$$J_{x_2AB} = \frac{\pi d^4 AT}{64} (1 + \cos^2 \beta_1) + \frac{\pi d^2 AB}{4} (L_B + 0,5L_{AB})^2 \quad (3.9)$$

$$I_{x_2GB} = I_{x_2B} \rho L_B + I_{x_2AB} \rho L_{AB} \quad (3.10)$$

unde:

- $J_{1B}, J_{2B}$  sunt momentele geometrice principale de inerție în raport cu secțiunea transversală a bolului în masa centrală a bolului;
- $J_{x_2B}, J_{x_2AB}$  sunt momentul geometric de inerție al bolului și momentul geometric de inerție al axei bolului redus la axa longitudinală a arborelui median în centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată, respectiv, pe arborele intermediar;
- $\rho$  este densitatea de masă în volum a materialului arborelui planetar;
- $d_{CB}$  este distanța dintre masa centrală a bolului și centrul cursei interioare;
- $S_B$  este secțiunea transversală a zonei bolului;
- $X_{nB}$  este neuniformitatea momentelor geometrice de inerție în secțiunea transversală a bolului (vezi Figura 3.4);
- $L_B$  este lungimea bolului;
- $L_{AB}$  este lungimea axei bolului;
- $d_{AB}$  este diametrul axei bolului;
- $\varphi_3$  este unghiul de rotație al lalelei față de axa  $X_3$ .

După cum se poate observa analizând ecuațiile (3.1) – (3.10), momentul de inerție axial geometric al secțiunii transversale  $J_{x_2GT}$ , pentru lalea globală, și momentul de inerție axial geometric al secțiunii transversale  $J_{x_2GB}$ , pentru bolul global, ambele sunt reduse la axa longitudinală mediană a arborelui  $X_2$ , sunt funcții care conțin efectele  $\sigma$ :

- unghiul de răsucire al lalelei  $\varphi_1$  precum și unghiul de răsucire al bolului  $\varphi_3$ ,
- neuniformitatea momentelor geometrice de inerție a secțiunii transversale atât pentru lalea, cât și pentru bol  $X_{nT}$  și  $X_{nB}$ ,
- unghiul dintre direcția longitudinală a lalelei și direcția longitudinală a arborelui intermediar  $\beta_1$ ,
- unghiul dintre direcția longitudinală a arborelui intermediar și direcția longitudinală a bolului  $\beta_2$ ,
- lungimea lalelei și lungimea bolului, poziția centrului de masă al axei lalelei și a lalelei față de centrul tripodei,
- poziția centrului de masă al axei bolului și al bolului față de centrul cursei interioare,
- momentele geometrice principale de inerție ale secțiunii transversale pentru lalea  $J_{1T}, J_{2T}$ ,
- momentele geometrice principale de inerție ale secțiunii transversale pentru bolul  $J_{1B}, J_{2B}$ ,
- $d_{AT}$  diametrul axei lalelei,
- $d_{AB}$  diametrul axei bolului.

Modelul fizic pentru vibrațiile de torsiune ale arborelui planetar este prezentat în Figura 3.6. Modelul de față consideră că laleaua și bolul au mișcări de torsiune a corpului rigid, prin unghiurile de răsucire  $\varphi_1$  și  $\varphi_3$ , care sunt funcții de timp  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$  și  $\varphi_3 = \varphi_3(t)$ , în timp ce arborele intermediar are un unghi de răsucire  $\varphi_2$  care este o funcție  $\varphi_2 = \varphi_2(x, t)$  a poziției (spațiului) în direcția longitudinală a arborelui intermediar, unde  $x \in [0, L_{Ms}]$ ,  $L_{Ms}$  fiind lungimea arborelui intermediar al arborelui planetar al autovehiculului și timpul  $t$ .

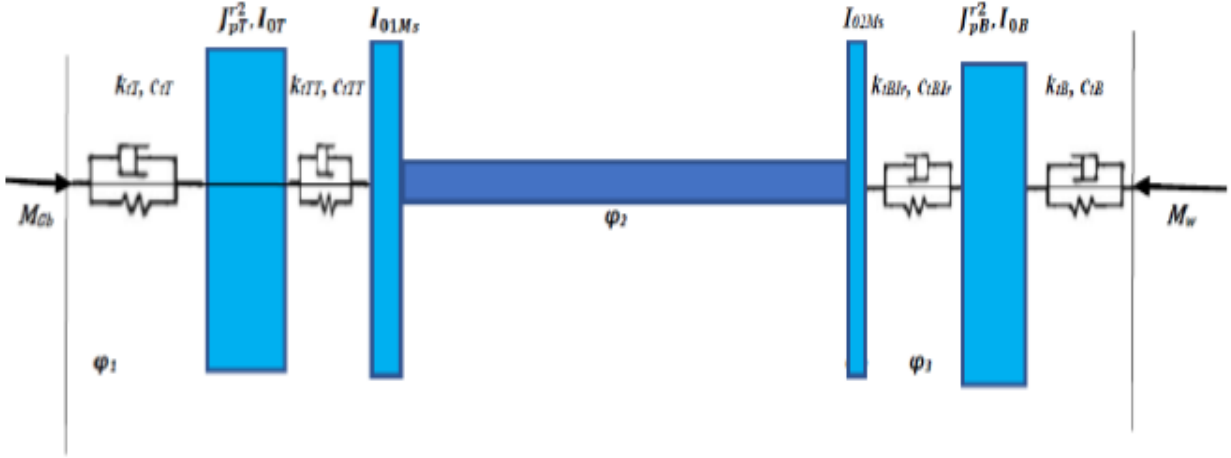


Fig. 3.6 Model fizic pentru vibrațiile de torsiune ale arborelui planetar pentru autovehicule rutiere [B.G.26]

Efectul neuniformității pentru izometria geometrică și cinematică a arborelui planetar [B.G.1 - B.G.18], este dat de ecuațiile:

$$\varphi_2(0, t) = \varphi_1(t) + \frac{R_{TT_r}}{2L_{Ms}} \tan\beta_1 \tan^2 \frac{\beta_1}{2} \cos(3\varphi_1(t)) \quad (3.11)$$

$$\varphi_3(t) = \varphi_2(L_{Ms, t}) + \frac{R_{irB}}{2L_{Ms}} \tan\beta_2 \tan^2 \frac{\beta_2}{2} \cos(3\varphi_2(L_{Ms, t})) \quad (3.12)$$

unde  $R_{TT_r}$  este raza articulației lalele-tripodă și  $R_{irB}$  este raza interioară a articulației bol de unde rezultă:

$$\frac{\partial \varphi_2(0, t)}{\partial t} - \dot{\varphi}_1(t) = -1,5 \dot{\varphi}_1(t) \frac{R_{TT_r}}{2L_{Ms}} \frac{R_{TT_r}}{2L_{Ms}} \tan\beta_1 \tan^2 \frac{\beta_1}{2} \sin(3\varphi_1(t)) \quad (3.13)$$

$$\dot{\varphi}_3(t) - \frac{\partial \varphi_2(L_{Ms, t})}{\partial t} = -1,5 \dot{\varphi}_1(t) \frac{\partial \varphi_2(L_{Ms, t})}{\partial t} \frac{R_{irB}}{L_{Ms}} \tan\beta_2 \tan^2 \frac{\beta_2}{2} \sin(3\varphi_2(L_{Ms, t})) \quad (3.14)$$

Ecuațiile (3.11) - (3.14) introduc în acest model efectul neuniformității pentru izometria geometrică și cinematică a arborelui planetar. Modelul prezentat este alcătuit din trei elemente diferite, lalea articulată prin articulația lalele-tripoda de arborele intermediar, arbore intermediar și articulația bolului (montată la capătul din dreapta al arborelui intermediar), fiind descris la torsiune dinamică astfel:

1. lalea în mișcarea corpului rigid de torsiune redusă la axa longitudinală de torsiune a arborelui intermediar, având o rigiditate globală la torsiune  $K_{tGT}$ , un coeficient global de amortizare la torsiune  $c_{tGT}$ , un moment de inerție geometric axial al secțiunii transversale pentru lalea globală

$J_{x_2GT}$  redus la longitudinala longitudinală axa arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale a tripodei fixată pe arborele intermediar (vezi ecuația (3.1)), un moment de inerție al masei axiale a secțiunii transversale pentru lăea globală  $I_{x_2GT}$  redus la axa longitudinală a arborelui intermediar în centroidul secțiunii transversale a trepidului fixat pe arborele intermediar (vezi ecuația (3.5)), unde  $K_{tGT}$  și  $c_{tGT}$  sunt date de ecuațiile:

$$k_{tGT} = \frac{K_{tAT}K_{tT}}{K_{tAT} + K_{tT}}, K_{tAT} = \frac{GJ_{x_2AT}}{L_{AT}}, K_{tT} = \frac{GJ_{x_2T}}{L_T},$$

$$c_{tGT} = \frac{2\Delta_{GT}}{\sqrt{4\pi^2 + \Delta_{GT}^2}} \sqrt{k_{tGT}I_{x_2GT}} \quad (3.15)$$

unde:

- $K_{tAT}$  este rigiditatea axului lăelei redusă la axa longitudinală a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale a tripodei fixat pe arborele intermediar,
- $K_{tT}$  este rigiditatea clopotului lăelei redusă la axa longitudinală a arborelui intermediar, arbore intermediar în centrul secțiunii transversale a tripodei fixat pe arborele intermediar,
- $L_T$  este lungimea clopotului lăelei,
- $L_{AT}$  este lungimea axului lăelei,
- $G$  este modulul de forfecare
- $\Delta_{GT}$  este decrementul logaritm al torsiunii libere - vibrațiile lăelei globale ( $2\Delta_{GT} = 0,001 \dots 0,2$ ) [B.G.24 ;B.G.32].

2. Articulația lăea-tripodă în torsiune realizează legătura dintre lăea și arborele intermediar prin rigiditatea la torsiune  $K_{tT}$  și coeficientul de torsiune de amortizare  $c_{tTT}$ ;

3. Arborele intermediar uniform (vezi figurile 3.2, 3.4 și 3.5) în torsiune având, la  $x = 0$ , o tripodă (vezi figura 3.4) fixată pe arborele intermediar cu momentul de inerție al masei axiale al secțiunii transversale  $I_{01Ms}$  (axa arborelui median inclusă pe grosimea tripodei) și momentul de inerție axial geometric al secțiunii transversale a tripodei  $J_{x_2Tr}$  (axa intermediară inclusă pe grosimea tripodei), iar la  $x = L_{Ms}$ , o cale interioară (vezi Figura 3.5) fixată pe arbore intermediar cu momentul de inerție al masei axiale a secțiunii transversale  $I_{02Ms}$  (axa arborelui intermediar inclusă pe grosimea pistei interioare) și momentul axial geometric de inerție a secțiunii transversale  $J_{x_2Ir}$  (axa arborelui intermediar inclusă pe grosimea pistei interioare), dată de ecuațiile:

$$I_{01ms} = J_{x_2Tr} \rho L_{Tr} = (J_{1Tr} + J_{2Tr}) \rho L_{Tr} \quad (3.16)$$

$$I_{02ms} = J_{x_2Ir} \rho L_{Ir} = (J_{1Ir} + J_{2Ir}) \rho L_{Ir} \quad (3.17)$$

unde,

- $J_{1Tr}, J_{2Tr}$  sunt principalele momente geometrice de inerție în secțiunea transversală a tripodei, axa arborelui intermediar inclusă pe grosimea trepidului,
- $J_{1Ir}, J_{2Ir}$  sunt principalele momente geometrice de inerție în secțiunea transversală a pistei interioare, axa arborelui intermediar inclus pe grosimea pistei interioare,
- $J_{x_2Tr}$  este momentul de inerție axial geometric al tripodei (axa arborelui intermediar inclusă pe grosimea trepidului),

- $J_{x2Ir}$  este momentul de inerție axial geometric al pistei interioare (axa arborelui intermediar inclusă pe grosimea tripodei, grosimea liniei interioare),
- $L_{Tr}$  este grosimea tripodei,
- $L_{Ir}$  este grosimea pistei interioare (a nucii);

4. articulația bolului în torsiune care realizează legătura dintre bol și arborele intermediar prin rigiditatea torsională  $k_{tBIr}$  și coeficientul de amortizare la torsiune  $c_{tBIr}$ ;

5. bolul, în mișcare rigidă de torsiune a corpului redus la axul longitudinal torsional al arborelui intermediar, are rigiditate globală la torsiune  $k_{tGB}$ , un coeficient global de amortizare la torsiune  $c_{tB}$ , un moment polar de inerție geometric al secțiunii transversale redus la axul longitudinal al arborelui intermediar  $J_{x2B}$ , un moment de inerție mecanic al secțiunii transversale redus la axul longitudinal al arborelui intermediar  $I_{x2GB}$ .

$$k_{tGB} = \frac{K_{tAB} K_{tB}}{B + K_{tB}}; K_{tAT} = \frac{GJ_{x2AB}}{L_{AB}}; K_{tT} = \frac{GJ_{x2B}}{L_B}; c_{tGT} = \frac{2\Delta_{GB}}{\sqrt{4\pi^2 + \Delta_{GB}^2}} \sqrt{k_{tGBI_{x2GB}}} \quad (3.18)$$

unde:

- $K_{tAB}$  este rigiditatea axului bolului redusă la axa longitudinală a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arbore intermediar,
- $K_{tB}$  este rigiditatea clopotului bolului redusă la axa longitudinală a arborele intermediar în centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arborele intermediar,
- $L_B$  este lungimea clopotului bolului,
- $L_{AB}$  este lungimea axului bolului,
- $G$  este modulul de forfecare
- $\Delta_{GB}$  decrementul logaritmic al torsiunii libere vibrații ale bolului global ( $\Delta_{GB} = 0,001-0,15$ ) [B.G.24 - B.G.25].

Din cutia de viteze, arborele planetar pentru autovehicule rutiere (vezi figurile 3.1 și 3.6) primește cuplul de la motor, care este dat de ecuația (3.2) (p. 361).

$$M_{GB} = M_e \sqrt{1 + X_e \cos(n\Omega_e t)}, n \in N \quad (3.19)$$

$$\Omega_e = \frac{\pi n_e}{30} \quad (3.20)$$

unde:

- $\chi_e$  este neuniformitatea cuplului motor, fiind în intervalul 0,980–1,020 [B.C.3.1] (p. 363);
- $M_e$  este amplitudinea cuplului motor în Nm;
- $n_e$  este viteza de rotație (unghiul de viteză) a manivelei arborele motorului în rot/min.

Cuplul indus de roată este de tip impulsiv moderat și poate fi considerat sub formă matematică:

$$M_W = M_H \left[ 1 + q_3 t^{q_1} e^{-q_2 t} \right] \quad (3.21)$$

unde:

- $M_H$  este cuplul de aderență [B.G.5] (p. 130),
- $M_W$  expresia șocului de torsiune generată de interacțiunea pneu-calea de rulare;
- $q_1, i = \overline{1,31}$ ,



- $q_1 \gg q_2, q_3 \geq 1.1$  sunt constante experimentale în funcție de tipul de șoc aplicat la roată de excitația drumului [B.G.17].

Pentru modelul vibrațiilor de torsiune ale arborelui motor prezentat în Figura 3.6, utilizarea abordării variaționale a principiului generalizat Hamilton [B.C.3.23] (pp. 272–295) conduce:

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} (\Pi - T - W) dt = 0 \quad (3.22)$$

unde,  $\Pi$  - energia de deformare a modelului pentru arborele planetar al automobilului (vezi Figura 3.6), inclusiv arcurile de torsiune și amortizoarele de torsiune, este dată de ecuația generalizată (3.23) (p. 274), [B.G.25] (pp. 610–613):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^{L_{Ms}} GJx_2 M_S \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \left[ c_{iGT} (\dot{\varphi}_1)^2 + c_{iTT} \left( \frac{\partial \varphi_2(0,t)}{\partial x} - \dot{\varphi}_1 \right)^2 + c_{iBlr} \left( \dot{\varphi}_3 - \frac{\partial \varphi_2(L_{Ms},t)}{\partial x} \right)^2 + c_{iGB} (\dot{\varphi}_3)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ K_{iGT} \varphi_1^2 + K_{iTT} (\varphi_2(0,t) - \varphi_1)^2 + K_{iBlr} (\varphi_3 - \varphi_2(L_{Ms},t))^2 + K_{iGB} \varphi_3^2 \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

unde:

- $L_{Ms}$  este lungimea arborelui intermediar,
- $Jx_2 M_S$  este momentul de inerție axial geometric al secțiunii transversale a arborelui intermediar față de axa longitudinală  $X_2$  dată de ecuațiile:

$$Jx_2 M_S = \frac{\pi d_{Ms}^4}{32} \quad (3.24)$$

$$Jx_2 M_S = \pi \frac{(d_{eMs}^4 - d_{iMs}^4)}{32} \quad (3.25)$$

unde arborele intermediar este considerat ca având o secțiune transversală circulară sau o secțiune uniformă tubulară cu diametrul  $d_{Ms}$  pentru secțiunea transversală circulară sau diametrele  $d_{eMs}$ ,  $d_{iMs}$  pentru secțiunea transversală tubulară. La ecuația (3.23) s-a adăugat și funcția generalizată de disipare a lui Rayleigh [B.G.25] (p. 611) specifică formulărilor matematice ale abordării generalizate Euler–Lagrange, datorită prezenței în modelul vibrațiilor de torsiune a amortizorului, dând ecuația:

$$\Lambda = \left( \dot{\varphi}_1, \frac{\partial \varphi_2(x,t)}{\partial x}, \dot{\varphi}_3, \right) = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & c_{iGT} (\dot{\varphi}_1)^2 + c_{iTT} \left( \frac{\partial \varphi_2(0,t)}{\partial x} - \dot{\varphi}_1 \right)^2 + \\ & + c_{iBlr} \left( \dot{\varphi}_3 - \frac{\partial \varphi_2(L_{Ms},t)}{\partial x} \right)^2 + c_{iGB} (\dot{\varphi}_3)^2 \end{aligned} \right] \quad (3.26)$$

Energia cinetică a modelului pentru arborele planetar al automobilului, văzută în Figura 6, este dată de ecuația generalizată (3.23) (p. 274), [B.G.25] (p. 719):

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_0^{L_{Ms}} \rho Jx_2 M_S \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} I_{x_{2GT}} (\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} I_{01Ms} \left( \frac{\partial \varphi_2(0,t)}{\partial x} - \dot{\varphi}_1 \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} I_{02Ms} \left( \frac{\partial \varphi_2(L_{Ms},t)}{\partial x} \right)^2 + I_{x_{2GB}} (\dot{\varphi}_3)^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Lucrul mecanic efectuat de cuplurile externe poate fi exprimată ca:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{L_{Ms}} \left\{ \begin{aligned} & [M_{GB}] \Delta(x) + [M_W] \Delta(x - L_{Ms}) \varphi_2(x, t) \\ & dx = [M_{GB}] \varphi_2(0, t) + [M_W] \varphi_2(L_{Ms}, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

unde  $\Delta(x)$  este funcția lui Dirac și  $\varphi_2(0, t)$ ,  $\varphi_2(L_{Ms}, t)$  sunt date de ecuațiile (3.11) și (3.12) ca funcții ale lui  $\varphi_1(t)$  și  $\varphi_3(t)$ .

După mai multe manipulări matematice care includ integrarea pe părți, se obține sistemul neliniar cu derivate parțiale de gradul doi:

$$\begin{aligned} & Ix_{2GT}(\varphi_1) \ddot{\varphi}_2 + [c_{iGT} + 3c_{iTT} A_{TT} \sin(3\varphi_1)] \dot{\varphi}_1 + [K_{iGT} - K_{iTT} A_{TT} \cos(3\varphi_1)] \varphi_1 = \\ & = \overline{M}_e [1 + X_e \cos(n\Omega_e t)] (1 - 3A_{TT} \sin(3\varphi_1)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\rho J x_2 M_s \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = G J x_2 M_s \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} & Ix_{2GB}(\varphi_2) \ddot{\varphi}_3 + [c_{iGB} + 3c_{iTT} A_{TT} \sin(3\varphi_3)] \dot{\varphi}_3 + [K_{iGB} - K_{iTT} A_{TT} \cos(3\varphi_3)] \varphi_3 = \\ & = M_H [1 + q_3 t^{q_1} e - q_2 t] (1 - 3A_{Blr} \sin(3\varphi_3)) \end{aligned} \quad (3.31)$$

unde constantele  $A_{TT}$  și  $A_{Blr}$  sunt date de ecuațiile [B.G.1]:

$$A_{TT} = 0,5 \frac{R_{TT} \tan \beta_1 \tan^2 \frac{\beta_1}{2}}{L_{Ms}} \quad (3.32)$$

$$A_{Blr} = 0,5 \frac{R_{Blr} \tan \beta_1 \tan^2 \frac{\beta_1}{2}}{L_{Ms}} \quad (3.33)$$

și condițiile la limită sunt:

$$I_{01Ms} \frac{\partial^2 \varphi_2(0, t)}{\partial t^2} - 3c_{iTT} A_{TT} \sin(3\varphi_1) \varphi_1 + K_{iTT} A_{TT} \cos(3\varphi_1) \varphi_1 - \quad (3.34)$$

$$-G J x_2 M_s \frac{\partial^2 \varphi_2(0, t)}{\partial t^2} = 0, \text{ at } x = 0$$

$$I_{02Ms} \frac{\partial^2 \varphi_2(L_{Ms}, t)}{\partial t^2} + 3c_{iBlr} A_{Blr} \sin(3\varphi_3) \varphi_3 - K_{iBlr} A_{Blr} \cos(3\varphi_3) \varphi_3 - \quad (3.35)$$

$$-G J x_2 M_s \frac{\partial^2 \varphi_2(L_{Ms}, t)}{\partial t^2} = 0, \text{ at } x = L_{Ms}$$

Sistemul dat de ecuațiile (3.29)–(3.31) împreună cu condițiile la limită (3.34) și (3.35) reprezintă comportamentul dinamic neliniar al unui arbore planetar auto în torsiune sub o excitație armonică de intrare care apare datorită modulației motorului mașinii și neuniformitățile transferului de sarcină de cuplu de la motor la arborele planetar prin cutia de viteze auto, în plus față de o sarcină de cuplu reactivă de tip impulsiv indusă în roată de excitațiile rutiere. Analizând ecuațiile (3.29)–(3.35), se poate remarca că ecuațiile (3.29)–(3.31) sunt ecuațiile de vibrații parametrice forțate pentru lalea și pentru bolul în torsiune care sunt ecuații generalizate neliniare forțate Mathieu–Hill. Ecuația (3.30) este o ecuație cu derivate parțiale pentru vibrațiile de torsiune ale unui arbore uniform, iar ecuațiile (3.34) și (3.35) reprezintă legătura dintre vibrațiile de torsiune

ale elementelor arborelui planetar al autovehiculului laleaua arborelui-bol prin rigiditate și amortizarea articulațiilor lalea–tripodă–arbore intermediar și bol–colivie cu bile–cursă interioară–arbore intermediar.

Se consideră

$$\varphi_2(x, t) = \sum_n \Phi_{2n} \cos\left(\frac{\omega_n x}{c} - \Theta_{1n}\right) \cos(\omega_n t - \Theta_{2n}), c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \omega_n = \frac{\pi n c}{L_{Ms}}, n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.36)$$

unde:

- $\Phi_{2n}$  este amplitudinea;
- $\Theta_{1n}$  și  $\Theta_{2n}$  sunt unghiurile de fază pentru soluția generală  $\varphi_2(x, t)$ ;
- $\omega_n$  este frecvența naturală liberă a vibrațiilor de torsiune ale arborelui intermediar. Din condiția la limită (3.34), folosind ecuația (3.36) rezultă

$$\begin{aligned} -3c_{iTT} A_{TT} \sin(3\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + K_{iTT} A_{TT} \cos(3\varphi_1) \varphi_1 &= -I_{01Ms} \frac{\partial^2 \varphi_2(0, t)}{\partial t^2} + GJx_2 M_S \frac{\partial^2 \varphi_2(0, t)}{\partial t^2} = \\ &= \sum_n \Phi_{2n} \left[ I_{01Ms} \omega_n^2 \cos\left(\frac{\omega_n L_{Ms}}{c} - \Theta_{1n}\right) - GJx_2 M_S \frac{\omega_n}{c} \sin\left(\frac{\omega_n L_{Ms}}{c} - \Theta_{1n}\right) \right] \cos(\omega_n t - \Theta_{1n}), atx = L_{Ms} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Într-o manieră matematică similară din condiția la limită (3.35), folosind ecuația (3.36) rezultă:

$$\begin{aligned} 3c_{iBlr} A_{Blr} \sin(3\varphi_3) \dot{\varphi}_3 - K_{iBlr} A_{Blr} \cos(3\varphi_3) \varphi_3 &= -I_{01Ms} \frac{\partial^2 \varphi_2(L_{Ms}, t)}{\partial t^2} - GJx_2 M_S \frac{\partial^2 \varphi_2(0, t)}{\partial t^2} = \\ &= \sum_n \Phi_{2n} \left[ I_{01Ms} \omega_n^2 \cos\left(\frac{\omega_n L_{Ms}}{c} - \Theta_{1n}\right) - GJx_2 M_S \frac{\omega_n}{c} \sin\left(\frac{\omega_n L_{Ms}}{c} - \Theta_{1n}\right) \right] \cos(\omega_n t - \Theta_{1n}), atx = L_{Ms} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Introducerea ecuației (3.37) în ecuația (3.29) rezultă:

$$\begin{aligned} Ix_{2GT}(\varphi_1) \ddot{\varphi}_2 + c_{iGT} \dot{\varphi}_2 + K_{iGT} \varphi_2 &= \overline{M}_e \left[ 1 + X_e \cos(n\Omega_e t) \right] (1 - 3A_{TT} \sin(3\varphi_1)) + \\ &+ \sum_n \Phi_{2n} \left[ I_{01Ms} \omega_n^2 \cos \Theta_{1n} + GJx_2 M_S \frac{\omega_n}{c} \sin \Theta_{1n} \right] \cos(\omega_n t - \Theta_{2n}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

iar ecuația (3.39) este împărțită la funcția  $Ix_{2GT}(\varphi_1)$  pentru a se obține:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + 2\zeta_1 \overline{\Omega}_1 \sqrt{\frac{1 + a_1 \cos 2\varphi_1}{(1 + a_2 \cos 2\varphi_1)(1 + x_{GTn} \cos 2\varphi_1)}} \dot{\varphi}_1 + \overline{\Omega}_1^2 \frac{1 + a_1 \cos 2\varphi_1}{(1 + a_2 \cos 2\varphi_1)(1 + x_{GTn} \cos 2\varphi_1)} \varphi_1 &= \\ &= \frac{\overline{M}_e}{Ix_{2GT}} \frac{1 + X_e \cos(n\Omega_e t)}{1 + X_{GTn} \cos \varphi_1} (1 - 3A_{TT} \sin(3\varphi_1)) + \\ &+ \sum_n \Phi_{2n} \left[ \frac{I_{01Ms}}{Ix_{2GT}} \omega_n^2 \cos \Theta_{1n} + \frac{GJx_2 M_S}{Ix_{2GT}} \frac{\omega_n}{c} \sin \Theta_{1n} \right] \frac{\cos(\omega_n t - \Theta_{2n})}{(1 + x_{GTn} \cos 2\varphi_1)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

,  $n=1, 2, 3, \dots$ ,

unde:

- $Ix_{2GT}$  este momentul de inerție al masei lalelei globale în raport cu axa longitudinală de torsiune  $X_2$  a lalelei globale pentru unghiul  $\beta_1 = 0^\circ$ ,

- $x_{GTn}$  este neuniformitatea globală a lalelei,
- $\zeta_1$  este raportul de amortizare al lalelei globale,
- $\bar{\Omega}_1$  este frecvența naturală de torsiune a lalelei globale în funcție de unghiul  $\beta_1$ , dată de ecuație.

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{c}{L_T} \left[ \frac{1 - \frac{Jx_{2AT}\rho L_{AT}}{Ix_{2GT}}}{1 + \left(\frac{L_{AT}}{L_T}\right)^2 \left(\overline{Ix_{2GT}} |Jx_{2AT}\rho L_{AT}\right) - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

Toți termenii din partea dreaptă sunt termeni de excitație datorati următoarelor fenomene: articulația lalea-tripodă-arborele intermediar al arborelui planetar pentru autovehicule rutiere care este quasi-izometrică pentru viteza unghiulară  $\varphi_1$  [B.G.1 - B.G.18] efectul de sarcinile de torsiune induse, cum ar fi momentul de intrare armonic din cutia de viteze [B.C.3.1] (p. 360), efectul neuniformității asupra momentului de inerție axial al articulației lalea-tripodă-arborele intermediar al arborelui planetar pentru autovehicule rutiere care variază cu unghiul  $\varphi_1$ , efectul neuniformității asupra momentului de inerție axial al lalelei globale care variază cu unghiul  $\varphi_1$ , efectul unghiului  $\beta_1$  dintre axa globală a lalelei și axa arborelui median și efectul rigidității la torsiune precum și amortizării la torsiune asupra articulației lalea-tripodă-arborele intermediar al arborelui planetar pentru autovehicule rutiere care sunt funcții ale unghiului  $\varphi_1$ .

Coeficienții  $a_1$ ,  $a_2$  și neuniformitatea globală a lalelei  $x_{GTn}$  sunt prezentați în Anexa A. Introducând ecuația (3.38) în ecuația (3.31) rezultă:

$$\begin{aligned} Ix_{2GB}(\varphi_3)\ddot{\varphi}_3 + c_{iGT}\dot{\varphi}_3 + K_{iGT}\varphi_3 = \\ = -M_H \left[ 1 + q_3 t^{q_1} e - q_2 t \right] \left( 1 - 3A_{Br} \sin(3\varphi_3) - \overline{M}_e \left[ 1 + X_e \cos(n\Omega_e t) \right] \right) \left( 1 - 3A_{Tr} \sin(3\varphi_1) \right) + \\ + \sum_n \Phi_{2n} \left[ I_{01Ms} \omega_n^2 \cos\left(\frac{\omega_n L_{Ms}}{c} - \Theta_{1n}\right) - GJx_2 M_s \frac{\omega_n}{c} \sin\left(\frac{\omega_n L_{Ms}}{c} - \Theta_{1n}\right) \right] \cos(\omega_n t - \Theta_{1n}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

iar ecuația (41) este împărțită la funcția  $Ix_{2GB}(\varphi_3)$  pentru a obține:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_3 + 2\zeta_3 \bar{\Omega}_3 \sqrt{\frac{1 + a_3 \cos 2\varphi_3}{(1 + a_4 \cos 2\varphi_3)(1 + x_{GBn} \cos 2\varphi_3)}} \dot{\varphi}_3 + \bar{\Omega}_3^2 \frac{1 + a_3 \cos 2\varphi_3}{(1 + a_4 \cos 2\varphi_3)(1 + x_{GTn} \cos 2\varphi_3)} \varphi_3 = \\ = \frac{M_H}{Ix_{2GB}} \frac{\left[ 1 + q_3 t^{q_1} e - q_2 t \right]}{(1 + x_{GBn} \cos 2\varphi_3)} \left( 1 - 3A_{Br} \sin(3\varphi_3) \right) + \\ + \sum_n (-1)^n \Phi_{2n} \left[ \frac{I_{01Ms}}{Ix_{2GT}} \omega_n^2 \cos \Theta_{1n} + \frac{GJx_2 M_s}{Ix_{2GT}} \frac{\omega_n}{c} \sin \Theta_{1n} \right] \frac{\cos(\omega_n t - \Theta_{2n})}{(1 + x_{GTn} \cos 2\varphi_1)}, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.43)$$

unde:

- $Ix_{2GB}$  este momentul de inerție al masei în raport cu axa longitudinală de torsiune  $X_2$  a bolului global pentru unghiul  $\beta_2 = 0^\circ$ ,

- $x_{GBn}$  este neuniformitatea bolului global (vezi Anexa A),
- $\zeta_3$  este raportul de amortizare al bolului global (vezi Anexa A),
- $\Omega_3$  este frecvența naturală de torsiune a bolului global în funcție de unghiul  $\beta_2$ , dat de ecuație

$$\bar{\Omega}_3 = \frac{c}{L_B} \left[ \frac{1 - \frac{Jx_{2AB}\rho L_{AB}}{Ix_{2GT}}}{1 + \left(\frac{L_{AB}}{L_B}\right)^2 \left(\overline{Ix_{2GB}} | Jx_{2AB}\rho L_{AB} \right) - 1} \right]^{1/2} \quad (3.44)$$

iar toți termenii din partea dreaptă sunt termeni de excitație datorati articulației bol – cursă interioară – arbore intermediar al arborelui planetar care este quasi izometric pentru viteza unghiulară  $\varphi_3$  [B.G.1 - B.G.18], efectul momentului de reacție impulsiv de la roți [B.G.17], efectul neuniformității asupra momentului de inerție axial al îmbinării care variază cu unghiul  $\varphi_3$ , efectul neuniformității asupra momentului de inerție axial al bolului global care variază cu unghiul  $\varphi_3$ , efectul unghiul  $\beta_2$  dintre axa globală a bolului și axa mijlocului arborelui și efectul rigidității la torsiune, precum și amortizarea la torsiune pentru bolul de îmbinare – cursa interioară – arborele intermediar al arborelui planetar care sunt funcții ale unghiului  $\varphi_3$ . Coeficienții  $a_3$ ,  $a_4$  și neuniformitatea globală a lălelei  $x_{GBn}$ .

Sistemul de ecuații (3.40) și (3.43) este o formă generalizată de sistem de ecuații neliniare Mathieu–Hill care sunt legate datorită termenului de excitație  $\cos(\omega_n t) \pm \Theta_n$  și ecuațiile cuplate (3.11)–(3.14) generate de soluția generală dată de ecuația (3.36) la  $x = 0$  și la  $x = L_{Ms}$ . Expresia matematică a sistemului de ecuații (3.40) și (3.43) indică, datorită prezenței termenilor parametrici neliniari în partea stângă a ecuațiilor și prezenței termenilor de excitație neliniari în partea dreaptă a ecuațiilor, manifestare a:

- rezonanțelor primare pentru frecvențele de excitație:  
 $\eta \cong \bar{\Omega}_1, \eta \approx \bar{\Omega}_3$  [B.G.17], (p. 196)
- rezonanțelor super armonice pentru frecvențele de excitație:  
 $\eta \cong k_1 \bar{\Omega}_1, \eta \approx k_2 \bar{\Omega}_3, k_1, k_2$  numere întregi pozitive [B.G.16], (p. 214),
- rezonanțelor parametriche principale pentru frecvențele de excitație  
 $\eta \cong 2\bar{\Omega}_1, \eta \approx 2\bar{\Omega}_3$ , [B.G.16], (p. 425)
- rezonanțelor combinate pentru frecvențele de excitație  
 $\eta \cong \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_3, \eta \approx \bar{\Omega}_3 - \bar{\Omega}_1$  [B.G.16], (pp. 202, 430),
- rezonanțelor simultane pentru frecvențele de excitație  
 $\eta \cong k\bar{\Omega}_1, \eta \approx \frac{1}{k}\bar{\Omega}_3$   $k$ , număr întreg pozitiv [B.G.16], (p. 188),
- rezonanțelor interne pentru  $k_1 \bar{\Omega}_1$  '  $k_2 \bar{\Omega}_3$ , cu  $k_1, k_2$ , numere întregi pozitive [B.G.16], (p. 381),  $\eta$  fiind frecvența de excitație. După cum se poate observa, acest model pentru vibrațiile forțate de torsiune ale arborelui planetar pentru autovehicule rutiere oferă o posibilitate uriașă de investigare.

După cum s-a menționat deja mai sus, unul dintre cele mai importante cazuri rezonante ale arborilor planetari pentru autovehicule rutiere este rezonanța parametrică principală [B.G.12-B.G.13] și [B.G.16] (p. 425), iar pentru această lucrare, autorii au decis să investigheze amplitudinea torsiunii forțate. vibrații parametrică neliniare pentru rezonanța parametrică principală a lalelei globale bazate pe ecuația (3.40) ca studiu de caz. Datele experimentale pentru acest studiu de caz sunt prezentate în literatura de specialitate de către Steinwede [B.G.14] (pp. 69-144). Studiul a luat în considerare o îmbinare lalea-trepied având caracteristicile geometrice ale unui moment geometric de inerție și neuniformitatea momentelor geometrice de inerție, așa cum sunt prezentate în tabelul 1, pentru arborele planetar al unui SUV greu cu lalea, lalea-tripodă, arbore intermediar și bol – colivie cu bile – îmbinări interioare de cursă. Comparând aceste caracteristici geometrice prezentate cu cele considerate de Steinwede [B.G.14] (p. 111), se poate concluziona că există acord. Folosind software-ul AUTOCAD,  $J_{1T}$ ,  $J_{2T}$  și  $\chi_{nT}$  au fost calculate pe baza caracteristicilor geometrice directe ( $L_T$ ,  $L_{AT}$ ,  $L_{Ms}$ ,  $R_{TTR}$ ,  $d_{AT}$ ,  $d_{CT}$ ,  $S_T$ ) și a geometriei generale a lalelei globale.

Tabelul 3.1. Caracteristicile geometriei unei îmbinări lalea-tripodă

$L_T$ [m]	$L_{AT}$ [m]	$L_{Ms}$ [m]	$R_{TTR}$ [m]	$d_{AT}$ [m]	$d_{CT}$ [m]	$S_T$ [m <sup>2</sup> ]	$0.5(J_{1T}+J_{2T})$ [m <sup>4</sup> ]	$X_{nT}$
0.095	0.065	0.470	0.035	0.027	0.049	0.019	$9.1531 \times 10^{-7}$	0.15

În tabelul 3.2 sunt prezentate proprietățile fizice ale materialului îmbinării lalea-tripodă și lalea globală precum și amplitudinea cuplului maxim transmis de motorul mașinii, având în vedere că materialul este oțel-fontă. Comparând aceste proprietăți ale materialelor prezentate cu cele considerate de Steinwede [B.G.14] (p. 112), se poate concluziona că ele sunt în foarte strânsă legătură.

Tabelul 3.2. Proprietățile materiale ale articulației lalele-trepied și ale lalelei globale. Sarcina cuplului

P [kg/m <sup>3</sup> ]	G [kg/m <sup>3</sup> ]	Rigiditate la torsiune [Nm/rad]	$\zeta_1$	Cuplul motor
7850	77.3	$1.11 \times 10^4$	0.0016-0.0318	580

Folosind datele prezentate în tabelele 3.1 și 3.2 din ecuația (3.41), variația în  $\Omega_1$ , frecvența naturală de torsiune a lalelei globale, a fost calculată în funcție de unghiul  $\beta_1$  folosind software-ul MATLAB. Datele sunt prezentate în figurile 3.7 și 3.8.

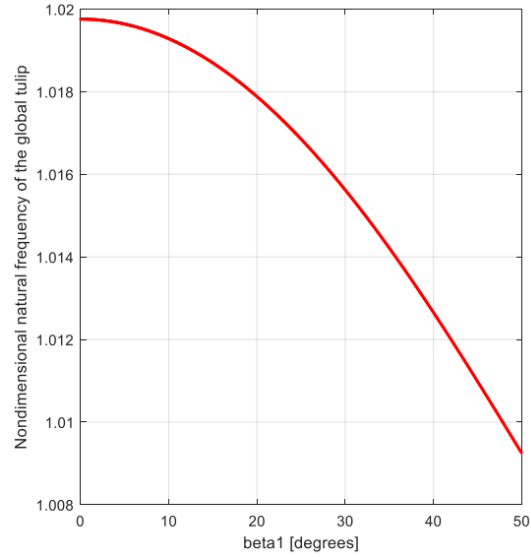
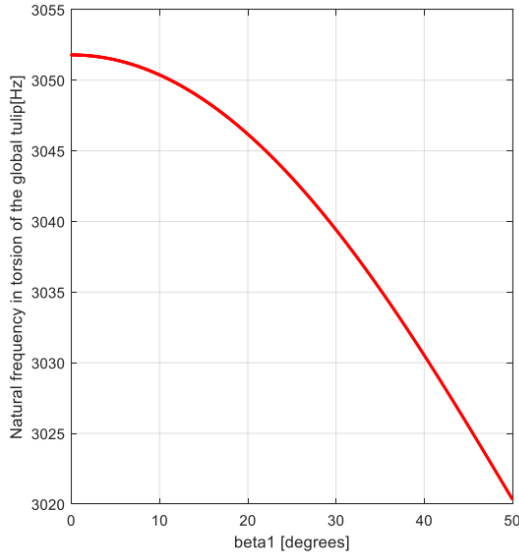


Fig. 3.7 Variația lui  $\overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_1(\beta_1)$ . [B.G.26] Fig. 3.8 Variația lui  $\frac{\overline{\Omega}_1}{\overline{\Omega}_1(0)} = \frac{\overline{\Omega}_1 \beta_1}{\overline{\Omega}_1(0)}$  [B.G.26]

Comparând aceste rezultate teoretice cu cele prezentate în literatura de specialitate [B.G.14] (pp. 119, 125, 138, 139), se poate concluziona că există acordul modelului cu datele experimentale. Pentru a calcula amplitudinea vibrațiilor parametrice neliniare de torsiune forțată în regiunea rezonanței parametrice principale a fost utilizată metoda echilibrului armonic [B.C.3.3], pentru ecuația (3.40) în căutarea soluției date de ecuație.

$$\varphi_1(t) = a \cos \frac{nt}{2}, \quad \Phi_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.45)$$

unde  $\eta \cong 2\overline{\Omega}_1(0)$  este frecvența de excitație și  $\Phi_1$  este amplitudinea vibrației la starea staționară în regiunea rezonanței parametrice principale pentru lăua globală. Metoda este foarte eficientă și dă rezultate bune, așa cum se menționează în [B.C.3.4], fiind chiar și acum după jumătate de secol o metoda aplicată. Înainte de a introduce ecuația (3.45) în ecuația (3.40), este necesar să se efectueze câteva manipulări matematice ale ecuației (3.40), cum ar fi dezvoltarea, în seria Maclaurin, a următoarelor funcții în jurul valorii 0:

$$\cos 2\varphi_1 \cong 1 - 2\varphi_1^2 \quad (3.46)$$

$$\sin 3\varphi_1 \cong 3\varphi_1 - 4,5\varphi_1^3 \quad (3.47)$$

$$\sqrt{\frac{1 + a_1 \cos \varphi_1}{(1 + a_2 \cos 2\varphi_2)(1 + x_{GTn} \cos 2\varphi_2)}} \cong \sqrt{A_1} + \sqrt{B_1} - \frac{1}{2} (a_2 \sqrt{A_1} + x_{GTn} \sqrt{B_1}) 1 - 2\varphi_1^2 \quad (3.48)$$

unde termenii  $A_1$  și  $B_1$  sunt exprimați în Anexa A. Introducând acum soluția dată de ecuația (3.45) în ecuația (3.40) și echilibrând termenii în  $\cos\left(\frac{nt}{2}\right)$  și  $\sin\left(\frac{nt}{2}\right)$  necunoscutele  $a$  și  $b$  rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} a \left[ \frac{A_1}{1+a_2y} + \frac{B_1+y}{1+x_{GTn}y} - \frac{n}{2\Omega_1} \right] + b [\alpha_1 - \alpha_2 y] \left[ \frac{n}{2\Omega_1} \right] = 0 \\ a [-\alpha_1 + \alpha_2 y] \left[ \frac{n}{2\Omega_1} \right] + b \left[ \frac{A_1}{1+a_2y} + \frac{B_1+y}{1+x_{GTn}y} - \frac{n}{2\Omega_1} \right] = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

unde  $y$  este o variabilă în schimbare a amplitudinii necunoscute  $\Phi_1$  exprimată prin relație

$$y = 1 - 2\Phi_1^2 \quad (3.50)$$

unde termenul  $\gamma$  este participarea excitației motorului dată de ecuație

$$\gamma = \frac{\overline{M}_e}{I_{x_2GT}} \quad (3.51)$$

iar termenii  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  sunt prezentați în Anexa A, în timp ce termenii de ordin superior sunt neglijați în aproximarea de ordinul întâi [B.G.16] (pp. 425–426), [B.C.3.3] (pp. 63–68). Asigurând o soluție netrivială a sistemului ecuației (3.49) rezultă următoarea ecuație, dată prin setarea determinantului sistemului (3.49) la zero:

$$\left[ \frac{A_1}{1+a_2y} + \frac{B_1+y}{1+x_{GTn}y} - \frac{n}{2\Omega_1} \right]^2 + [\alpha_1 - \alpha_2 y]^2 \left[ \frac{n}{2\Omega_1} \right]^2 = 0 \quad (3.52)$$

Ecuația (3.52) poate fi transformată într-o ecuație algebrică bi-sectică în necunoscutul  $y$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \bar{\eta}^2 y^6 + \Gamma_2 \bar{\eta}^2 y^5 + \Gamma_3 \bar{\eta}^2 y^4 + [\Gamma_4 \bar{\eta}^2 + \Gamma_5 \bar{\eta}^2] y^3 + [\Gamma_6 \bar{\eta}^2 + \Gamma_7 \bar{\eta}^2 + \Gamma_8 \bar{\eta}^2] y^2 + \\ + [\Gamma_9 \bar{\eta}^2 + \Gamma_{10} \bar{\eta}^2 + \Gamma_{11} \bar{\eta}^2] y + \Gamma_{12} \bar{\eta}^2 + \Gamma_{13} \bar{\eta}^2 + \Gamma_{14} \bar{\eta}^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Unde,  $\eta = \eta 2\Omega_1$  este frecvența de excitație adimensională în regiunea rezonanței parametrice principale, iar termenii  $\Gamma_1$  până la  $\Gamma_{14}$  sunt prezentați în Anexa A.

Amplitudinea vibrațiilor parametrice neliniare de torsiune forțată în regiunea parametrilor principali de rezonanță pentru lalea globală, în funcție de frecvența de excitație adimensională, este dată de ecuație:

$$\Phi_1(\bar{\eta}) = \sqrt{\frac{1-y}{2}} \quad (3.54)$$

unde  $y$  reprezintă soluția ecuației (3.53).

Ecuațiile (3.53) și (3.54) au fost utilizate împreună cu toți termenii exprimați în Anexa A pentru a dezvolta software-ul MATLAB pentru calcularea amplitudinii vibrațiilor parametrice neliniare de torsiune forțată în regiunea rezonanței parametrice principale pentru laleaua globală pentru starea de echilibru a vibrațiilor de torsiune ale arborelui planetar al automobilului.



În aceeași manieră matematică, amplitudinea  $\Phi_3$  a vibrațiilor parametrice neliniare de torsiune forțată pentru bolul global poate fi calculată în funcție de frecvența de excitație adimensională  $\eta = \eta 2\Omega_3$  în regiunea rezonanței parametrice principale  $\eta \approx 2\Omega_3$  pentru vibrațiile de torsiune în regim de echilibru ale arborelui planetar al autovehiculului.

Primele rezultate obținute sunt reprezentate de frecvența naturală de torsiune a arborelui intermediar dată de ecuația modificată (3.36).

$$v_n = \frac{\omega n}{2\pi} = \frac{n}{2l_{Ms}} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.55)$$

Folosind această ecuație, primele trei frecvențe naturale pentru arborele intermediar sunt prezentate în Tabelul 3.

Tabelul 3.3. Primele trei frecvențe naturale în torsiunea arborelui intermediar

Intrare	1	2	3
$v_n$ [Hz]	3338.31	6676.63	10014.94

Ecuația (3.55) se conformează fără îndoială cu datele experimentale [B.C.3.23] (p. 281). Acest lucru este, de asemenea, în conformitate cu experimentele lui Steinwede care impun o investigare a vibrației forțate de torsiune a unui arbore planetar în intervalul 1–15 kHz [B.G.14] (p. 119). Celelalte studii din literatura de specialitate au constatat, prin experimente, că intervalul de frecvențe naturale libere în torsiunea arborelui planetar [B.G.22] în intervalul 131–906 Hz sunt, de fapt, frecvențe subarmonice, care au ca rezultat înțelegerea greșită a fenomenelor dinamice ale arborele planetar pentru autovehicule rutiere.

Din analizele din figurile 3.7 și 3.8, variația frecvenței naturale de torsiune a lalelei globale este limitată la frecvența naturală de torsiune a arborelui intermediar fiind în intervalul 3020–3052 Hz (vezi Figura 3.7) și frecvența naturală adimensională în torsiunea lalelei globale este în intervalul 1,009–1,0198. Din păcate, nu există experimente publicate care să investigheze frecvența naturală liberă în torsiune doar pentru lalea globală.

În figurile 3.9–3.14 este prezentată variația amplitudinii adimensionale pentru vibrația parametrică neliniară de torsiune forțată în regiunea rezonanței parametrice principale pentru lalea globală, aceasta fiind în jur de 5,985 kHz. Amplitudinea adimensională prezentată în graficele din figurile 3.9–3.14 reprezintă amplitudinea normalizată în raport cu valoarea sa maximă pentru  $\beta_1 = 5^\circ$ ,  $\zeta_1 = 0,0016$ ,  $\chi_{nT} = 0,15$ . Analizând figurile 3.9–3.14, se poate remarca că pentru unele cazuri avem o manifestare de „arcuri slabe” cu două ramuri pentru  $\eta \leq 1,8\Omega_1(0)$  care indică prezența interacțiunii între rezonanța parametrică principală și rezonanța primară, în timp ce pentru  $\eta \geq 1,8\Omega_1(0)$ , există doar o ramură tip „arcuri dure”, ceea ce indică manifestarea rezonanței parametrice principale pure pentru laleaua globală [B.C.3.5] (pp. 132–160). Aspectul evidențiat de figurile 3.9–3.11 este că odată cu creșterea unghiului  $\beta_1$ , valoarea maximă a amplitudinii adimensionale scade de la 1 la 0,35. Acest aspect este de acord cu datele experimentale din literatura de specialitate [B.G.14] (pp. 130–144). Figurile 3.11–3.14 indică faptul că, pentru un unghi  $\beta_1 = 15^\circ = \text{const.}$ , creșterea raportului de amortizare  $\zeta_1$  în intervalul 0,008–0,0318 induce o scădere a amplitudinii maxime adimensionale de la 0,35 la 0,22 și, astfel, putem concluziona că modelul este mult mai sensibil la variația geometrică a arborelui planetar decât la efectele de amortizare.

Prin experimente, Steinwede a demonstrat că comportamentul dinamic parametric neliniar al arborilor planetari este ca cel al sistemelor cu angrenaje [B.G.14] (p. 117), și de aceea observăm fenomene similare de pitting în interiorul lalelei și în bolul articulațiilor lalea–tripodă și bol–colivie cu bile–nucă interioară [B.G.14] (pp. 88–94). Mai mult, se poate observa din figurile 3.11–3.14 creșterea raportului de amortizare  $\zeta_1$  în intervalul 0,008–0,0318 induce o creștere între ramurile amplitudinii pentru ambele zone de „arc moale” și „arc dur”, fiind o manifestare a multiplelor „salturi” dintre ramurile de amplitudine, unde se știe că ramura inferioară este de obicei instabilă, în timp ce ramura superioară este stabilă [B.G.16] (pp. 426–429), [B.C.3.5] (pp. 132–160) . Acest aspect va „conduce” la un comportament dinamic printr-o dinamică haotică care are, ca efect practic, un efect de accelerare asupra fenomenelor de pitting, așa cum a menționat Steinwede [B.G.14] (pp. 88–94), sau, în cel mai rău caz, are ca rezultat manifestarea fisurilor urmată de cedarea (ruperea) lalelei globale [B.G.14] (p. 89).

Din păcate, nu există studii publicate care să analizeze, în detaliu, comportamentul dinamic al fiecărui element al arborelui planetar pentru autovehicule rutiere: lalea, lalea globală, bol, bol global și arbore intermediar, în afară de [B.G.14], unde toate studiile au analizat comportamentul dinamic global al arborelui planetar al automobilului. Chiar și așa, există o confuzie uriașă în ceea ce privește interpretarea datelor experimentale din cauza neînțelegerii unor fenomene globale neliniare specifice, cum ar fi în [B.G.22].

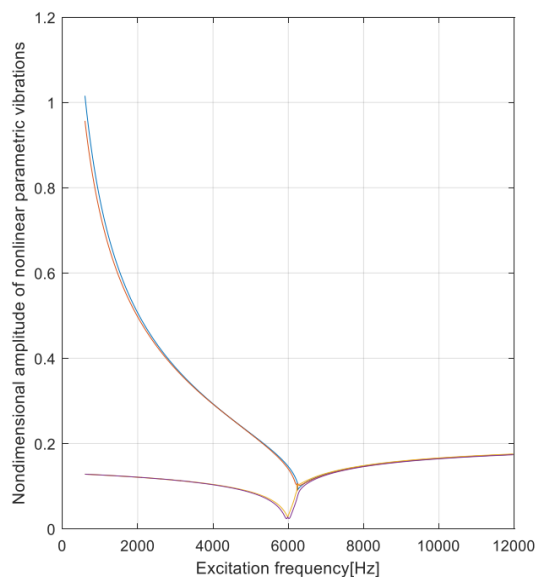


Fig. 3.9 Amplitudine adimensională pentru  $\beta_1 = 5^\circ$ ,  $\zeta_1 = 0,0016$ ,  $\chi_{nT} = 0,15$ . [B.G.26]

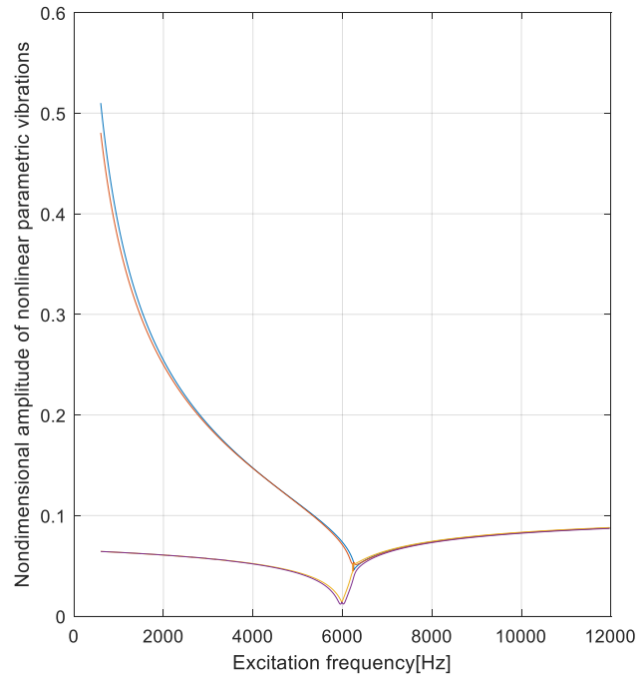


Fig. 3.10 Amplitudine nondimensională pentru  $\beta_1 = 10^\circ$ ,  $\zeta_1 = 0,0016$ ,  $\chi_{IT} = 0,15$ . [B.G.26]

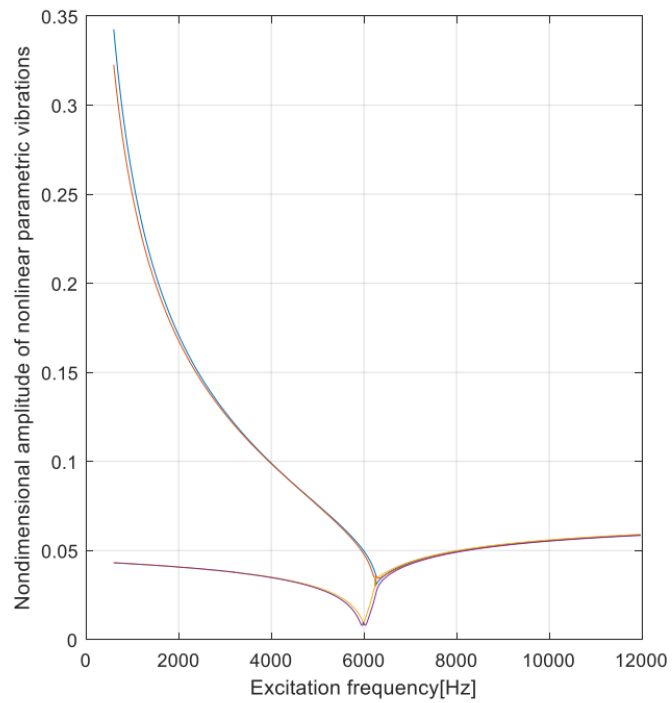


Fig. 3.11 Amplitudine adimensională pentru  $\beta_1 = 15^\circ$ ,  $\zeta_1 = 0,0016$ ,  $\chi_{IT} = 0,15$ . [B.G.26]

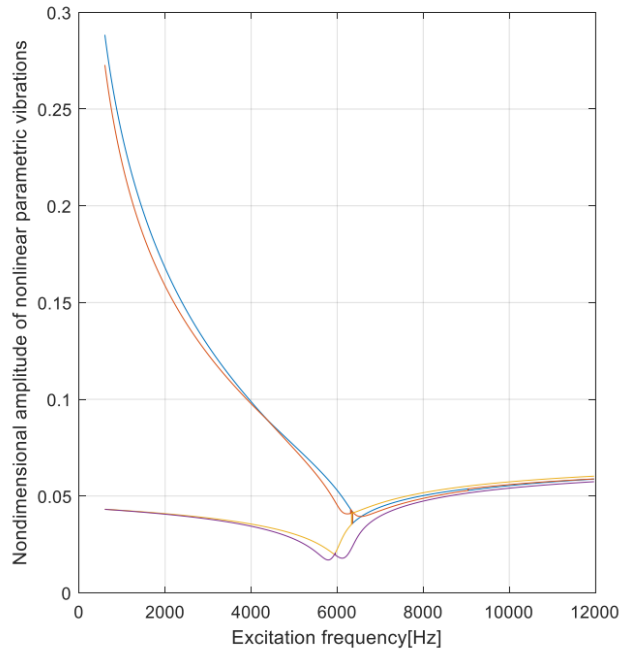


Fig. 3.12 Amplitudine adimensională pentru  $\beta_1 = 15^\circ$ ,  $\zeta_1 = 0,008$ ,  $\chi_{nT} = 0,15$  [B.G.26]

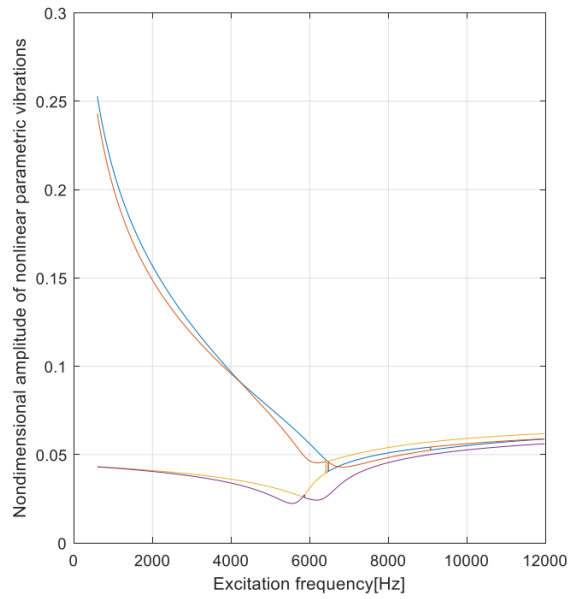


Fig. 3.13 Amplitudine nondimensională pentru  $\beta_1 = 15^\circ$ ,  $\zeta_1 = 0,0159$ ,  $\chi_{nT} = 0,15$  [B.G.26]

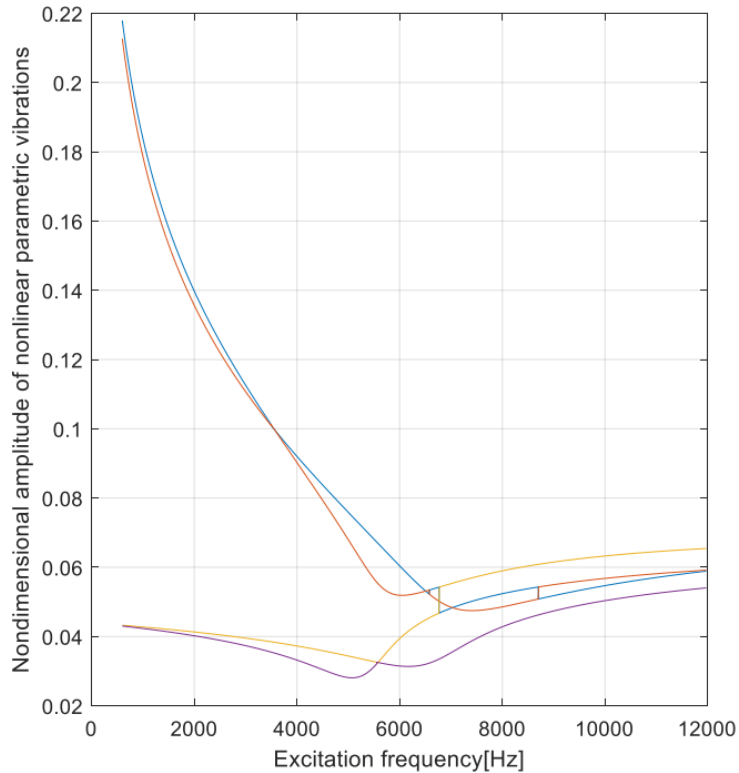


Fig. 3.14 Amplitudine adimensională pentru  $\beta_1 = 15^\circ$ ,  $\zeta_1 = 0,0318$ ,  $\chi_{IT} = 0,15$  [B.G.26]

Investigația de față introduce un model complex pentru vibrațiile de torsiune ale arborelui planetar pentru autovehicule rutiere, model care ia în considerare majoritatea fenomenelor observate în practica industrială și exploatarea mașinilor precum:

- neuniformitatea izometriei geometrice și cinematice a arborelui planetar;
- neuniformitatea momentelor de inerție geometrice și de masă ale secțiunii transversale pentru leaaua, tripoda, nuca interioară și bolul
- rigiditatea și amortizarea articulațiilor arborelui planetar pentru autovehicule rutiere leaaua-tripodă-ax intermediar și arbore intermediar-nucă-colivie cu bile-bol;
- excitația armonică a arborelui planetar pentru autovehicule rutiere din cauza motorului mașinii;
- excitația impulsivă a arborelui planetar pentru autovehicule rutiere din cauza excitației drumului.

În plus, modelul permite dezvoltarea viitoarelor direcții de cercetare pentru investigarea rezonanțelor primare, super-armonice, sub-armonice, parametrice principale, combinate, interne și simultane, precum și pentru investigarea stabilității pentru mișcarea staționară, precum și nestaționară. Prin urmare, acest model de comportament dinamic la torsiune pentru arborele planetar pentru autovehicule rutiere poate fi utilizat în etapele incipiente de proiectare, precum și în predicția durabilității arborilor planetari. Mai mult, este important ca modelul să fie adăugat în algoritmul de proiectare pentru designul elementelor de confort ale autovehiculului pentru a lua în considerare în mod adecvat acest tip de comportament dinamic, care induce excitații structurii mașinii, așa cum este menționat în literatura de specialitate [B.G.19].

## Capitolul 4. Modele de vibrații forțate de încovoiere ale arborelui planetar

În capitolul acesta este prezentată o tehnică de perturbare, și anume metoda asimptotică (AM)<sup>1</sup>[B.C.4.1], pentru a investiga rezonanța parametrică principală pentru vibrațiile forțate de încovoiere-forfecare ale unui arbore planetar pentru autovehicule rutiere, metoda asimptotică fiind un instrument puternic pentru investigarea vibrațiilor induse prin șocuri (excitații impulsive) așa cum a menționat Webber în literatură [B.C.4.2]. Pentru a investiga o astfel de regiune de rezonanță, a fost proiectat un PCM<sup>2</sup> (model fizic consistent) al vibrațiilor de încovoiere pentru un arbore planetar, conceput pentru SUV-uri grele, induse de excitațiile impulsive ale drumului, ținând cont de următoarele aspecte ale fenomenului:

- articulațiile arborelui planetar pentru autovehicule rutiere sunt quasi-izometrice pentru viteza unghiulară[B.G.1], chiar și în general este considerată ca CVJ (Constant Velocity Joint).
- efectul neuniformității pentru momentele de inerție geometrice axiale și momentele de inerție axiale de masă ale articulațiilor care variază în funcție de unghiul de răsucire al fiecărui element al arborelui planetar și de efectul rigidității la încovoiere și la forfecare, precum și de amortizarea la încovoiere și forfecare pentru fiecare îmbinare a arborelui de antrenare.

Excitațiile vibrațiilor forțate de încovoiere ale arborelui planetar auto se datorează excitațiilor impulsiv-șoc care acționează asupra roții auto, fiind o excitație indusă de drum[B.C.4.4].

În literatura de specialitate [B.G.18], neuniformitatea proprietăților izometrice ale arborilor planetari pentru autovehicule rutiere este deja un fapt recunoscut de mai bine de o jumătate de secol, a cărui realitate a fost demonstrată în experimentele efectuate de Steinwede pentru teza sa de doctorat [B.G.14](pp. 68- 97). Această neuniformitate în proprietățile izometrice ale arborelui planetar este, fără îndoială, principala cauză a parametrilor neliniari vibrațiile arborilor planetari în intervalul 0,1–12 kHz, conform rezultatelor experimentale documentate în literatură [B.G.14] (pp. 98-123). Mazzei și Scott, primii cercetători care au luat în considerare fenomenele dinamice unice ale arborilor planetari, au îmbunătățit comportamentul dinamic parametric neliniar al unei articulații universale în lucrarea lor [B.G.12]. Dovezile experimentale pentru neuniformitatea transmisiei arborelui planetar sunt prezentate și evidențiate de Browne și Palazzolo [B.G.13]. Mai mult, în Feng, Rakheja și Shangguan [B.G.15], optimizarea forței axiale generate (GAF) a unui sistem de arbore planetar pentru autovehicule rutiere cu intervalul de incertitudine a fost tratată fără a lua în considerare izometria arborelui planetar pentru autovehicule rutiere, care nu mai este izometrică.

Alugongo, în [B.G.21], a continuat investigația lui Mazzei și Scott [B.G.12] și Browne și Palazzolo [B.G.13] dar numai pentru un cardan, care a fost deja demonstrat, prin teorie și experimente, că induce vibrații parametrică. Xu, Zhu și Xia au analizat caracteristicile de amplitudine-frecvență ale vibrației de torsiune pentru un întreg grup de propulsie auto [B.G.22] folosind un model cu 29 de grade de libertate. În [B.G.24] este prezentată o abordare pentru

---

<sup>1</sup> AM – Metoda asimptotică

<sup>2</sup> PCM - Model fizic consistent

vibrațiile neliniare de torsiune ale unui tren de rulare auto cu trei grade de libertate (DOF), unde modelul a fost calibrat de rigiditatea la torsiune și momentul de frecare a sistemului de ambreiaj.

Prezentul capitol investighează stabilitatea dinamică în regiunea rezonanței parametrice principale pe baza PCM proiectată a arborelui planetar al autovehiculului pentru vibrațiile forțate de încovoierie induse de excitația impulsiv-șoc a drumului.

Un arbore planetar este un mecanism care transmite o sarcină de cuplu de la cutia de viteze la roată. Modelul general al unui astfel de arbore planetar auto, proiectat pentru SUV-uri grele, este prezentat în figura 4.1.

Este alcătuit din:

- a) articulația bol-bile-colivie-nucă fixată asamblată cu roata mașinii,
- b) axa arborelui intermediar,
- c) lalea-articulație tripodă ce permite glisarea axială a tripodei în lalea și glisarea asamblată în cutia de viteze.

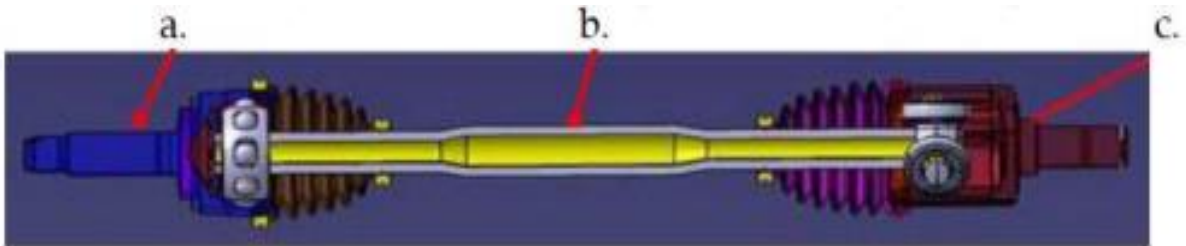


Figura 4.1 Arbore planetar pentru autovehicule rutiere [B.C.4.4]

În figura 4.2 sunt prezentate reprezentarea schematică a unui arbore planetar auto în cele trei axe ale coordonatelor carteziene  $X_1Y_1Z_1$  atașat lalelei,  $X_2Y_2Z_2$  atașat la arborele intermediar și  $X_3Y_3Z_3$  atașat la articulația bol, care are următoarele mișcări rigide:

- a) rotație cu unghiul  $\varphi_1$  al lalelei privind axa  $X_1$ ,  $\varphi_1 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- b) rotație cu unghiul  $\varphi_2$  al arborelui intermediar referitor la axa  $X_2$ ,  $\varphi_2 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- c) rotire cu unghiul  $\varphi_3$  al bolului referitor la axa  $X_3$ ,  $\varphi_3 = 0 \dots n_1\pi$ ;
- d) rotația relativă a axei longitudinale a arborelui median (dată de direcția axei  $X_2$ ) privind direcția longitudinală a lalelei (furnizată de direcția axei  $X_1$ ), cu  $\beta_1$  (unghiul spațial dintre axa  $X_1$  și  $X_2$ ) privind axa  $Z_1$ ,  $\beta_1$  fiind unghiul dintre direcția longitudinală a lalelei și direcția longitudinală a arborelui intermediar,  $\beta_1 = 0^\circ \dots 15^\circ$ ;
- e) rotația relativă a axei longitudinale a bolului (dată de direcția axei  $X_3$ ) referitoare la direcția longitudinală a arborelui intermediar (furnizată de direcția axei  $X_2$ ), cu  $\beta_2$  (unghiul spațial dintre axa  $X_2$  și  $X_3$ ) privind axul  $Y_2$ ,  $\beta_2$  fiind unghiul dintre direcția longitudinală a arborelui intermediar și direcția longitudinală a bolului,  $\beta_2 = 0^\circ \dots 47^\circ$ .

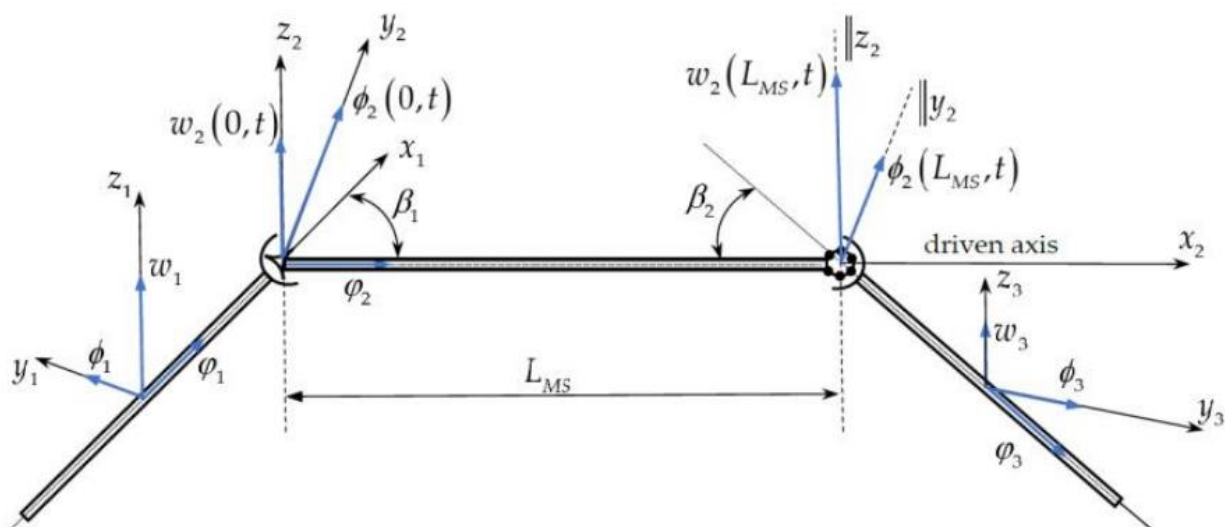


Figura 4.2 Reprezentare schematică a unui arbore planetar pentru autovehicule rutiere [B.C.4.4]

Pentru a calcula ecuațiile vibrațiilor forțate de încovoiere pentru arborele planetar, folosind abordarea variațională a principiului Hamilton, este necesar să se reducă momentele de inerție axiale ale masei secțiunii transversale și momentele de inerție geometrice axiale ale secțiunii transversale  $J_{Y1GT}$ ,  $J_{Z1GT}$ , pentru lăua globală (axa lăuei și lăua) referitoare la axa longitudinală a arborelui intermediar  $X_2$  în centrul secțiunii transversale a tripodei fixat pe arborele intermediar, precum și momentele de inerție ale masei axiale ale secțiunii  $I_{Y3GB}$   $I_{Z3GB}$  și momentele geometrice axiale de inerție ale secțiunii transversale  $J_{Y3GB}$   $J_{Z3GB}$  pentru bolul asamblat (axa bolului și bolul) privind axa longitudinală a arborelui intermediar  $X_2$  în centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arborele intermediar [B.G.27].

În designul său, lăua asamblată este compusă din două părți majore, axul lăuei și corpul lăuei, care au geometrie diferită și prin urmare, masă și momente geometrice de inerție diferite. Astfel, calculele acestor momente axiale de inerție ale secțiunii transversale și ale momentelor geometrice axiale de inerție ale secțiunii transversale sunt luate în considerare: unghiul  $\beta_1$  între  $X_1$  și  $X_2$  (vezi figura 4.2, rotație privind  $Z_1$  paralel cu  $Z_2$ ), distanța de la centrul de masă al axului lăuei până la centrul secțiunii transversale ale tripodei fixate pe arborele intermediar, distanța de la centrul de masă al lăuei până la centrul secțiunii transversale a tripodei fixate pe arborele intermediar, unghiul  $\beta_2$  dintre  $X_2$  și  $X_3$  (a se vedea figura 4.2, rotația în ceea ce privește  $Z_3$  paralel cu  $Z_2$ ), distanța de la centrul de masă al axului bolului până la centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arborele intermediar, distanța de la centrul de masă al bolului la centrul secțiunii transversale a pistei interioare fixată pe arborele intermediar.

Astfel, se obțin momentele geometrice axiale de inerție ale secțiunii transversale pentru lăua asamblată  $J_{Y2GT}$ ,  $J_{Z2GT}$ , redusă la axa  $Y_2, Z_2$  a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale a tripodei fixate pe arbore intermediar și momentele de inerție a masei axiale ale secțiunii transversale pentru lăua asamblată  $I_{Y2GT}$ ,  $I_{Z2GT}$ , reduse la axa  $Y_2, Z_2$  a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale ale arborelui intermediar, rezultă ecuațiile:



$$J_{Y_2GT} = J_{Y_2T} + J_{Y_2AT}; J_{Z_2GT} = J_{Z_2T} + J_{Z_2AT}; I_{Y_2GT} = J_{Y_2T}\rho L_T + J_{Y_2AT}\rho L_{AT}$$

$$I_{Z_2GT} = J_{Z_2T}\rho L_T + J_{Z_2AT}\rho L_{AT}; \chi_{nT} = \frac{J_{1T} - J_{2T}}{J_{1T} + J_{2T}} \quad (4.1)$$

$$J_{Y_2T} = 0.5(J_{1T} + J_{2T})\left[1 + \sin^2 \beta_1 + \chi_{nT} \cos^2 \beta_1\right] + \frac{S_T L_T^2}{12} \cos^2 \beta_1 + S_T (d_{CT})^2$$

$$J_{Z_2T} = 0.5(J_{1T} + J_{2T})\left[1 - \chi_{nT} \cos(\varphi_1)\right] + \frac{S_T L_T^2}{12} + S_T (d_{CT})^2 \quad (4.2)$$

$$J_{Y_2AT} = \frac{\pi d_{AT}^2}{64} (1 + \sin^2 \beta_1) + \frac{\pi d_{AT}^2}{4} \frac{L_{AT}^2}{12} \cos^2 \beta_1 + \frac{\pi d_{AT}^2}{4} (L_T + 0,5L_{AT})^2$$

$$J_{Z_2AT} = 0.5(J_{1T} + J_{2T})\left[1 - \chi_{nT} \cos(\varphi_1)\right] + \frac{S_T L_T^2}{12} + S_T (d_{CT})^2 \quad (4.3)$$

unde:

- $J_{1T}, J_{2T}$  sunt principalele momente geometrice de inerție referitoare la secțiunea transversală a lălelei în masa centrală,
- $J_{Y_2T}, J_{Y_2AT}, J_{Z_2T}, J_{Z_2AT}$  sunt momentele geometrice axiale ale inerției lălelei și momentele geometrice axiale de inerție ale axei lălelei reduse la axa  $Y_2, Z_2$  a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale al tripodei fixate pe arborele intermediar,
- $\rho$  este densitatea de masă în volum a materialului arborelui planetar,
- $d_{CT}$  este distanța dintre masa centrală a lălelei și centrul tripodei,
- $S_T$  este secțiunea transversală a ariei lălelei,
- $\chi_{nT}$  este neuniformitatea momentelor geometrice de inerție în secțiunea transversală a lălelei,
- $L_T$  este lungimea lălelei,
- $L_{AT}$  este lungimea axei lălelei,
- $d_{AT}$  este diametrul axei lălelei
- $\varphi_1$  este unghiul de rotație al lălelei în raport cu axa  $X_1$ .

În designul său, bolul asamblat este format din două părți majore: bolul și axul bolului, care au geometrie diferită și prin urmare, masă și momente geometrice de inerție diferite. Astfel, calculele au fost efectuate folosind variația momentelor de inerție geometrice axiale privind axa concurentă și axa paralelă (Teorema Steiner). În aceeași manieră matematică, se obțin momentele de inerție geometrice axiale ale secțiunii transversale pentru bolul asamblat  $J_{Y_2GB}, J_{Z_2GB}$  redus la axa  $Y_2, Z_2$  a arborelui median în centrul articulației în secțiunea pistei interioare fixate pe arbore intermediar și momentele de inerție ale masei axiale ale secțiunii transversale pentru bolul asamblat  $I_{Y_2GB}, I_{Z_2GB}$  reduse la axa  $Y_2, Z_2$  a arborelui intermediar în centrul lui secțiunea transversală a pistei interioare fixată pe arborele intermediar, dată de ecuațiile:

$$J_{Y_2GB} = J_{Y_2B} + J_{Y_2AB}; J_{Z_2GB} = J_{Z_2B} + J_{Z_2AB}; I_{Y_2GB} = J_{Y_2B}\rho L_B + J_{Y_2AB}\rho L_{AB}$$

$$I_{Z_2GB} = J_{Z_2B} \rho L_B + J_{Z_2AB} \rho L_{AB}; \chi_{nB} = \frac{J_{1B} - J_{2B}}{J_{1B} + J_{2B}} \quad (4.4)$$

$$J_{Y_2B} = 0.5(J_{1B} + J_{2B}) \left[ 1 + \sin^2 \beta_1 + \chi_{nB} \cos^2 \beta_1 \right] + \frac{S_B L_B^2}{12} \cos^2 \beta_1 + S_B (d_{CB})^2$$

$$J_{Z_2B} = 0.5(J_{1B} + J_{2B}) \left[ 1 - \chi_{nB} \cos(\varphi_1) \right] + \frac{S_B L_B^2}{12} + S_B (d_{CB})^2 \quad (4.5)$$

$$J_{Y_2AB} = \frac{\pi d_{AB}^2}{64} (1 + \sin^2 \beta_1) + \frac{\pi d_{AB}^2}{4} \frac{L_{AB}^2}{12} \cos^2 \beta_1 + \frac{\pi d_{AB}^2}{4} (L_B + 0,5L_{AB})^2$$

$$J_{Z_2B} = 0.5(J_{1B} + J_{2B}) \left[ 1 - \chi_{nB} \cos(\varphi_1) \right] + \frac{S_B L_B^2}{12} + S_B (d_{CB})^2 \quad (4.6)$$

unde:

- $J_{Y2B}, J_{Y2AB}, J_{Z2B}, J_{Z2AB}$  sunt momentele geometrice axiale de inerție ale bolului și momentele geometrice axiale de inerție ale axei bolului reduse la axa  $Y_2, Z_2$  a arborelui intermediar în centrul secțiunii transversale a liniei interioare fixat pe arborele intermediar,
- $d_{CB}$  este distanța dintre masa centrală a bolului și centrul pistei interioare,
- $S_B$  este secțiunea transversală a zonei bolului,
- $\chi_{nB}$  este neuniformitatea momentelor geometrice de inerție în secțiunea transversală a lalelei,
- $L_B$  este lungimea bolului,
- $L_{AB}$  este lungimea axei bolului,
- $d_{AB}$  este diametrul axei bolului
- $\varphi_3$  este unghiul de rotație al lalelei în raport cu axa  $X_3$ .

După cum se poate observa analizând relațiile 4.1-4.6, momentele geometrice axiale de inerție ale secțiunii transversale  $J_{Y2GT}, J_{Z2GT}$  pentru lăea globală și momentele geometrice axiale de inerție ale secțiunii transversale  $J_{Y2GB}, J_{Z2GB}$ , pentru bolul asamblat, ambele reduse la axa mediană a arborelui  $Y_2, Z_2$ , care conține efectele: unghiul de răsucire al lalelei  $\varphi_1$  precum și unghiul de răsucire al bolului  $\varphi_3$ , neuniformitatea momentelor geometrice de inerție ale secțiunii transversale atât pentru lăea, cât și pentru bol  $\chi_{nT}$  și  $\chi_{nB}$ , unghiul dintre direcția longitudinală a lalelei și direcția longitudinală a arborelui intermediar  $\beta_1$ , unghiul dintre direcția longitudinală a arborelui intermediar și direcția longitudinală a bolului  $\beta_2$ , lungimea lalelei și lungimea bolului, poziția centrului de masă al axei lalelei și lăea față de centrul tripodei, poziția centrului de masă al axei bolului și al bolului în raport cu centrul cursei interioare, momentele geometrice principale de inerție ale secțiunii transversale pentru lăea  $J_{1T}, J_{2T}$ , momentele geometrice principale de inerție ale secțiunea transversală pentru bolul  $J_{1B}, J_{2B}$ ,  $d_{AT}$  diametrul axei lalelei și  $d_{AB}$  diametrul axei bolului [B.G.27]. Model fizico-matematic este un model dinamic pentru mișcările vibrațiilor de încovoiere forțată ale elementelor prezentate în figura 4.3.

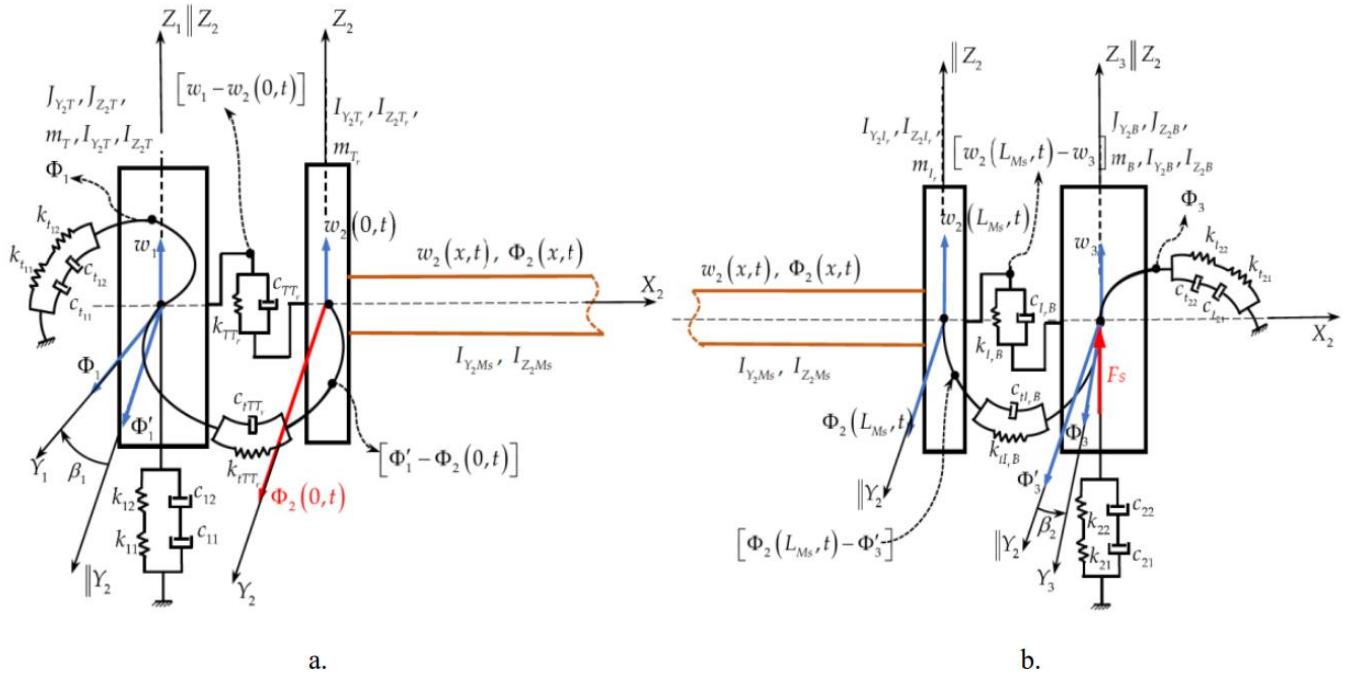


Fig. 4. 3. a. Articulația leala-tripodă: leala asamblată, articulația Lalea-Tripodă, Arbore  
b. Articulația bol: Arbore, Articulația bol-colivie-bile, Bol asamblat [B.C.4.4]

Analizând literatura deja prezentată în introducere, se poate remarca că nu au fost efectuate cercetări detaliate asupra comportamentului dinamic al fiecărui element. Modelul dinamic îmbunătățit de prezenta lucrarea permite investigarea comportamentului dinamic al fiecărei componente al arborelui planetar, a mecanismelor interne de transmisiile de excitație prin elementele arborelui planetar, precum și cauzele producerii de micro-fisuri în elementele arborelui planetar, după cum relevă datele experimentale din literatură [B.G.14] (pp. 88–94).

Mișcările prezentate în figura 4.3, au trei elemente: o leala – arbore intermediar – bol legat prin două articulații, articulația leala – tripodă (montat pe arborele intermediar (a se vedea figura 4.2) și articulația bolului interior (montat la cealaltă parte a arborelui intermediar (a se vedea figura 4.2)). Acestea au următoarele caracteristici dinamice:

1. Laleaua are o rigiditate  $k_1$ , dată de arcurile în serie  $k_{11}, k_{12}$ , (vezi figura 4.3.a), și amortizarea  $c_1$ , asigurată de amortizoarele seriale  $c_{11}, c_{12}$  pentru mișcarea rigidă de vibrație la încovoiere a lelei în ceea ce privește axa  $Z_2$  și o rigiditate  $k_{t1}$ , dată de arcurile în serie  $k_{t11}, k_{t12}$  precum și amortizarea  $c_{t1}$ , asigurată de amortizoarele seriale  $c_{t11}, c_{t12}$ , pentru vibrația de încovoiere unghiulară, mișcare rigidă a lelei în ceea ce privește axa  $Y_2$ , dată de următoarele relații:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{3EJ_{Z_2TA}}{L_{TA}^3}; k_{12} = \frac{3EJ_{Z_2TB}}{L_{TB}^3}; k_1 = \frac{k_{11}k_{12}}{k_{11} + k_{12}}; c_1 = 2\zeta\sqrt{k_1m_T} \\
 kt_1 &= \frac{GJ_{Y_2TA}}{L_{TA}}; kt_{12} = \frac{GJ_{Y_2TB}}{L_{TA}}; kt_1 = \frac{kt_{11}kt_{12}}{kt_{11} + kt_{12}}; ct_1 = 2\zeta\sqrt{kt_1I_{Y_2T}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

unde:

- $E$  este modulul lui Young,
  - $G$  este modulul de forfecare,
  - $m_T$  este masa lalelei și
  - $\xi$  este raportul de amortizare al vibrațiilor libere de încovoiere ale lalelei ( $\xi = 0,0016-0,0318$ ) [B.G.24,B.G.2];
2. Arborele intermediar uniform (vezi figurile 4.3.a, 4.3.b) în mișcare continuă este asimilat cu o grindă uniformă Timoșenko pur și simplu susținută la ambele capete de suporturi elastice (articulațiile lalea-tripodă și interiorul cursei-bol sunt suporturi elastice pentru arborele intermediar), având la  $x = 0$  o tripodă fixată pe arbore intermediar prin caneluri și legat elastic în articulația lalea-tripodă cu lalea și pe partea stângă la  $x=L_{Ms}$  cursă interioară fixată pe arborele intermediar prin caneluri și elastic legat în articulația bol-cursă interioară cu bolul, cu caracteristicile inerțiale date de relațiile de mai jos:

$$\begin{aligned}
 J_{Y_2Tr} &= 0.5(J_{1Tr} + J_{2Tr})[1 + \chi_{nTr} \cos(\varphi_2)] \\
 J_{Z_2Tr} &= 0.5(J_{1Tr} + J_{2Tr})[1 - \chi_{nTr} \cos(\varphi_2)] \\
 J_{Y_2Tr} &= 0.5(J_{1Tr} + J_{2Tr})[1 + \chi_{nr} \cos(\varphi_2)] \\
 J_{Z_2Tr} &= 0.5(J_{1Tr} + J_{2Tr})[1 - \chi_{nr} \cos(\varphi_2)]
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

unde:

- $J_{1Tr}, J_{2Tr}$  sunt momentele principale geometrice de inerție pentru tripodă,
  - $J_{1lr}, J_{2lr}$  sunt momentele principale geometrice de inerție pentru cursa interioară,
  - $\chi_{nTr}$  și  $\chi_{nr}$  sunt neuniformitățile geometrice ale tripodei și ale nucii bolului, și  $J_{Y_2Tr}, J_{Z_2Tr}, J_{Y_2lr}, J_{Z_2lr}$  sunt momentele geometrice de inerție ale tripodei și ale nucii bolului referitoare la axele  $Y_2, Z_2$ .
3. Bolul are o rigiditate  $k_2$ , dată de arcurile în serie  $k_{21}, k_{22}$  (vezi figura 4.3.b), și amortizarea  $c_2$ , asigurată de amortizoarele seriale  $c_{21}, c_{22}$ , pentru vibrația de încovoiere mișcare rigidă a bolului în ceea ce privește axa  $Z_2$  și o rigiditate  $k_{t2}$ , dată de arcurile în serie  $k_{t21}, k_{t22}$ , precum și amortizarea  $c_{t2}$ , asigurată de amortizoarele în serie  $c_{t21}, c_{t22}$ , pentru vibrația de încovoiere unghiulară mișcarea rigidă a bolului față de axa  $Y_2$ , prevăzută de următoarele relații:

$$\begin{aligned}
 k_{21} &= \frac{3EJ_{Z_2BA}}{L_{BA}^3}; k_{22} = \frac{3EJ_{z_2BB}}{L_{BB}^3}; k_2 = \frac{k_{21}k_{22}}{k_{21} + k_{22}}; c_2 = 2\zeta \sqrt{k_2 m_B} \\
 kt_{21} &= \frac{GJ_{Y_2BA}}{L_{BA}}; kt_{22} = \frac{GJ_{Y_2BA}}{L_{BA}}; kt_2 = \frac{kt_{21}kt_{22}}{kt_{21} + kt_{22}}; ct_2 = 2\zeta \sqrt{k_{t2} I_{Y_2B}}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

unde  $m_B$  este masa bolului.

4. Articulația lalea-tripodă în mișcare (vezi figurile 4.3.a și 4.3.b) realizează legătura elastică dintre lalea și arborele intermediar prin rigiditatea  $k_{TT_r}$  și amortizarea  $c_{TT_r}$  pentru mișcările de încovoiere vibratoare privind axa  $Z_2$  și rigiditatea unghiulară  $k_{tTT_r}$  și amortizarea unghiulară  $c_{tTT_r}$  pentru mișcările de încovoiere vibratoare referitoare la axa  $Y_2$ ;

5. Articulația bol – cursă interioară în mișcare (vezi figurile 4.3.a și 4.3.b) realizează legătura dintre bol și arborele intermediar prin rigiditatea  $k_{lrb}$  și amortizarea  $c_{lrb}$  pentru mișcările de încovoiere vibratoare privind axa  $Z_2$  și rigiditatea unghiulară  $k_{llrb}$  și amortizarea unghiulară  $c_{llrb}$  pentru mișcările de încovoiere vibratoare referitoare la axa  $Y_2$ .

Roata induce excitații generate de o forță de șoc impulsiv moderată  $F_s$  care acționează în direcția  $Z_2$ , iar sarcina de excitație poate fi exprimată ca:

$$F_s = \overline{F_s} \left[ 1 + q_3 t^{q_1} e^{-q_2 t} \right] \quad (4.10)$$

unde,  $F_s$  este amplitudinea șocului pe axa longitudinală a bolului  $X_3$  transmis de pe axa roții și  $q_i, i = \overline{1,3}$  constante experimentale, în funcție de tipul de șoc aplicat la roată de excitația drumului [B.G.14] (pp. 142–172).

Toate calculele au fost efectuate având în vedere că lăleaua era o grindă fixată în cutia de viteze cu suporturi elastice simple în articulația lălea-tripoda. Bolul este fixat în roata prin suporturi articulate simple în articulația bol – nuca. Literatura [B.G.14] (pp. 142–172) a menționat că sarcinile de excitație a șocurilor produc solicitări uriașe de stres auto în sistemul de suspensie al mașinii și sistemul jantă-anelopă. Aceste două sisteme pot absorbi 90% din energia de șoc. Prin urmare, doar 10% din șoc acționează asupra elementelor planetare ca o variație a cantității de mișcare într-un timp foarte scurt, estimat la 0,001 s. Din cauza acestui fenomen, șocul este distribuit fiecărui element planetar, inducând stresul bolului în zona canelurilor, pentru arborele intermediar, viteza inițială a „capetelor” și tensiunea lălelelor în zona canelurilor.

Datorită acestui mecanism de excitație, se va considera că stresul în axul lălelei și al bolului impune dimensiunile capacității geometrice ale elementelor geometrice  $d_{TA}$   $d_{BA}$ . În același timp, comportamentul dinamic al arborelui intermediar va fi un element de excitație, precum amortizorul echivalent calat intern <sup>3</sup>(ITD) menționat în literatura de specialitate [B.G.13], pentru lălea și bol. Noutatea elementelor unui arbore planetar, după cum se poate observa din ecuațiile (4.7-4.9), constă în legarea mișcărilor rigide ale bolului și lălelei cu mișcarea continuă a arborelui intermediar [B.G.27]. S-au luat în considerare rigiditatea și amortizarea pentru articulațiile lălele-tripoda și bol-cursă interioară pentru deplasările relative de încovoiere și deplasările relative de rotație de încovoiere ale mișcărilor dintre clopotul lălelei și tripoda, precum și pentru cursa interioară și clopotul bolului.

Pentru vibrația de încovoiere forțată sau bazată pe un model dinamic de mișcări ale elementelor arborilor planetari prezentate în figurile 4.3.a și 4.3.b, folosind principiul lui Hamilton [B.G.2] rezultă:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0 \quad (4.11)$$

unde funcția lui Lagrange,  $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$

depinde de coordonatele generalizate  $q_1, \dots, q_n$  și vitezele generalizate  $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$  în timp ce  $P_1, P_2$

sunt două puncte în configurațiile spațiale  $\overline{\left( \begin{matrix} \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n \end{matrix} \right)} = \overline{\Xi(q_1, \dots, q_n)}$ .

<sup>3</sup> ITD - amortizorul reglat intern

Următoarea ecuație oferă funcția lui Lagrange:

$$L = T + \Pi \quad (4.12)$$

unde, energia potențială  $\Pi$  pentru mișcările de încovoiere forțată sau bazată pe un model dinamic de mișcări ale elementelor arborilor planetari (vezi figurile 4.3.a și 4.3.b) este dată de următoarea ecuație generalizată [B.G.2] (pp. 371–376) [B.G.25] (pp. 734–739).

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^{L_{Ms}} \left[ EJ_{Y_2Ms} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + kAG \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} - \phi_2 \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \left[ c_1 \left( \dot{w}_1 \right)^2 + c_2 \left( \dot{w}_3 \right)^2 + c_{t1} \left( \dot{\phi}_1 \right)^2 + c_{t2} \left( \dot{\phi}_3 \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ c_{Tr} \left( \dot{w}_1 - \frac{\partial w_2}{\partial t}(0,t) \right)^2 \right] + c_{Tr} \left( \phi_1 \cos \beta_1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(0,t) \right)^2 + c_{lrB} \left( \frac{\partial w_2}{\partial t}(L_{Ms},t) - \dot{w}_3 \right)^2 + c_{lrB} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(L_{Ms},t) - \dot{\phi}_3 \cos \beta_2 \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[ k_1 w_1^2 + k_2 w_3^2 + k_{t1} \phi_1^2 + k_{t2} \phi_3^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ k_{Tr} \left( w_1 - w_2(0,t) \right)^2 + k_{Tr} \left( \phi_1 \cos \beta_1 - \phi_2(0,t) \right)^2 + \right. \\ & \left. + k_{lrB} \left( w_2(L_{Ms},t) - w_3 \right)^2 + k_{lrB} \left( \phi_2(L_{Ms},t) - \phi_3 \cos \beta_2 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

unde:

- $A$  este aria secțiunii transversale a arborelui intermediar,
- $w_2(x, t)$  este deformarea la încovoiere (inclusiv deformarea prin forfecare) a arborelui intermediar în ceea ce privește axa  $Z_2$ ,
- $\phi_2(x, t)$  este rotația secțiunii transversale a arborelui intermediar în ceea ce privește axa  $Y_2$ , datorită deflexiunii la încovoiere,
- $k$  este factorul de corecție la forfecare, care în literatura de specialitate [B.C.4.3] este în intervalul 0,64–0,846,
- $L_{Ms}$  este lungimea arborelui intermediar,
- $J_{Y_2Ms}$  este momentul geometric de inerție al arborelui median referitor la direcția  $Y_2$  dată de următoarele ecuații:

$$J_{Y_2Ms} = \frac{\pi d_{Ms}^4}{64}, J_{Y_2Ms} = \frac{\pi(d_{eMs}^4 - d_{iMs}^4)}{64} \quad (4.14)$$

Energia cinetică a mișcărilor de încovoiere forțată sau bazată pe un model dinamic de mișcări ale elementelor arborilor planetari este dată de următoarea ecuație generalizată [B.G.2] (p. 374) [B.G.25] (p. 721):

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m_T \dot{w}_1^2 + \frac{1}{2} m_{Tr} \left( \frac{\partial w_2}{\partial t}(0,t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{w}_3^2 + \frac{1}{2} m_{lr} \left( \frac{\partial w_2}{\partial t}(L_{Ms},t) \right)^2 + \frac{1}{2} I_{Y_2T} \dot{\phi}_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} I_{Y_2Tr} \left( \frac{\partial w_2}{\partial t}(0,t) \right)^2 + \frac{1}{2} I_{Y_2B} \dot{\phi}_3^2 + \frac{1}{2} I_{Y_2lr} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(L_{Ms},t) \right)^2 + \int_0^{L_{Ms}} \frac{1}{2} \left[ \rho A \left( \frac{\partial w_2}{\partial t} \right)^2 + I_{Y_2Ms} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

unde:

- $m_{Tr}$  este masa tripodei
- $m_{lr}$  este masa nucii (vezi figurile 4.3.a-4.3.b).

După mai multe manipulări matematice care includ integrarea prin părți ale sistemului nelinier de ecuații cu derivate parțiale de gradul doi în necunoscutele  $w_1(t)$ ,  $\Phi_1(t)$ ,  $w_2(x, t)$ ,  $\Phi_2(x, t)$ , și  $w_3(t)$ ,  $\Phi_3(t)$ :

$$m_T \ddot{w}_1 + c_1 \dot{w}_1 + c_{TT} \left( \dot{w}_1 - \frac{\partial w_2}{\partial t}(0, t) \right) + k_1 w_1 + k_{TT} (w_1 - w_2(0, t)) = 0 \quad (4.16)$$

$$I_{Y_2T} \ddot{\phi}_1 + c_{t1} \dot{\phi}_1 + c_{TT} \left( \dot{\phi}_1 \cos \beta_1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(0, t) \right) + k_{t1} \phi_1 + k_{TT} (\phi_1 \cos \beta_1 - \phi_2(0, t)) = 0 \quad (4.17)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - kAG \left[ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right] = 0$$

$$I_{Y_2Ms} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} - EJ_{Y_2Ms} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} - kAG \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} - \phi_2 \right) = 0 \quad (4.18)$$

$$m_B \ddot{w}_3 + c_2 \dot{w}_3 + c_{tB} \left( \dot{w}_3 - \frac{\partial w_2}{\partial t}(L_{Ms}, t) \right) + k_2 w_3 + k_{tB} (w_3 - w_2(L_{Ms}, t)) = 0 \quad (4.19)$$

$$I_{Y_2B} \ddot{\phi}_3 + c_{t1} \dot{\phi}_3 + c_{tB} \left( \dot{\phi}_3 \cos \beta_2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(L_{Ms}, t) \right) + k_{t2} \phi_3 + k_{tB} (\phi_3 \cos \beta_2 - \phi_2(L_{Ms}, t)) = 0 \quad (4.20)$$

$$w_2(0, t) = 0, \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(0, t) = 0, x = 0, w_2(L_{Ms}, t) = 0, \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(L_{Ms}, t) = 0, x = L_{Ms} \quad (4.21)$$

$$c_{TT} \dot{w}_1 + k_{TT} w_1 - kAG \left( \frac{\partial w_2}{\partial x}(0, t) - \phi_2(0, t) \right) = 0$$

$$c_{tB} \dot{w}_3 + k_{tB} w_3 - kAG \left( \frac{\partial w_2}{\partial x}(L_{Ms}, t) - \phi_2(L_{Ms}, t) \right) = 0 \quad (4.22)$$

$$I_{Y_2Tr} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}(0, t) - c_{TT} \left( \dot{\phi}_1 \cos \beta_1 - \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(0, t) \right) - k_{TT} (\phi_1 \cos \beta_1 - \phi_2(0, t)) = 0 \quad (4.23)$$

$$I_{Y_2lr} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}(L_{Ms}, t) - c_{tB} \left( \dot{\phi}_3 \cos \beta_2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(L_{Ms}, t) \right) - k_{tB} (\phi_3 \cos \beta_2 - \phi_2(L_{Ms}, t)) = 0 \quad (4.24)$$

Sistemul dat de ecuațiile (4.16–4.20) și ecuațiile de condiții la limită (4.21–4.24) reprezintă comportamentul dinamic nelinier al elementelor arborilor planetari în vibrațiile forțate de încovoiere indus de forța de șoc prin roată prin excitațiile drumului. Analizând ecuațiile (4.18), se poate remarca că acestea reprezintă un sistem de ecuații cu derivate parțiale pentru vibrațiile încovoiere-forfecare ale unui arbore uniform care ia în considerare efectele inerției rotative și ale deformării prin forfecare, arborele intermediar fiind o grindă Timošenko.

Condițiile la limită sunt date de ecuațiile (4.21–4.24) și leagă vibrațiile de încovoiere-forfecare ale arborelui intermediar cu laleaua și bolul prin articulațiile lalea-tripoda și bol-cursă interioară, inducând soluțiile sistemului de ecuații (4.16–4.20) următoarele fenomene: articulațiile arborelui planetar pentru autovehicule rutiere sunt cvasi-izometrice [B.G.1, B.G.18], cu efect de

neuniformitate geometrică a caracteristicilor de inerție ale articulațiilor care variază cu unghiul rigid de rotație pentru fiecare element al arborelui planetar în direcțiile  $X1$ ,  $X2$ ,  $X3$ , efectele deformării la încovoiere și rigidității la încovoiere-răsucire pentru lalea și bol, efectele deformării la încovoiere și amortizarea la încovoiere - răsucire pentru fiecare articulație a arborelui planetar, inerția rotativă efect la îndoire și efectul de forfecare pentru arborele intermediar. Punctul de plecare pentru a rezolva ecuațiile diferențiale ale sistemului mișcărilor de vibrații forțate de încovoiere (ecuațiile (4.15-14.9)) pentru elementele arborilor planetari a fost analiza mecanismului de vibrație al arborelui intermediar ca o grindă Timoșenko pur și simplu sprijinită la capete (figura 4.4). Pentru elementul arborelui intermediar al arborelui planetar, s-a considerat că  $f(x,t) = 0$ .

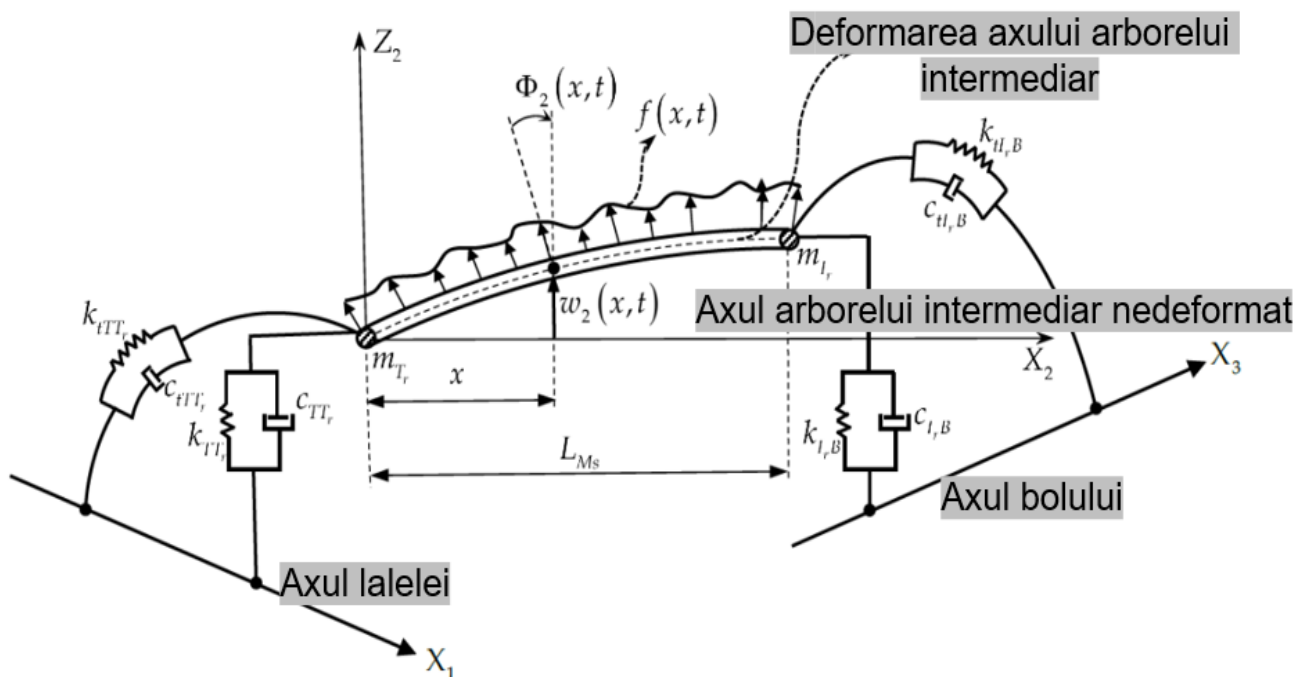


Figura 4.4 Vibrația forțată de încovoiere a arborelui intermediar [B.C.4.4]

Soluțiile generale ale ecuațiilor (4.18) care îndeplinesc condițiile la limită ale ecuațiilor (4.22) exprimate în deformare normalizată la îndoire sunt [B.G.2] (p. 326–328).

$$w_2(\bar{x}, t) = \sin(n\pi\bar{x}) \left[ 0.1 \frac{F_s \Delta t_s}{\omega_{n1} L_{Ms} M} \sinh(\omega_{n1}, t) \right], \bar{x} = \frac{x}{L_{Ms}}, n = 1, 2, 3... \quad (4.25)$$

$$\phi_2(\bar{x}, t) = n\pi \cos(n\pi\bar{x}) \left( 1 + \frac{\rho \omega_{n1}^2}{kG \left( \frac{n\pi}{L_{Ms}} \right)^2} \right) \left[ 0.1 \frac{F_s \Delta t_s}{\omega_{n1} L_{Ms} M} \sinh(\omega_{n1}, t) \right], \bar{x} = \frac{x}{L_{Ms}}, n = 1, 2, 3... \quad (4.26)$$



Introducând ecuațiile (4.25)-(4.26) în condițiile la limită (4.22) și rezultatele din ecuațiile (4.17) și (4.20), ecuațiile (4.17) și (4.20) devin ecuații diferențiale normalizate în funcțiile de timp  $w_I(t)$ ,  $w_3(t)$ .

$$\ddot{w}_1 + 2\xi\Omega_3 \sqrt{\frac{1-C_1 \cos(2\varphi_1)}{1-C_2 \cos(2\varphi_1)}} \dot{w}_1 + \Omega_1^2 \frac{1-C_1 \cos(2\varphi_1)}{1-C_2 \cos(2\varphi_1)} w_1 = -\Gamma_1 w_1^3 - \Gamma_2 w_1^5 \quad (4.27)$$

$$\ddot{w}_3 + 2\xi\Omega_3 \sqrt{\frac{1-C_3 \cos(2\varphi_3)}{1-C_4 \cos(2\varphi_3)}} \dot{w}_3 + \Omega_3^2 \frac{1-C_3 \cos(2\varphi_3)}{1-C_4 \cos(2\varphi_3)} w_3 = -\Gamma_3 w_3^3 - \Gamma_4 w_3^5 \quad (4.28)$$

unde frecvența naturală a lălelei la îndoire  $\Omega_I$  și frecvența naturală a bolului la îndoire  $\Omega_3$  sunt date de următoarele ecuații:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{3E}{m_T L_{TA}^3 \left(1 + \frac{b_1}{J_{Z_2TA}} (1+a_1)\right)}}, a_1 = \frac{0.5(J_{1T} J_{2T})}{S_T \left[\frac{L_{TA}^2}{12} + d_{CT}^2\right]}, b_1 = S_T \left[\frac{L_{TA}^2}{12} + d_{CT}^2\right] \quad (4.29)$$

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{3E}{m_B L_{BA}^3 \left(1 + \frac{b_2}{J_{Z_2BA}} (1+a_2)\right)}}, a_2 = \frac{0.5(J_{1B} J_{2B})}{S_T \left[\frac{L_{BA}^2}{12} + d_{CB}^2\right]}, b_2 = S_B \left[\frac{L_{BA}^2}{12} + d_{CB}^2\right] \quad (4.30)$$

Ceilalți termeni din ecuațiile (4.27)-(4.28) sunt dați de expresiile:

$$C_1 = \frac{a_1}{1+a_1} \chi_{nT}, C_2 = \frac{a_1 b_1}{J_{Z_2TA} (1+a_1)} \chi_{nT}, C_3 = \frac{a_2}{1+a_2} \chi_{nB}, C_4 = \frac{a_2 b_2}{J_{Z_2BA} b_2 (1+a_2)} \chi_{nB} \quad (4.31)$$

$$\Gamma_1 = \frac{0.2\rho A \bar{F}_s \Delta t_s}{\pi 3! M m_T} \Omega_1, \Gamma_2 = \frac{0.2\rho A \bar{F}_s \Delta t_s}{\pi 5! M m_T} \Omega_1, \Gamma_3 = \frac{0.2\rho A \bar{F}_s \Delta t_s}{\pi 3! M m_B} \Omega_3, \Gamma_4 = \frac{0.2\rho A \bar{F}_s \Delta t_s}{\pi 5! M m_B} \Omega_3. \quad (4.32)$$

S-a folosit abordarea metodei asimptotice (AMA<sup>4</sup>) în aproximarea de ordinul întâi. Acest lucru ar permite investigarea stabilității dinamice parametrice neliniare pentru mișcarea vibrației forțate de încovoiere a lălelei (FBV) și bolului în regiunea rezonanței parametrice principale (PPR) atât pentru cazurile staționare, cât și pentru cele nestaționare. Rezonanța parametrică principală (PPR), definită de frecvența de excitație  $\eta = 2\Omega$  (aproape de două ori frecvența naturală a sistemului) este cea mai importantă regiune de rezonanță, așa cum este menționat în [B.G.16](p. 425). Pentru a calcula soluțiile ecuațiilor (4.27)-(4.28), s-a presupus că timpul *lent* este  $\tau = \varepsilon t$ , unde  $\varepsilon$  este un parametru "mic" pozitiv [B.C.4.1] (p. 299). Pentru a introduce timpul *lent*, ecuațiile (4.27)-(4.28) au trebuit să fie transformate pentru a fi utilizate în abordarea metodei asimptotice. Coeficienții celui de-al doilea și al treilea termen al ecuațiilor (4.27)-(4.28) din partea stângă pot fi exprimați ca:

$$\frac{1-C_1 \cos(2\varphi_1)}{1-C_2 \cos(2\varphi_1)} \approx 1 - 2 \cos(\theta_1), \sqrt{\frac{1-C_1 \cos(2\varphi_1)}{1-C_2 \cos(2\varphi_1)}} \approx 1 + \mu \cos(\theta_1), \mu = \frac{1}{2}(C_2 - C_1) \quad (4.33)$$

cu frecvențele de excitație  $\eta_1, \eta_3$ , pentru lălea și bol în regiunea rezonanței parametrice principale (PPR) date de expresiile:

<sup>4</sup> AMA – Abordarea metodei asimptotice

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 2\Omega_1 \approx \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} \approx \omega_{n1}, \\ \eta_3 &= 2\Omega_3 \approx \frac{d\theta_3}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt} \approx \omega_{n1}\end{aligned}\quad (4.34)$$

și  $\frac{d\varphi_1}{dt}$  este excitația indusă în mișcarea vibrației forțate de încovoiere (FBV) (ecuația (4.27)) de

unghiul de răsucire rigid al lalelei în ceea ce privește axa  $X_1$ , iar  $\frac{d\varphi_3}{dt}$  este excitația indusă în

mișcarea vibrației forțate de încovoiere (ecuația (4.27)) prin unghiul de răsucire rigid al bolului referitor la axa  $X_3$ . Presupunerea că raportul de amortizare  $\xi$ , coeficientul de excitație  $\mu$  și coeficienții de neliniaritate cubică și de ordinul 4  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , sunt mici se încorporează în analiză prin reprezentarea acestor mărimi sub următoarea formă:

$$\xi = \varepsilon\xi, \mu = \varepsilon\mu, \varepsilon\Gamma_1, \Gamma_2 = \varepsilon\Gamma_2, \Gamma_3 = \varepsilon\Gamma_3, \Gamma_4 = \varepsilon\Gamma_4, \quad (4.35)$$

unde  $\varepsilon$  este același parametru „mic” pozitiv utilizat pentru a obține timpul lent. De asemenea, se presupune că frecvența de excitație și parametrul de excitație  $\mu$  variază lent în timp, astfel încât

$\frac{d\theta_1}{dt} = \eta_1(\tau), \frac{d\theta_3}{dt} = \eta_3(\tau)$ . Ecuațiile (4.26)-(4.27) devin următoarele după neglijarea termenilor din

$\varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned}\ddot{w}_1 + \Omega_1^2 w_1 &= \varepsilon \left[ -2\xi\Omega_1 \dot{w}_1 + 2\mu\Omega_1^2 \cos(\theta_1) w_1 - \Gamma_1 w_1^3 - \Gamma_2 w_1^5 \right], \\ \ddot{w}_3 + \Omega_3^2 w_3 &= \varepsilon \left[ -2\xi\Omega_3 \dot{w}_3 + 2\mu\Omega_3^2 \cos(\theta_3) w_3 - \Gamma_3 w_3^3 - \Gamma_4 w_3^5 \right]\end{aligned}\quad (4.36)$$

În ceea ce privește ecuațiile (4.36), partea dreaptă reprezintă o perturbare a formei matematice  $H_1(w_1, \theta_1), H_3(w_3, \theta_3)$  fiind funcții periodice în  $\theta_1, \theta_3$  cu perioada  $2\pi$ , în timp ce partea stângă a ecuației este un oscilator liniar [B.C.4.4]. Luând în considerare toate aceste considerente fizice și limitându-ne atenția la investigarea regiunii rezonanței parametrice principale, se caută o soluție pentru ecuațiile (4.36) în forma următoare pentru aproximarea de ordinul întâi în  $\varepsilon$ :

$$w_1 = w_1 \cos\left(\frac{1}{2}\theta_1 + \psi_1\right), w_3 = w_3 \cos\left(\frac{1}{2}\theta_3 + \psi_3\right), \quad (4.37)$$

unde și  $W_1, W_3, \psi_1, \psi_3$  sunt funcții de timp definite de sistemele de ecuații diferențiale:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, W_1, \psi_1) \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= \Omega_1 - \frac{1}{2}\eta_1(t) + \varepsilon\beta_1(\tau, W_1, \psi_1) \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \frac{dW_3}{dt} &= \varepsilon A_3(\tau, W_3, \psi_3) \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= \Omega_3 - \frac{1}{2}\eta_3(t) + \varepsilon\beta_3(\tau, W_3, \psi_3) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Folosind ecuațiile (4.37) și (4.38) în forma primară a ecuațiilor (4.36), echivalând termenii formei  $\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}\theta_j + \psi_j\right), \varepsilon \sin\left(\frac{1}{2}\theta_j + \psi_j\right), j = 1, 3$  din partea stângă a ecuațiilor (4.36) cu aceiași termeni din partea dreaptă a aceleiași ecuații și neglijând armonizările rezultă soluțiile sistemelor (4.38)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dW_1}{dt} = -\frac{\mu\Omega_1^2}{\eta_1} \sin 2\psi_1 - \xi\Omega_1 W_1 \\ \frac{d\psi_1}{dt} = \Omega_1 - \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{\mu\Omega_1^2}{\eta_1} \cos 2\psi_1 + \frac{3}{8} \frac{\Gamma_1 W_1^2}{\Omega_1} + \frac{5}{16} \frac{\Gamma_2 W_1^4}{\Omega_1} \end{array} \right\}, \quad (4.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dW_3}{dt} = -\frac{\mu\Omega_3^2}{\eta_3} \sin 2\psi_3 - \xi\Omega_3 W_3 \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \Omega_3 - \frac{1}{2}\eta_3 - \frac{\mu\Omega_3^2}{\eta_3} \cos 2\psi_3 + \frac{3}{8} \frac{\Gamma_1 W_3^2}{\Omega_3} + \frac{5}{16} \frac{\Gamma_2 W_3^4}{\Omega_3} \end{array} \right\}$$

Investigarea instabilității dinamice a mișcării vibrației forțate de încovoiere pentru lalea și bol reprezintă calculul limitelor regiunii parametrice principale de instabilitate. Lățimea de bază a răspunsului staționar este singura regiune în care vibrațiile pot iniția de obicei. Setarea la zero a amplitudinilor în sistemele de ecuații (4.39) dă următoarele ecuații:

$$\left(\frac{\eta_1}{2\Omega_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\eta_1}{2\Omega_1}\right)^3 + (1 + \xi^2)\left(\frac{\eta_1}{2\Omega_1}\right)^2 - \frac{\mu^2}{4} = 0$$

$$\left(\frac{\eta_3}{2\Omega_3}\right)^4 - 2\left(\frac{\eta_3}{2\Omega_3}\right)^3 + (1 + \xi^2)\left(\frac{\eta_3}{2\Omega_3}\right)^2 - \frac{\mu^2}{4} = 0$$
(4.40)

Ecuațiile (4.39) dau limitele regiunii parametrice principale a instabilității dinamice staționare în spațiul  $\left(\frac{\eta_1}{2\Omega_1}, \xi, \mu\right)$  pentru lalele și în spațiul  $\left(\frac{\eta_3}{2\Omega_3}, \xi, \mu\right)$ . Aceasta este investigarea mișcării staționare a vibrației forțate de încovoiere pentru lalea și bol. Pentru mișcarea vibrației forțate de încovoiere nestaționară pentru lalea și bol, analiza instabilității dinamice a constatat în analiza reprezentării grafice în spațiul de configurare în viteza a amplitudinilor nestaționare versus amplitudinile nestaționare  $\left(\frac{dW_1}{dt}, W_1\right), \left(\frac{dW_3}{dt}, W_3\right)$ , adică evidența tranziției vibrației forțate de încovoiere pentru mișcarea lalelei și bolului prin mișcarea haotică din regiunea rezonanței parametrice principale.

Figura 4.5 a,b ilustrează regiunea de instabilitate dinamică staționară a lalelei în spațiul  $(\eta_1, \xi, \mu)$  folosind ecuațiile (4.40). Analizând figurile 4.5a,b, se poate observa că cele două suprafețe pliate obținute au fost simetrice în ceea ce privește planul dat de  $(\eta_1, \xi)$  pentru frecvența de excitație și raportul de amortizare. În schimb, coeficientul de excitație  $\mu$  poate fi pozitiv sau negativ.

Suprafața pliată a instabilității dinamice „a păstrat” în interiorul celor două ramuri regiunea în care a manifestat instabilitatea staționară. De asemenea, se poate observa că creșterea raportului de amortizare a avut un efect stabilizator asupra dinamicii lalelei, așa cum era de așteptat. Figura

4.6a,b ilustrează regiunea de instabilitate dinamică staționară a bolului în spațiul  $(\eta_3, \xi, \mu)$  folosind ecuațiile (4.40).

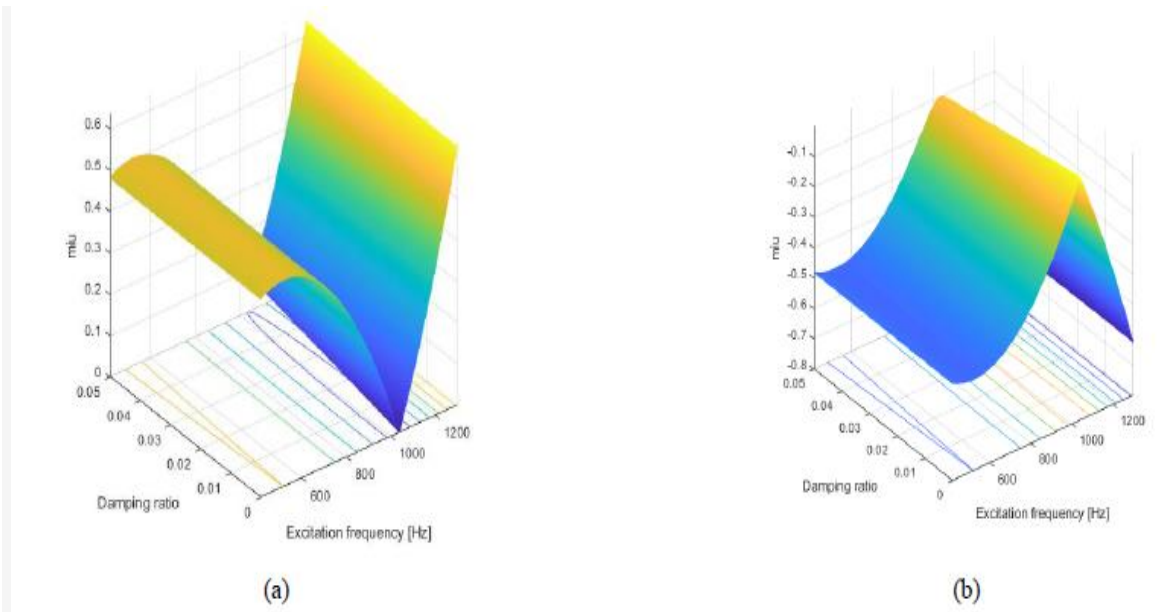


Fig. 4.5. Frontieră de instabilitate dinamică staționară pentru lea.a.  $\mu > 0$ , b.  $\mu < 0$  [B.C.4.4]

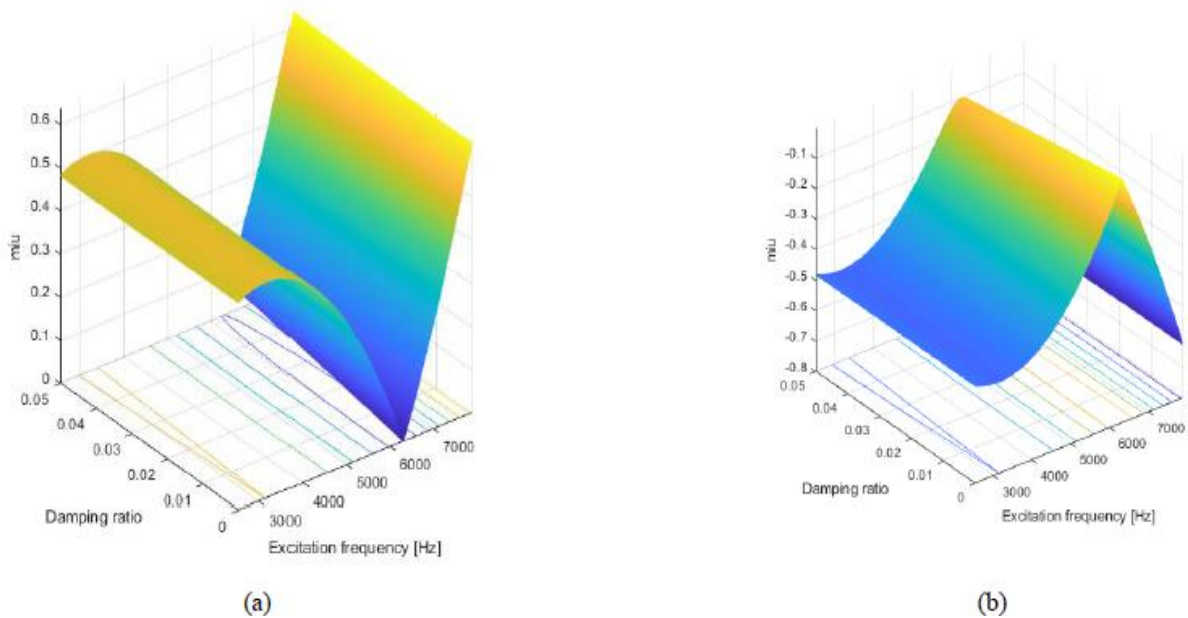


Fig. 4.6. Frontieră de instabilitate dinamică staționară pentru bol. a.  $\mu > 0$ , b.  $\mu < 0$  [B.C.4.4]

Analizând figurile 4.6a,b, se poate observa că cele două suprafețe pliate obținute au fost simetrice în ceea ce privește planul dat de  $(\eta_3, \xi)$  pentru frecvența de excitație și raportul de amortizare, în timp ce coeficientul de excitație  $\mu$  putea fi pozitiv sau negativ. Suprafața pliată a instabilității dinamice „a păstrat” în interiorul celor două ramuri regiunea în care a manifestat instabilitatea staționară pentru bol. De asemenea, se poate observa că creșterea raportului de amortizare a avut un efect stabilizator asupra dinamicii bolului, așa cum era de așteptat. Singura diferență dintre aceste fenomene pentru bol a fost că manifestarea a fost într-o altă frecvență de

gamă decât cea a lălelei: frecvența de gamă dată de frecvența naturală a bolului la îndoire. Figura 4.7 ilustrează graficele spațiului de fază  $\left(W_1, \frac{dW_1}{dt}\right)$  pentru mișcările vibrației forțate de încovoiere netaționare ale lălelei în regiunea rezonanței parametrice principale. Figura 4.8 prezintă diagramele spațiului de fază  $\left(W_3, \frac{dW_3}{dt}\right)$  pentru mișcările vibrației forțate de încovoiere netaționare ale bolului în regiunea rezonanței parametrice principale.

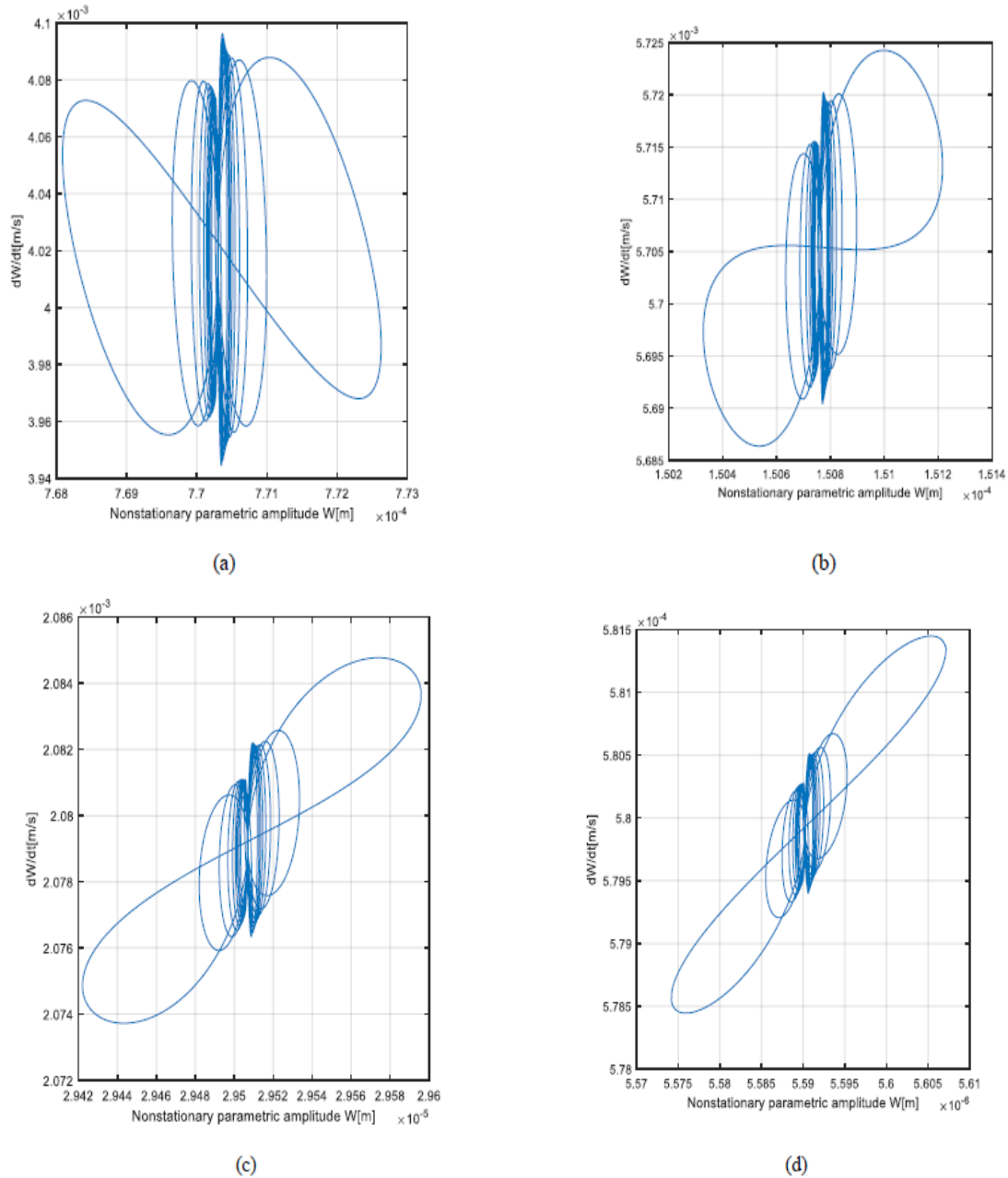
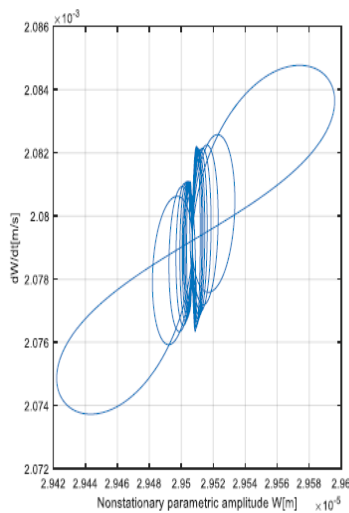
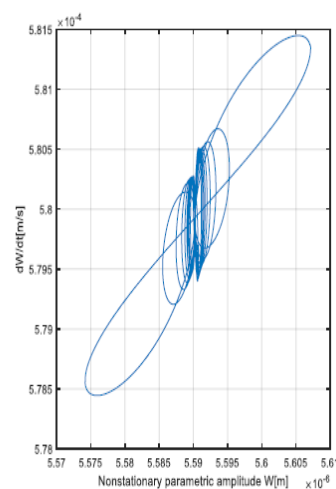


Fig. 4.7. Spațiul fazelor pentru lălea  $\mu = 0,623 \times 10^{-4}$ . (a)  $\zeta = 0,0016$ . (b)  $\zeta = 0,0116$ . (c)  $\zeta = 0,0216$ . (d)  $\zeta = 0,0318$ . [B.C.4.4]

Analizând graficele din figura 4.7, se poate observa o tranziție la comportament haotic pentru mișcările vibrațiilor forțate de încovoiere (FBVM)<sup>5</sup> ale lălelei datorită prezenței unor cicluri limită sau chiar a unor atractori ciudați, dar această ultimă concluzie trebuie certificată printr-o analiză detaliată folosind metodele mișcărilor haotice. Un aspect evident este că tranziția prin regiunea rezonanței parametrice principale pentru lălea a fost una instabilă. La analizarea graficelor din figura 4.8 se poate observa aceeași manifestare pentru bol ca și pentru lălele (vezi figura 4.7), aceea fiind o trecere la comportament haotic pentru mișcările vibrațiilor forțate de încovoiere pentru bol datorită prezenței ciclurilor limită. Cu toate acestea, această ultimă concluzie trebuie să fie certificată printr-o analiză detaliată folosind metodele mișcărilor haotice. Această manifestare este valabilă numai în intervalul raportului de amortizare de 0,0016–0,0096. Un aspect care este evident este modul în care tranziția prin regiunea rezonanței parametrice principale pentru bol a fost, de asemenea, una instabilă. Din păcate, niciun studiu publicat nu analizează în detaliu comportamentul dinamic al fiecărui element al arborelui planetar pentru FBVM (lăleaua, bolul și arborele intermediar), în afară de [B.G.14], deoarece toate studiile au analizat comportamentul dinamic global al arborelui planetar pentru autovehicule rutiere. După cum se poate observa din acest paragraf, utilizarea abordării metodei asimptotice cuplată cu principiul lui Hamilton a permis investigarea mișcării staționare pentru mișcările vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lăleaua și bolul unui arbore planetar (AD) în regiunea rezonanței parametrice principale prin calcularea frontierelor de instabilitate dinamică (vezi figurile 4.5-4.6) în regiunea rezonanței parametrice principale. Între timp, utilizarea abordării metodei asimptotice cuplată cu principiul lui Hamilton a permis investigarea mișcării nestaționare pentru mișcările vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lăleaua și bolul unui arbore planetar în tranziția prin regiunea rezonanței parametrice principale prin calculul amplitudinii vitezei față de amplitudinea în spațiul fazelor (vezi figurile 4.7-4.8). Figurile 4.7-4.8 au permis investigarea instabilității dinamice în tranziția prin regiunea rezonanței parametrice principale. După cum se remarcă în figurile 4.7-4.8, tranziția către regiunea rezonanței parametrice principale a avut un aspect de manifestare haotică. Pentru a verifica dacă acest comportament dinamic nestaționar este haos determinist sau un proces stocastic, ar fi necesar să folosim metoda exponenților lui Lyapunov cuplată cu metoda secțiunii Poincare.



(c)



(d)

<sup>5</sup> FBVM – Mișcările vibrațiilor forțate de încovoiere

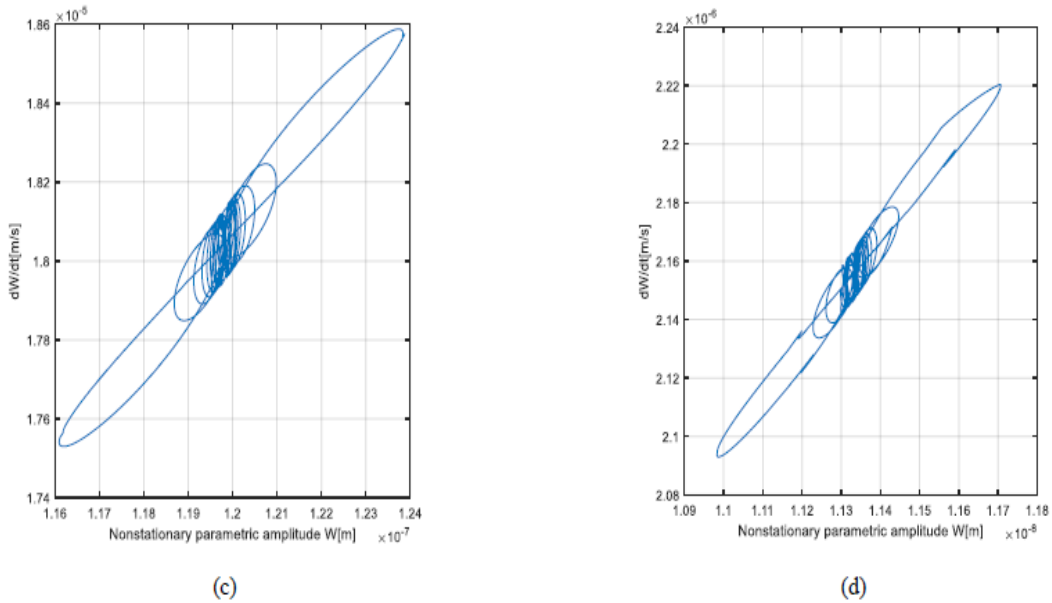


Fig. 4.8. Spațiul fazelor pentru bol  $\mu = 0,754 \times 10^{-4}$ . (a)  $\zeta = 0,0016$ . (b)  $\zeta = 0,0036$ . (c)  $\zeta = 0,0076$ . (d)  $\zeta = 0,0096$ . [B.C.4.4]

Prezentul capitol introduce un model dinamic pentru vibrații forțate de încovoiere nou proiectat pentru arborii planetari, cu următoarele fenomene fiind incluse pentru prima dată: neuniformitatea caracteristicilor inerțiale ale elementelor arborilor planetari, rigiditate în serie și amortizare pentru lalea și bol, excitație de șoc datorată geometriei drumului, și neuniformitatea izometriei cinematice. Pe baza acestui model dinamic pentru vibrații forțate de încovoiere nou proiectat, folosind principiul lui Hamilton cuplat cu aproximarea de ordinul întâi a metodei asimptotice, comportamentul de instabilitate dinamică staționară și nestaționară a elementelor arborilor planetari a fost investigat în detaliu, calculând următoarele:

- frontierele de instabilitate dinamică au fost determinate pentru prima dată.
- Timpul pentru mișcările vibrațiilor forțate de încovoiere staționare pentru lalea și bol în spațiile parametrice  $(\eta_1, \xi, \mu)$ ,  $(\eta_3, \xi, \mu)$ , în plus, pentru prima dată, s-a determinat amplitudinea vitezei față de amplitudine nestaționară.

Mișcările vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lalea și bol în tranziție prin regiunea PPR. S-au găsit concordanțe cu datele numerice și experimentale din literatura de specialitate privind frecvența liberă naturală în încovoiere și manifestarea efectelor de „bătăi” care induc efecte de pitting și micro-fisurare. Prin urmare, acest model dinamic pentru vibrații forțate de încovoiere al elementelor arborelui planetar cuplat cu principiul lui Hamilton și aproximarea de ordinul întâi a metodei asimptotice poate prezice durabilitatea unui arbore planetar în etapele incipiente de proiectare. Mai mult, un model dinamic pentru vibrații forțate de încovoiere trebuie adăugat la algoritmul de proiectare pentru prezicerea elementelor de confort ale automobilelor.

## Capitolul 5. Comportamentul haotic al arborilor planetari în cazul vibrațiilor de încovoiere

Pentru a investiga vibrațiile haotice de încovoiere forțată ale arborelui planetar al autovehiculului, este necesar mai întâi să se adopte un model dinamic adecvat care să descrie un astfel de comportament dinamic. Un astfel de model dinamic a fost deja realizat în lucrările anterioare de către autori și, prin urmare, pe baza ecuațiilor dinamice deja obținute s-a folosit o metodă complexă dezvoltată de autori bazată pe două elemente: detectarea manifestării haosului și confirmarea manifestării haosului. Confirmarea manifestării haotice constă în utilizarea graficelor într-o regiune specifică de rezonanță și anume regiunea parametrică principală. Pentru aceeași regiune a fost aplicată Metoda Exponenților Maximi Lyapunov (MLEM)<sup>1</sup> a fost cuplată cu criteriul de contracție pentru suma exponenților Lyapunov care certifică haosul. În plus, a fost aplicată secțiunea Poincaré ca metodă calitativă de reconfirmare a manifestării haosului. Astfel, a fost creat un instrument analitic pentru a investiga vibrațiile haotice de încovoiere forțată pentru condiții specifice în zona rezonanței parametrice principale (PPRA)<sup>2</sup>.

Se reprezintă o dezvoltare a cercetărilor anterioare efectuate de autor [B.G.18;B.G.28] privind comportamentul dinamic al arborilor planetari pentru autovehicule rutiere. Arborii planetari pentru autovehicule rutiere sunt elemente de transmisie homocinetică pentru mașini de la cutii de viteze sau cutii diferențiale până la roți, fiind elemente importante ale transmisiei auto. Autorii au arătat deja că izometria geometrică și cinematică a arborilor planetari prezintă neuniformități [B.G.18] și, prin urmare, toate modelele dinamice trebuie să ia în considerare acest aspect [B.G.26], [B.G.28]. Lucrarea de față are în vedere același model dinamic pentru vibrațiile forțate de încovoiere ale arborelui de transmisie al autovehiculului, ca în [B.G.28], implicând următoarele aspecte fizice:

- a. neuniformități geometrice și cinematice din proprietatea de neuniformitate izometrică a lalelei, bolului și arborelui central ca elemente ale arborelui planetar;
- b. datorită rigidității impuse de cerințele tehnice laleaua și bolul au deformări și rotații ale corpului rigid, rotații pentru lea /bol, așa cum se arată în figura 4.2, în timp ce arborele central este considerat ca un mediu continuu și anume ca o grindă Timoșenko simplu susținută, cu masă, arcuri și amortizoare la ambele capete având funcții continue respectiv deflexiuni și rotații ale arborelui central;
- c. excitațiile sunt induse de șocurile generate de calea de rulare transmise prin roțile auto generate de neuniformitățile drumului [B.G.17].

Pe baza principiului lui Hamilton, [B.G.28] a fost derivată ecuația de vibrații forțate de încovoiere folosind ipotezele anterioare. Pornind de la acest punct, analiza lucrării de față este dedicată detectării și certificării FBV<sup>3</sup> haotice (vibrații forțate de încovoiere) pentru elementele arborelui planetar auto din PPRA (zona rezonanței parametrice principale). Autorii Mazzei și Scott analizează în [B.C.5.2] comportamentul dinamic neliniar al elementelor arborelui planetar pentru autovehicule rutiere în zona rezonanței parametrice principale. Confirmarea experimentală că una dintre cele mai importante zone de rezonanță pentru FBV a arborilor planetari auto este PPRA făcută de Steinwede în [B.G.14]. Detectarea FBV (vibrații forțate de încovoiere) haotic în PPRA (zona rezonanței parametrice principale) va fi efectuată utilizând ecuațiile generale ale FBV

1

MLEM - Maximum Lyapunov Exponents Method

<sup>2</sup> PPRA - Rezonanță parametrică principală

<sup>3</sup> FBV - Vibrații forțate de încovoiere



(vibrații forțate de încovoiere) pentru un arbore planetar pentru automobile grele proiectat pentru un SUV (vehicul utilitar sport) având un 4-WD permanent (tracțiune 4X4). Aceasta va implica determinarea portretelor de fază pentru lăea și bol în zona rezonanței parametrice principale. Certificarea manifestării haotice a vibrațiilor forțate de încovoiere în zona rezonanței parametrice principale implică calcularea exponenților Lyapunov, și anume utilizarea Metodei Maximum Lyapunov Exponents Method (MLEM) pentru un sistem modificat de ecuații pentru vibrații forțate de încovoiere al elementelor arborelui planetar pentru autovehicule rutiere (lăea și bol) folosind criteriul: suma tuturor exponenților Lyapunov este negativă pentru lăea/bol, așa cum se precizează în [B.G.29]. Ca o confirmare suplimentară a manifestării haotice vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lăea/bol din zona rezonanței parametrice principale, s-au calculat secțiuni Poincaré pentru lăea/bol din zona rezonanței parametrice principale, astfel încât imaginile hărților Poincaré să aibă proprietatea auto-similarității sistemului, menționată și în [B.G.29] ca metodă calitativă de manifestare a haosului.

Pentru a calcula ecuațiile vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lăea/bol ale arborelui planetar pentru autovehicule rutiere este obligatoriu să se reducă momentele de inerție ale masei și momentele de inerție geometrice pentru lăea /bol la sistemul cartezian de referință (CSR)  $X_2 Y_2 Z_2$  al arborelui intermediar ca în [B.G.28]. Toate caracteristicile inerțiale ale lăelei și bolului, respectând reprezentarea schematică prezentată în Figura 4.2, sunt descrise în lucrarea [B.G.28]. Modelele dinamice ale vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lăea și pentru bol sunt prezentate în lucrarea [B.G.28]. Ecuația vibrațiilor forțate de încovoiere în deformarea normalizată pentru încovoiere pentru lăea este [B.G.28](pp. 13, 14)

$$\ddot{w}_1 + 2\xi\Omega_1 \sqrt{\frac{1 - C_1 \cos(2\varphi_1)}{1 - C_2 \cos(2\varphi_1)}} \dot{w}_1 + \Omega_1^2 \frac{1 - C_1 \cos(2\varphi_1)}{1 - C_2 \cos(2\varphi_1)} w_1 = -\Gamma_1 w_1^3 - \Gamma_2 w_1^5 \quad (5.1)$$

în timp ce ecuația vibrațiilor forțate de încovoiere în deformarea normalizată pentru încovoiere pentru bol este [B.G.28](pp. 13, 14)

$$\ddot{w}_3 + 2\xi\Omega_3 \sqrt{\frac{1 - C_3 \cos(2\varphi_3)}{1 - C_4 \cos(2\varphi_3)}} \dot{w}_3 + \Omega_3^2 \frac{1 - C_3 \cos(2\varphi_3)}{1 - C_4 \cos(2\varphi_3)} w_3 = -\Gamma_3 w_3^3 - \Gamma_4 w_3^5. \quad (5.2)$$

Constantele  $C_i$ ,  $\Gamma_i$  și frecvențele naturale pentru lăea pentru încovoiere  $\Omega_l$  și pentru bol pentru încovoiere  $\Omega_l$  sunt exprimate în lucrarea [B.G.28]. Termenii care induc excitațiile forțate în zona rezonanței parametrice principale conțin pentru lăea  $\Omega_l$ ,  $\cos(2\varphi_1)$  și pentru bol  $\Omega_3$ ,  $\cos(2\varphi_3)$  și trebuie să satisfacă ecuațiile [B.G.16](pp. 199, 425)

$$\eta_1 = 2\Omega_1 = \frac{2d\varphi_1}{dt}, \eta_3 = 2\Omega_3 = \frac{2d\varphi_3}{dt} \quad (5.3)$$

unde,  $\eta_1$  este frecvența de excitare a lăelei și  $\eta_3$  este frecvența de excitare a bolului. Pentru a utiliza ecuațiile (5.1) și (5.2) este obligatoriu să se calculeze caracteristicile de geometrie pentru lăea  $J_{1T}$ ,  $J_{2T}$ , și caracteristicile de geometrie ale bolului  $J_{1B}$ ,  $J_{2B}$  pe baza geometriei lor generale. Acest

lucru a fost realizat folosind software-ul AUTOCAD, iar rezultatele prezentate în Tabelul 5.1 sunt similare datelor din [B.G.28](pp. 15,19).

Tabelul 5.1. Caracteristicile geometriei lalelei/bolului

$0.5(J_{1T}+J_{2T})$ [m <sup>4</sup> ]	$0.5(J_{1B}+J_{2B})$ [m <sup>4</sup> ]	$\chi_{nT}/\chi_{nB}$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	E/G [GPa]	$\xi$	$F_s/\Delta t_s$
$9.1531 \times 10^{-7}$	$10.560 \times 10^{-7}$	0.25/0.10	7850	200/77.3	$(16-318)10^{-4}$	0.5/1...10

Tabelul 5.1 ilustrează proprietățile materiale pentru lalea /bol, precum și valorile amplitudinii șocului și duratei șocului. Comparând datele din Tabelul 1 cu cele folosite de Steinwede în experimentele sale [B.G.14] (p. 111) se pot remarca acordurile dintre ele.

Pentru lalea, zona rezonanței parametrice principale este definită printr-un interval în jurul valorii 1038,38 Hz, frecvența naturală de încovoiere fiind  $v_1 = 519,19$  Hz[B.G.28](p. 19-20). Pentru bol, zona rezonanței parametrice principale a bolului este definită printr-un interval în jurul valorii de 6306,6 Hz, frecvența naturală de încovoiere fiind  $v_3 = 3153,3$  Hz [B.G.28](p. 19-20).

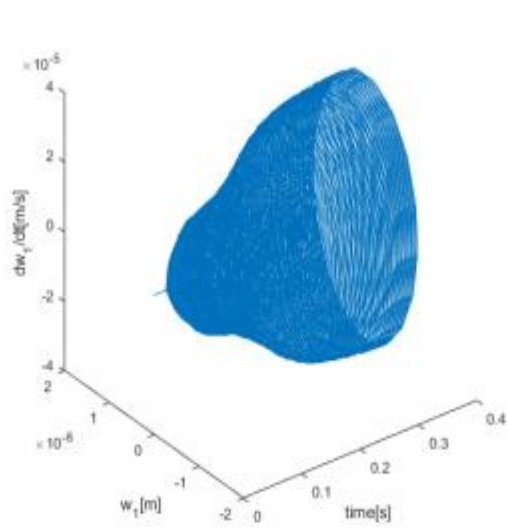
Pentru a determina portretul fazelor de timp pentru lalea și bol în vibrațiile forțate de încovoiere este obligatorie modificarea ecuațiilor (5.1) și (5.2), care devin sistemele:

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = V_{w_1}, \\ \frac{d\Theta_1}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt} = \eta_1, \Theta_1 = d\theta_1, \\ \frac{dV_{w_1}}{dt} = -2\xi\Omega_1 \sqrt{\frac{1-C_1 \cos(\Theta_1)}{1-C_2 \cos(\Theta_1)}} V_{w_1} - \Omega_1^2 \frac{1-C_1 \cos(\Theta_1)}{1-C_2 \cos(\Theta_1)} w_1 - \Gamma_1 w_1^3 - \Gamma_2 w_1^5 \end{cases} \quad (5.4)$$

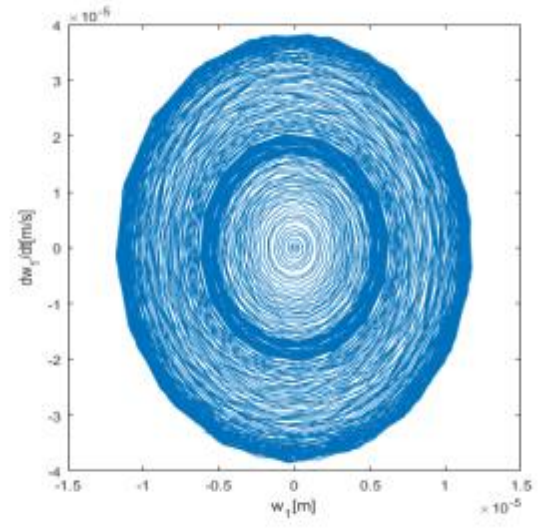
$$\begin{cases} \frac{dw_3}{dt} = V_{w_3}, \\ \frac{d\Theta_3}{dt} = \frac{d\theta_3}{dt} = \eta_3, \Theta_3 = d\theta_3, \\ \frac{dV_{w_3}}{dt} = -2\xi\Omega_3 \sqrt{\frac{1-C_3 \cos(\Theta_3)}{1-C_4 \cos(\Theta_4)}} V_{w_3} - \Omega_3^2 \frac{1-C_3 \cos(\Theta_3)}{1-C_4 \cos(\Theta_3)} w_3 - \Gamma_3 w_3^3 - \Gamma_4 w_3^5 \end{cases} \quad (5.5)$$

Folosind software-ul MATLAB, au fost calculate portretul fazelor de timp ale vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lalea și vibrațiilor forțate de încovoiere pentru bol în zona rezonanței parametrice principale [B.G.27]. Analizând portretele de fază ale vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lalea (vezi Fig. 1.b, Fig. 2.b) se poate concluziona că vibrațiile forțate de încovoiere haotice pentru lalele se manifestă în intervalul  $\xi = 0,0016-0,0216$  a raportului de amortizare, în timp ce creșterea cu 0,02 a raportului de amortizare induce o scădere a deflexiunii de încovoiere a lalelei  $w_1$  de mai mult de zece ori. De asemenea, aceeași creștere a raportului de amortizare induce o scădere a vitezei de încovoiere a lalelei de  $dw_1/dt$  de mai mult de șase ori.

Analizând portretele de fază pentru lalea în zona rezonanței parametrice principale (vezi Figura.5.1a și 5.2.a) sunt evidente manifestările efectelor de bătaie specifice haosului [B.G.30], [B.C.5.3],

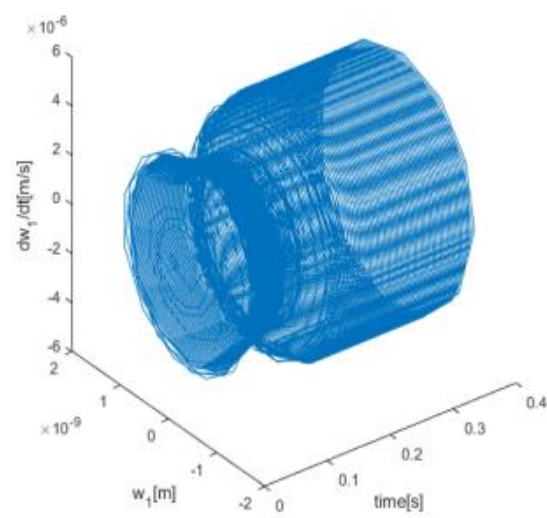


a.

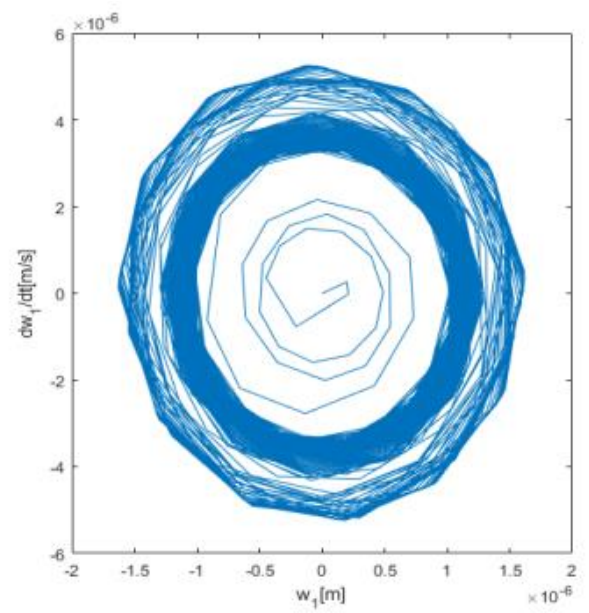


b.

Fig. 5.1 Portretul fazelor FBV al lălelei  $\chi_{nT}=0,25$  ;  $\xi=0,0016$  [B.G.30]



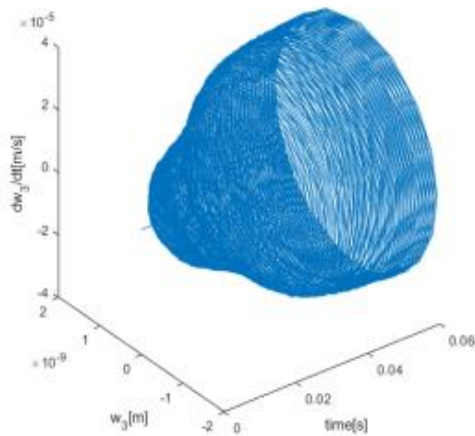
a.



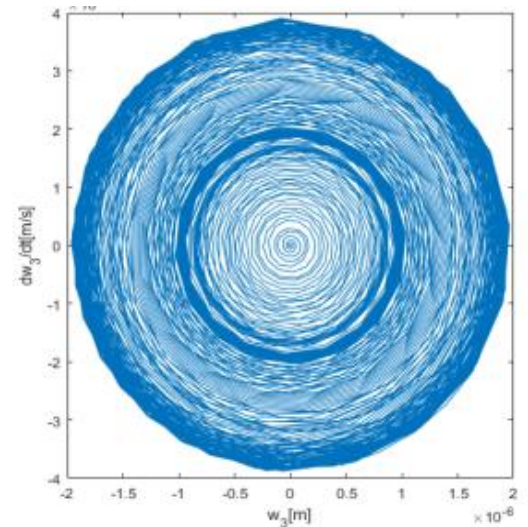
b.

Fig. 5.2 Portretul fazelor FBV al lălelei  $\chi_{nT}=0,25$  ;  $\xi=0,0216$  [B.G.30].

Analizând portretele de fază ale vibrațiilor forțate de încovoiere ale bolului (vezi Fig. 5.3.b, Fig. 5.4.b) se poate concluziona că vibrațiile forțate de încovoiere haotice pentru lăea se manifestă în intervalul  $\xi = 0,0016-0,0216$  al raportului de amortizare, în timp ce creșterea cu 0,02 a raportului de amortizare induce o scădere a deflexiunii de încovoiere a lălei  $w_3$  de mai mult de zece ori. De asemenea, aceeași creștere a raportului de amortizare induce o scădere a vitezei de încovoiere a lălei de  $dw_3/dt$  de mai mult de șase ori. Analizând portretele de fază pentru lăea în zona rezonanței parametrice principale (vezi Figura 5.3a și 5.4.a) sunt evidente manifestările efectelor de bătaie specifice haosului [B.G.27].

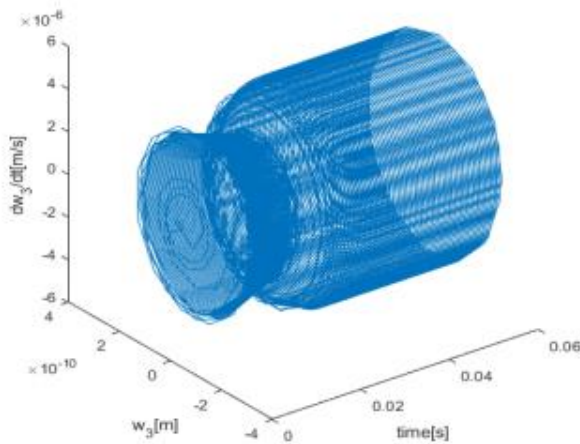


a.

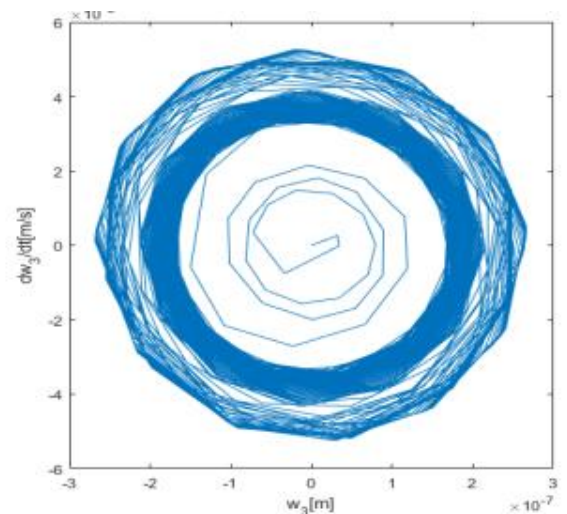


b.

Fig. 5.3 Portretul de fază FBV al bolului  $\chi_{nT}= 0,25$  ;  $\xi= 0,0016$  [B.G.30]



a.



b.

Fig. 5.4 Portretul de fază FBV al bolului  $\chi_{nT}= 0,25$  ;  $\xi= 0,0216$  [B.G.30]

Dacă comparăm rezultatele ilustrate în Figurile 5.1 și 5.2 pentru vibrațiile forțate de încovoiere pentru lăea cu cele ilustrate în Figurile 5.3 și 4 pentru vibrațiile forțate de încovoiere ale bolului se poate remarca o accentuare a efectelor de bătaie pentru bol pentru raportul de amortizare în jurul valorii de 0,0016 (vezi Fig. 5.1.b și Fig. 5.3.b) și o manifestare similară pentru vibrațiile forțate de încovoiere pentru lăea și vibrațiile forțate de încovoiere al bolului pentru raportul de amortizare în jurul valorii de 0,0216 (vezi Fig. 5.2.a și Fig. 5.4.a) [B.G.30], [B.C.5.3].

Exponenții Lyapunov calculați pe baza sistemului (5.4), care descrie vibrațiile forțate de încovoiere pentru lăea în zona rezonanței parametrice principale a lăelei (frecvența de excitație a lăelei este în intervalul de aproximativ 1038,38 Hz [B.G.28]) sunt dați de ecuațiile [B.G.12](p. 306-307)

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{1}{T_f} \sum_{i=1}^N \log_{10} \frac{|(w_1 - w_1^p)^{T_i}|}{\left\| (w_1, V_{w_1}, \Theta_1)^{T_i} - (w_1^p, V_{w_1}^p, \Theta_1^p)^{T_f} \right\|} \\
 L_{21} &= \frac{1}{T_f} \sum_{i=1}^N \log_{10} \frac{|(V_{w_1} - V_{w_1}^p)^{T_i}|}{\left\| (w_1, V_{w_1}, \Theta_1)^{T_f} - (w_1^p, V_{w_1}^p, \Theta_1^p)^{T_f} \right\|} \\
 L_{31} &= \frac{1}{T_f} \sum_{i=1}^N \log_{10} \frac{|(\Theta_1 - \Theta_1^p)^{T_i}|}{\left\| (w_1, V_{w_1}, \Theta_1)^{T_f} - (w_1^p, V_{w_1}^p, \Theta_1^p)^{T_f} \right\|}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

unde:

- indicele  $p$  indică soluția perturbată pentru intervalul  $(T_i, T_{i+1})$ ,
- $T_f$  este timpul final de integrare,
- $N$  este numărul de intervale conținute în intervalul de timp  $(0, T_f)$ .

Exponenții Lyapunov calculați pe baza sistemului (5.5), care descrie vibrațiile forțate de încovoiere ale bolului în zona rezonanței parametrice principale a bolului (frecvența de excitație a bolului este în intervalul de aproximativ 6306,6 Hz [B.G.28]) sunt dați de ecuații similare, cu aceeași semnificație dintre cele descrise anterior:

$$\begin{aligned}
 L_{13} &= \frac{1}{T_f} \sum_{i=1}^N \log_{10} \frac{|(w_3 - w_3^p)^{T_i}|}{\left\| (w_3, V_{w_3}, \Theta_3)^{T_f} - (w_3^p, V_{w_3}^p, \Theta_3^p)^{T_f} \right\|} \\
 L_{23} &= \frac{1}{T_f} \sum_{i=1}^N \log_{10} \frac{|(V_{w_3} - V_{w_3}^p)^{T_i}|}{\left\| (w_3, V_{w_3}, \Theta_3)^{T_f} - (w_3^p, V_{w_3}^p, \Theta_3^p)^{T_f} \right\|} \\
 L_{33} &= \frac{1}{T_f} \sum_{i=1}^N \log_{10} \frac{|(\Theta_3 - \Theta_3^p)^{T_i}|}{\left\| (w_3, V_{w_3}, \Theta_3)^{T_f} - (w_3^p, V_{w_3}^p, \Theta_3^p)^{T_f} \right\|}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Pentru a certifica haosul este necesar să se aplice două criterii, respectiv Metoda Exponenților Maximi Lyapunov (MLEM) cuplat cu criteriul de contracție a sumei tuturor exponenților Lyapunov care impune ca următoarea propoziție matematică să fie adevărată [B.G.12](pp. 306-307)

$$\exists i \in \{1, 2, 3\}, \max(L_{ij}) > 0, \exists L_{ij} \approx 0, \sum_1^3 L_{ij} < 0, j \in \{1, 2, 3\} \quad (5.8)$$

Figurile 5.5 și 5.6 ilustrează exponenții Lyapunov pentru două valori ale raportului de amortizare 0,0016 și 0,011 în PPRA lalelei, cu frecvența de excitație în apropiere de 1038,38 Hz. După cum se poate remarca din figurile 5.5 și 5.6, ecuația (5.8) este adevărată numai pentru raportul de amortizare în intervalul 0,0016-0,011.

Analizând Figura 5.5 se poate concluziona că manifestarea haosului este confirmată în intervalul de frecvență de excitație (950-1150) Hz pentru raportul de amortizare de 0,0016, în timp ce în Figura 5.6 manifestarea haosului este confirmată în intervalul frecvenței de excitație (1100-1150) Hz pentru raportul de amortizare de 0,011 chiar dacă de la detectarea haosului (vezi Fig. 2) indică valoarea maximă a raportului de amortizare 0,0216.

Figurile 5.7 și 5.8 ilustrează exponenții Lyapunov pentru două valori ale raportului de amortizare 0,0016 și 0,0125 în PPRA bolului, cu frecvența de excitație în apropiere de 6306,6 Hz.

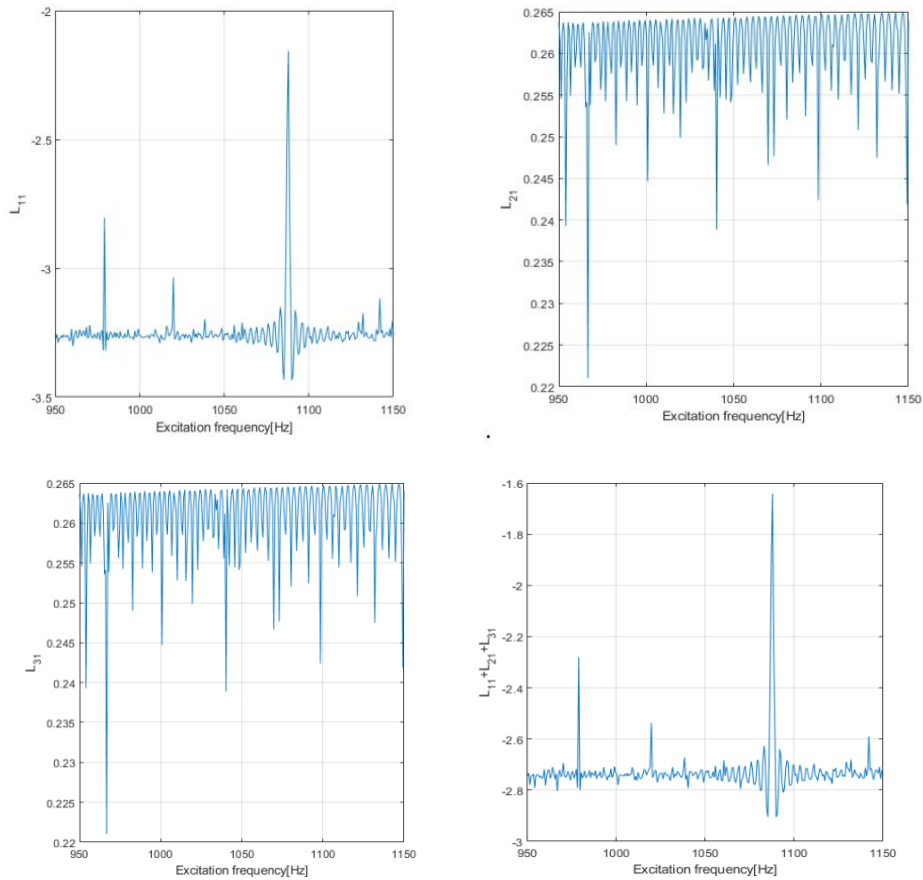


Fig. 5.5 Exponenții lui Lyapunov pentru lalea la FBV în PPRA (1038,38 Hz),  $v_1=519$  19Hz,  $\xi= 1.6 \cdot 10^3$  [B.G.30]

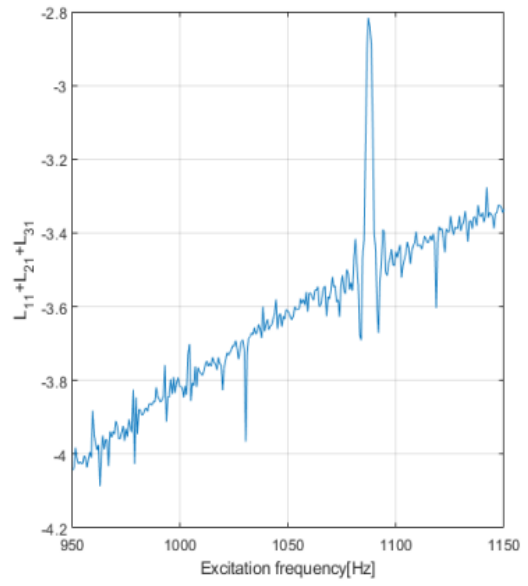
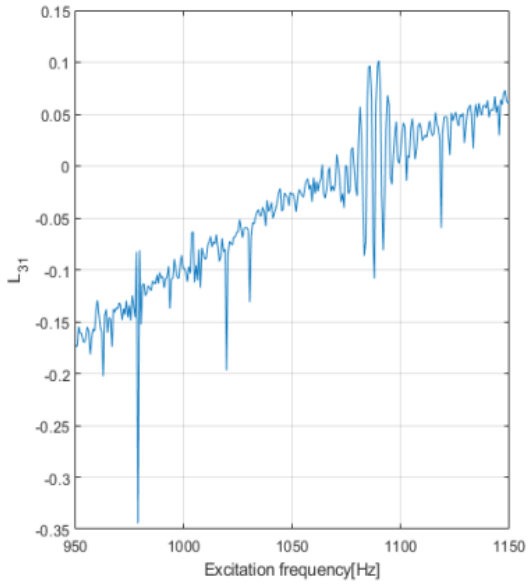
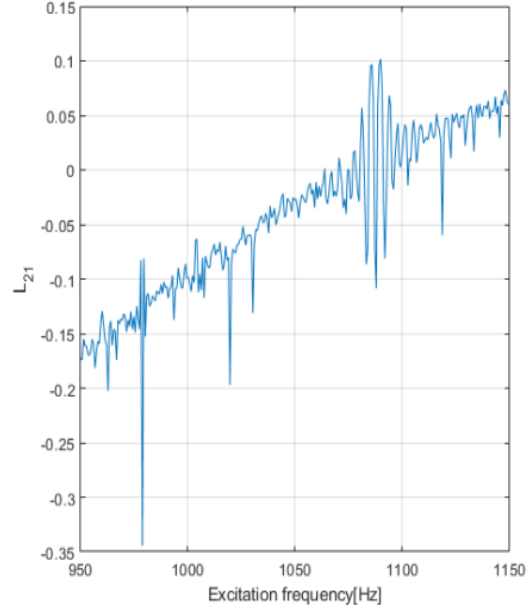
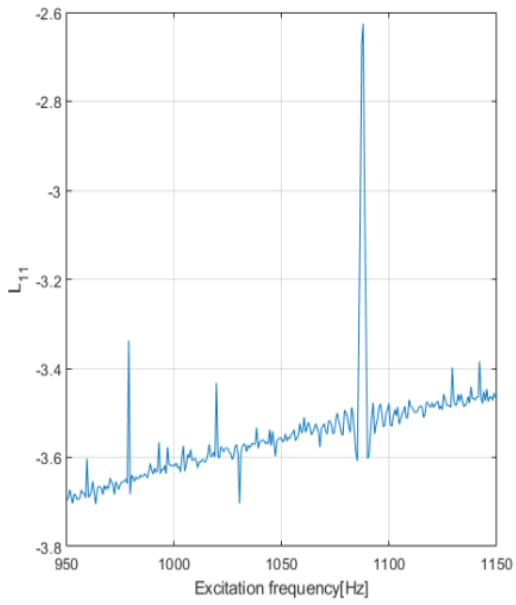


Fig. 5.6 Exponenții lui Lyapunov pentru lăca la FBV în PPRA (1038,38 Hz),  $v_1=519.19\text{ Hz}$ ,  $\xi=11 \cdot 10^3$  [B.G.30]

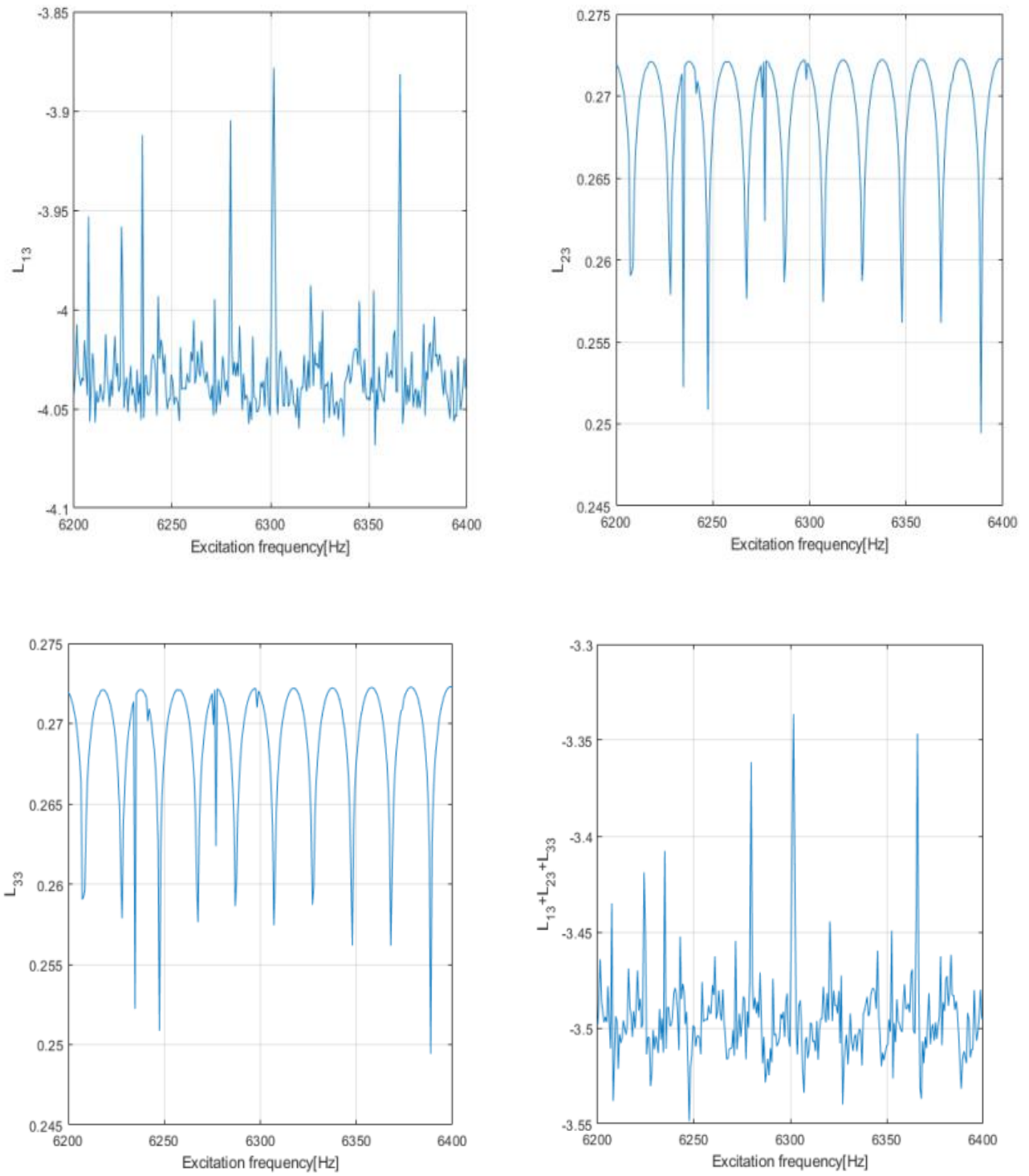


Fig. 5.7 Exponenții lui Lyapunov pentru bol la FBV în PPRA (1038,38 Hz),  $v_3=519$  19Hz ,  $\xi= 1.6 \cdot 10^3$  [B.G.30]



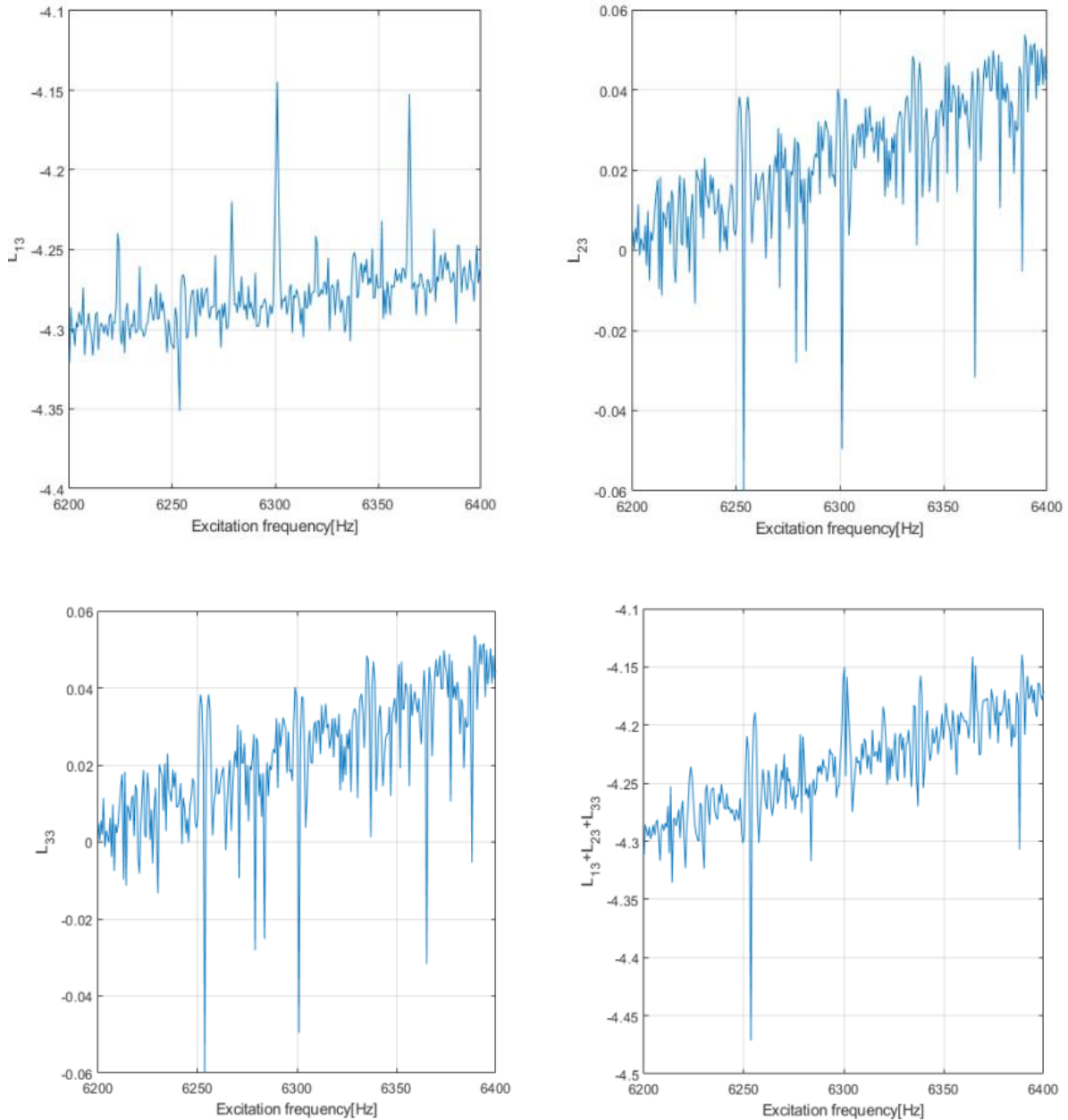


Fig. 5.8 Exponenții lui Lyapunov pentru bol la FBV în PPRA (1038,38 Hz),  $v_3=519$  19Hz ,  $\xi= 12,5 \cdot 10^{-3}$  [B.G.30]

După cum se poate remarca din figurile 5.7 și 5.8, relația (5.8) este adevărată numai pentru raportul de amortizare în intervalul 0,0016-0,0125. Analizând figura 5.7 se poate concluziona că manifestarea haosului este confirmată în intervalul frecvenței de excitație (6200-6400) Hz pentru raportul de amortizare de 0,0016, în timp ce în figura 5.8 manifestarea haosului este confirmată în intervalele de frecvență de excitație (6300-6365) Hz și (6368-6400) Hz pentru raportul de amortizare de 0,0125 chiar dacă de la detectarea haosului (vezi figura 5.4) indică valoarea maximă a raportului de amortizare 0,0216. Conform celor mai recente evoluții în teoria haosului, dacă doi exponenți Lyapunov sunt pozitivi și toți exponenții Lyapunov respectă relația (5.8), sistemul

dinamic este considerat a fi un sistem hiperhaotic [B.C.5.1]. Analizând figurile 5.5-5.8 se poate concluziona că arborele planetar al autovehiculului rutier este un sistem hiperhaotic pentru un raport de amortizare în intervalul 0,0016-0,011 și frecvența de excitație în intervalul (1100-1150) Hz pentru lalea în FBV, în timp ce pentru bolul în FBV manifestarea hiperhaosului este valabilă pentru un raport de amortizare în intervalul 0,0016-0,0125 și frecvența de excitație în intervalele (6300-6365) Hz și (6368-6400) Hz. Pentru a reconfirma manifestarea haotică a vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lalea și a vibrațiilor forțate de încovoiere pentru bol în zona rezonanței parametrice principale s-a calculat, utilizând în software-ul MATLAB bazat pe sistemele (5.4) și (5.5), Secțiunile Poincaré (PM) care reprezintă intersecția orbitelor în portretele de fază cu o suprafață ortogonală la perioade egale ( $N$  număr de puncte), folosind procedeul matematic prezentat în [B.G.12] (p. 194). Dacă vibrațiile forțate de încovoiere pentru lalea sau vibrațiile forțate de încovoiere pentru bol sunt periodice sau cvasi-periodice, secțiunile Poincaré (PM) reprezintă puncte de inflexiune sau imagini de tip hiperbolic sau eventual curbe separatoare. Pentru un interval de frecvență de excitație în apropiere de 1038,38 Hz și pentru un raport de amortizare  $\xi = 1,6 \cdot 10^{-3}$ . Figura 5.9 ilustrează secțiunea Poincaré pentru vibrațiile forțate de încovoiere pentru lalea în zona rezonanței parametrice principale folosind  $N=100.000$  secțiuni de suprafață ortogonale la orbite (pentru portretele de fază  $(w_1, dw_1/dt)$ ).

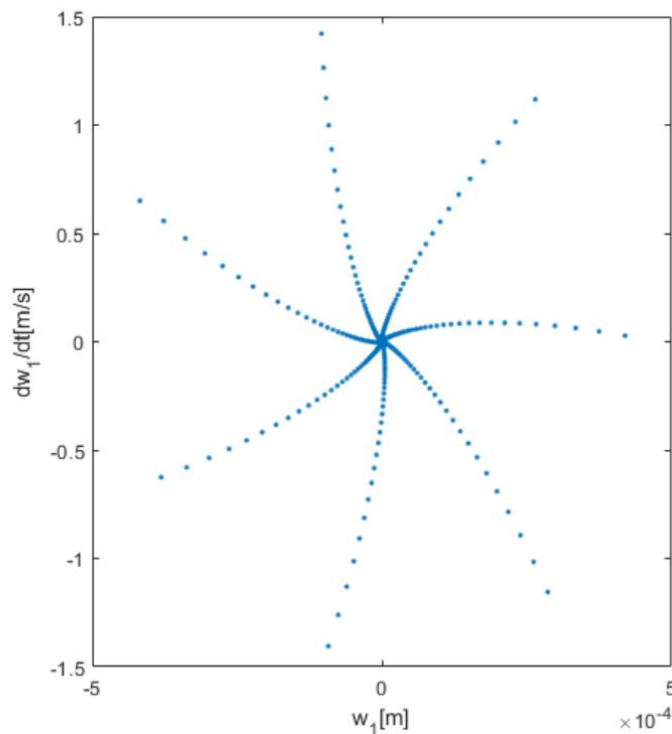


Fig. 5.9 Secțiunea Poincaré pentru FBV lalelei în PPRA (1038.38Hz),  $N=100,0$   $\xi = 1,6 \cdot 10^{-3}$  [B.G.30]

După cum se poate remarca din Figura 5.9, imaginea are proprietățile atractorilor stranii, respectiv auto similaritatea și o structură difuzivitatea punctelor având o densitate diferită de pixeli pe unitatea de suprafață a imaginii. Pentru un interval de frecvență de excitație în apropiere de 6306,6 Hz și pentru un raport de amortizare  $\xi = 1,6 \cdot 10^{-3}$  figura 5.10 ilustrează Secțiunea Poincaré pentru FBV al bolului în PPRA folosind  $N=100.000$  secțiuni de suprafață ortogonale la orbite pentru portretele de fază  $(w_1, dw_1/dt)$ .

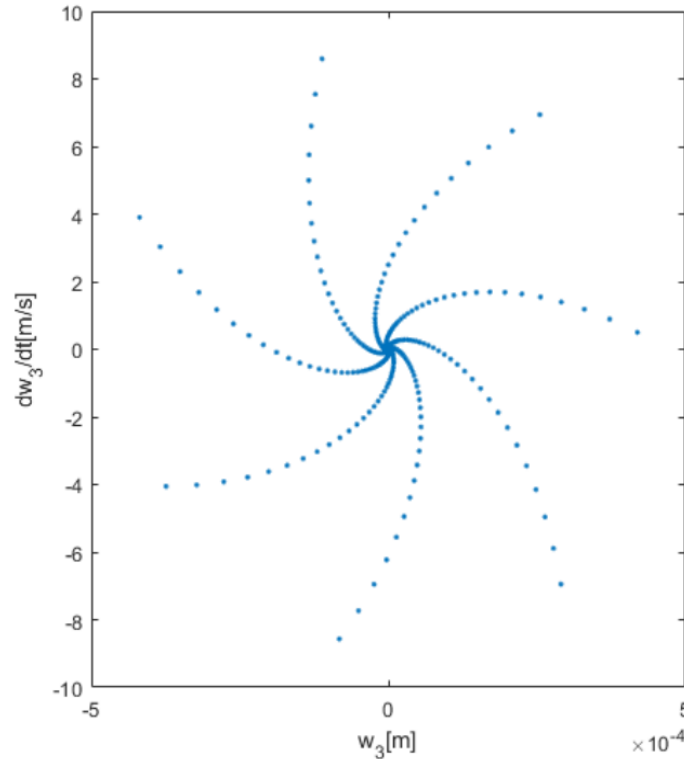


Figura 5.10 Secțiunea Poincaré pentru FBV bolului în PPRA (1038.38Hz),  $N=100,0 \xi = 1,6 \cdot 10^{-3}$  [B.G.30]

După cum se poate remarca din figura 5.10 imaginea are proprietățile atractoarelor stranie, respectiv auto-asemănarea și o structură difuză de puncte având o densitate diferită de pixeli pe unitatea de suprafață a imaginii. Reconfirmarea manifestării haotice a vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lalea și bol prin secțiunea Poincaré, respectiv atractorii stranie. Un astfel de comportament dinamic este considerat de Steinwede [B.G.14](pp. 88-94) ca fiind cauza ciupirii interne a clopotelor lalelei și bolului precum și a micro-fisurilor de pe axele tripodei. De asemenea, Steinwede a asimilat mecanismul vibrațiilor forțate de încovoiere haotice și vibrația haotică de torsiune forțată a arborilor planetari pentru autovehicule rutiere cu un mecanism similar pentru comportamentul dinamic neliniar al transmisiilor sistemelor angrenate, mecanisme deja investigate de primul autor al prezentei lucrări în [B.C.5.2]. După cum se poate remarca, creșterea raportului de amortizare are un efect benefic evitând comportamentul haotic al vibrațiilor forțate de încovoiere pentru arborii planetari pentru autovehicule rutiere, dar induce stres termic.

Rezultatele obținute au confirmat teoretic pentru prima dată manifestarea hiperhaosului vibrațiilor forțate de încovoiere în zona principală de rezonanță parametrică pentru lalea și bol, în concordanță cu cercetările experimentale ale lui Steinwede [B.G.14](pp. 86-94) pentru manifestarea de ciupire, precum și datele referitoare la momentul de inerție al masei [B.G.14](p. 111) și comportamentul dinamic haotic al transmisiei homocinetice similar cu comportamentul dinamic haotic al transmisiei cu angrenaje [B.G.14](p. 117), mecanism haotic deja studiat de primul autor în [B.C.5.2]. În cele din urmă, lucrarea a evidențiat mecanismul comportamentului dinamic neliniar hiperhaotic pentru transmisia homocinetică [B.C.5.2]. Această nouă metodă poate fi folosită ca un instrument puternic de către proiectanții de arbori planetari auto, precum și de către proiectanții de amortizoare dinamice ale vibrațiilor forțate de încovoiere pentru arbori planetari auto [B.G.30; B.C.5.3].

## Capitolul 6. Concluzii generale. Contribuțiile originale în domeniul tezei de doctorat. Perspective generale pentru dezvoltarea cercetărilor în domeniu.

### 6.1 Concluzii generale

În concluzie se demonstrează că neuniformitatea izometriei geometrice și cinematice a arborelui planetar al autovehiculului rutier poate fi luată în considerare. Aceasta este o provocare pentru proiectanții arborilor planetari din cauza dificultății de a anticipa cantitățile suplimentare pentru solicitările la oboseală. Mai mult, variația armonică a neuniformității din izometria geometrică și cinematică a arborelui planetar induce comportamentul dinamic parametric neliniar al unei articulații homocinetice.

După cum se poate observa din toate aspectele acestei teze, arborii planetari pentru autovehicule rutiere nu au uniformitatea izometriei geometrice și cinematice perfectă, chiar dacă articulația lalea-tripodă și articulația bol-colivie cu bile-nucă reprezintă cele mai avansate articulații homocinetice.

Predicția neuniformității izometriei geometrice și cinematice a arborelui planetar reprezintă un element important pentru proiectanți, deoarece permite predicția în etapele timpurii de proiectare a arborilor homocinetici a comportamentului dinamic neliniar.

Predicția rezonanțelor precum :

- rezonanța super-armonică;
- rezonanța sub-armonică;
- rezonanța parametrică principală;
- rezonanțe simultane;
- rezonanțe interne.

De asemenea, acest aspect permite investigarea stabilității în aceste game de rezonanțe specifice pentru comportamentul dinamic parametric neliniar al arborelui planetar. Aceste fenomene au o importanță uriașă în stabilirea comportamentului dinamic al arborelui planetar de la cutia de viteze la roată.

Se poate concluziona că această teză introduce o corecție importantă pentru proiectarea arborilor planetari pentru autovehicule rutiere, pentru predicția comportamentului dinamic la torsiune și pentru predicția comportamentului dinamic la încovoiere și torsiune a arborilor planetari în stadiile incipiente de proiectare. Sunt luate în considerare majoritatea fenomenelor observate în practica industrială și exploatarea mașinilor precum:

- neuniformitatea izometriei geometrice și cinematice a arborelui planetar;
- neuniformitatea momentelor de inerție geometrice și masice ale secțiunii transversale pentru lalea, tripodă și bol;
- rigiditatea și amortizarea articulațiilor arborelui planetari pentru autovehicule rutiere lalea-tripodă-arbore intermediar și arbore intermediar-colivie cu bile-bol;
- excitația armonică a arborelui planetar indusă de motorul cu ardere internă;
- excitația prin șoc indus de interacțiunea dintre pneu și calea de rulare.

În plus, modelele permit dezvoltarea viitoarelor direcții de cercetare pentru investigarea rezonanțelor primare, super-armonice, subarmonice, parametrice principale, combinate, interne și simultane, precum și pentru investigarea stabilității pentru vibrațiile staționare, precum și nestaționare. Prin urmare, acest model de comportament dinamic la torsiune pentru arborele planetar pentru autovehicule rutiere poate fi utilizat în etapele incipiente de proiectare, precum și în predicția durabilității arborilor planetari. Mai mult, este important ca modelul să fie adăugat în flow-chartul algoritmului de proiectare pentru alegerea elementelor de confort ale autovehiculului, pentru a lua în considerare în mod adecvat acest tip de comportament dinamic, care induce excitații structurii mașinii.

Rezultatele obținute au fost stabilite în Capitolul 1, Paragraful “1.4 Obiectivele tezei de doctorat”, în urma determinărilor analitice a momentelor de inerție mecanice și a momentelor de inerție geometrice ținând cont de neuniformitățile geometrice ale acestora, investigarea comportamentului dinamic atât la torsiune cât și la încovoiere și proiectarea unui model consistent fizic pentru vibrațiile forțate de torsiune și încovoiere pentru lalea și pentru bol, plus determinarea manifestării haotice a vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lalea/bol care au confirmat teoretic pentru prima dată manifestarea hiperhaosului vibrațiilor forțate de încovoiere în zona rezonanței parametrice principale pentru lalea și bol.

## 6.2 Contribuții originale în domeniul tezei de doctorat

Investigațiile au permis diseminarea rezultatelor obținute și publicarea acestora, ca prim autor sau co-autor, a unui număr de 8 articole științifice, în reviste de specialitate cât și în volumele unor conferințe internaționale, două lucrări fiind indexate WOS.

Contribuțiile originale ale acestei lucrări sunt investigarea haotică a vibrațiilor forțate de încovoiere a arborilor planetari pentru autovehicule rutiere utilizând o nouă metodă cu două etape:

- determinarea neuniformității izometriei geometrice și cinematice pentru arborii homocinetici;
- calculul neuniformității momentelor de inerție geometrice și masice;
- detectarea posibilelor manifestări haotice cu ajutorul portretului fazelor;
- determinarea ecuațiilor vibrații forțate de torsiune și încovoiere indusa de funcționarea motorului:
  - a. excitație externă în primul element al arborelui planetar – lalea;
  - b. excitație de tip șoc induse de interacțiunea dintre pneu și calea de rulare;
- confirmarea cantitativă și calitativă a haosului determinist (atractori stranii) pentru vibrații forțate de încovoiere folosind un MLEM<sup>1</sup> modificat cuplat cu metoda secțiunilor Poincaré.
- s-au determinat frontierele de instabilitate pentru vibrații forțate de încovoiere în zona rezonanței parametrice principale.

Rezultatele obținute au confirmat teoretic pentru prima dată manifestarea hiperhaosului vibrațiilor forțate de încovoiere în zona rezonanței parametrice principale pentru lalea și bol, precum și datele referitoare la momentul de inerție al masei și comportamentul dinamic haotic al transmisiei homocinetice similar cu comportamentul dinamic haotic al transmisiei cu roți dințate.

Rezultatele obținute sunt conforme cu rezultatele obținute în literatura de specialitate de Steinwede, J. [B.G.14] care prin experimentele sale a demonstrat că un comportament dinamic parametric neliniar al arborilor planetari pentru autovehicule rutiere este ca cel al sistemelor angrenate [B.G.14] (p. 117), și de aceea observăm fenomene similare de ciupituri și micro fisuri în interiorul lalelei și în interiorul bolului articulațiilor CVJ lalea–tripodă și bol–colivie cu bile-nucă [B.G.14] (pp. 88–94).

În cele din urmă, teza evidențiază mecanismul comportamentului dinamic neliniar hiperhaotic pentru transmisia homocinetică.

---

<sup>1</sup> MLEM - Metoda modificată a exponenților Lyapunov

### 6.3 Perspective generale pentru dezvoltarea cercetărilor în domeniu

Rezultatele obținute în cadrul tezei „Studiul comportamentului dinamic al mecanismelor planetare pentru autovehicule rutiere”, reprezintă un punct de plecare pentru cercetarea viitoare a fenomenelor dinamice în zona menționată anterior.

Această nouă metodă poate fi folosită ca un instrument puternic de către proiectanții de arbori planetari auto, precum și de către proiectanții de amortizoare dinamice ale vibrațiilor forțate de încovoiere pentru arbori planetari auto.

Direcțiile viitoare de cercetare sunt:

1. Cercetări privind studiul comportamentului dinamic neliniar hiperhaotic al arborilor homocinetici;
2. Investigarea stabilității gamelor de rezonanțe specifice pentru comportamentul dinamic parametric neliniar al arborelui planetar:
  - rezonanța super-armonică;
  - rezonanța sub-armonică;
  - rezonanța parametrică principală;
  - rezonanțe simultane;
  - rezonanțe combinate;
  - rezonanțe interne.
3. Cercetarea și dezvoltarea modelelor fizico-matematice pentru vibrațiile forțate de torsiune și încovoiere ale arborelui planetar pentru autovehicule rutiere;
4. Detectare și confirmarea manifestării haotice a vibrațiilor forțate de încovoiere pentru lăea/bol în zona rezonanțelor sub-armonice, supra-armonice, combinate, interne, simultane;
5. Realizarea de programe software pentru predicția performanțelor dinamice ale transmisiilor homocinetice.

## Bibliografie

### Bibliografie Generală

1. Duditz, F. D. (1975). Zur Kinematik und Dynamik von Tripode-Gelenkgetrieben (The kinematics and dynamics of tripod jointed drivelines) *Konstruktion* 27 p. 335–341.  
[https://www.academia.edu/22098406/Kinematic\\_and\\_dynamic\\_analyses\\_of\\_the\\_tripode\\_joint](https://www.academia.edu/22098406/Kinematic_and_dynamic_analyses_of_the_tripode_joint)
2. Rao, S.S. (2007), *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, USA, ISBN: 978-0-471-77171-5. <https://wp.kntu.ac.ir/hrahmani/Adv-Vibrations-Books/Continuous-Vibrations-Rao.pdf>
3. Schmelz, F.; Count Seherr-Thoß, H. Ch.: Die Entwicklung der Gleichlaufgelenke für den Frontantrieb (Development of constant velocity joints for front wheel drive). VDI-Report 418 (1981) 197–207 [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-02746-2\\_2](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-02746-2_2)
4. Orain, M.: *Die Gleichlaufgelenke, allgemeine Theorie und experimenteller Forschung* (Constant velocity joints, general theory and experimental research). German translation by H. W. Günther. Paris: Glaenzer-Spicer 1976  
[https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-30170-4\\_2](https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-30170-4_2)
5. Seherr-Thoss, H.C.; Schmelz, F.; Aucktor, E. *Theory of Constant Velocity Joints (CVJ)*. In *Universal Joints and Driveshafts*, 2nd ed.; Springer: Berlin, Germany, 2006; pp. 53–80. <https://download.e-bookshelf.de/download/0000/0101/78/L-G-0000010178-0002343465.pdf>
6. Shao, K.; Zheng, J.; Huang, K.; Qiu, M.; Sun, Z. Robust model referenced control for vehicle rollover prevention with time-varying speed. *Int. J. Veh. Des.* 2021, 85, 48–68. Available online: <https://www.inderscienceonline.com/doi/abs/10.1504/IJVD.2021.117154> (accessed on 7 December 2021).  
[https://www.researchgate.net/publication/354041363\\_Robust\\_model\\_referenced\\_control\\_for\\_vehicle\\_rollover\\_prevention\\_with\\_time-varying\\_speed](https://www.researchgate.net/publication/354041363_Robust_model_referenced_control_for_vehicle_rollover_prevention_with_time-varying_speed)
7. Deng, B.; Zhao, H.; Shao, K.; Li, W.; Yin, A. Hierarchical Synchronization Control Strategy of Active Rear Axle Independent Steering System. *Appl. Sci.* 2020, 10, 3537. [https://www.researchgate.net/publication/341518394\\_Hierarchical\\_Synchronization\\_Control\\_Strategy\\_of\\_Active\\_Rear\\_Axle\\_Independent\\_Steering\\_System](https://www.researchgate.net/publication/341518394_Hierarchical_Synchronization_Control_Strategy_of_Active_Rear_Axle_Independent_Steering_System)
8. Tiberiu-Petrescu, F.I.T.; Petrescu, R.V.V. The structure, geometry, and kinematics of a universal joint. *Indep. J. Man ana Prod.* 2019, 10, 1713–1724.  
[https://www.researchgate.net/publication/336966355\\_The\\_structure\\_geometry\\_and\\_kinematics\\_of\\_a\\_universal\\_joint](https://www.researchgate.net/publication/336966355_The_structure_geometry_and_kinematics_of_a_universal_joint)
9. Ertürka, A.T.; Karabayb, S.; Baynalç, K.; Korkutd, T. Vibration Noise Harshness of a Light Truck Driveshaft, Analysis and Improvement with Six Sigma Approach. *ACTA Phys. Pol. A* 2017, 131, 477–480.  
[https://www.researchgate.net/publication/316437150\\_Vibration\\_Noise\\_Harshness\\_of\\_a\\_Light\\_Truck\\_Driveshaft\\_Analysis\\_and\\_Improvement\\_with\\_Six\\_Sigma\\_Approach](https://www.researchgate.net/publication/316437150_Vibration_Noise_Harshness_of_a_Light_Truck_Driveshaft_Analysis_and_Improvement_with_Six_Sigma_Approach)

10. Kamalakkannan, B. Modelling and Simulation of Vehicle Kinematics and Dynamics. Master's Thesis, Halmstad University, Halmstad, Sweden, 13 January 2017  
<https://hh.diva-portal.org/smash/get/diva2:1115795/FULLTEXT02.pdf>
11. Kishore, M.; Keerthi, J.; Kumar, V. Design and Analysis of Drive Shaft of an Automobile. *Int. J. Eng. Trends Technol.* 2016, 38, 291–296.  
[https://www.researchgate.net/publication/309329869\\_Design\\_and\\_Analysis\\_of\\_Drive\\_Shaft\\_of\\_an\\_Automobile](https://www.researchgate.net/publication/309329869_Design_and_Analysis_of_Drive_Shaft_of_an_Automobile)
12. Mazzei, A.J.; Scott, R.A. Principal Parametric Resonance Zones of a Rotating Rigid Shaft Driven through a Universal Joint. *J. Sound Vib.* 2001, 244, 555–562.  
[https://www.researchgate.net/publication/243365524\\_Principal\\_parametric\\_resonance\\_zones\\_of\\_a\\_rotating\\_rigid\\_shaft\\_driven\\_through\\_a\\_universal\\_joint](https://www.researchgate.net/publication/243365524_Principal_parametric_resonance_zones_of_a_rotating_rigid_shaft_driven_through_a_universal_joint)
13. Browne, M.; Palazzolo, A. Super harmonic nonlinear lateral vibrations of a segmented driveline incorporating a tuned damper excited by a non-constant velocity joints. *J. Sound Vib.* 2008, 323, 334–351.  
<https://vcel.tamu.edu/Other%20Contents/Publications/Super%20harmonic%20nonlinear%20lateral%20vibrations%20of%20a%20segmented%20driveline%20incorporating%20a%20tuned%20damper%20excited%20by%20non-constant%20velocity%20joints.pdf>
14. Steinwede, J. Design of a Homokinetic Joint for Use in Bent Axis Axial Piston Motors. Ph.D. Thesis, Aachen University, Aachen, Germany, 25 November 2020. Available online: <https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=%E2%80%9DDESIGN+OF+A+HOMOKINETIC+JOINT+FOR+USE+IN+BENT+AXIS+AXIAL+PISTON+MOTORS%E2%80%9D+J.+Steinwede+>
15. Feng, H.; Rakheja, S.; Shanguan, W.B. Analysis and optimization for generated axial force of a driveshaft system with interval of uncertainty. *Struct. Multidiscip. Optim.* 2021, 63, 197–210. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1007/s00158-020-02679-0>
16. Nayfeh, A.H.; Mook, D.T. *Nonlinear Oscillations*; John Wiley & Sons: New York, NY, USA, 1979 <https://www.wiley.com/en-gb/Nonlinear+Oscillations-p-9780471121428>
17. Sireteanu, T.; Gündisch, O.; Paraian, S. *Random Vibrations of Automotive*; Technical Publishing House: Bucharest, Romania, 1981.  
[https://www.researchgate.net/publication/226119372\\_Simulation\\_Results\\_Using\\_Shock\\_Absorbers\\_with\\_Primary\\_Intelligence-VZN](https://www.researchgate.net/publication/226119372_Simulation_Results_Using_Shock_Absorbers_with_Primary_Intelligence-VZN)
18. Bugaru, M., **Vasile, A.**, Nonuniformity of Isometric Properties of Automotive Driveshafts, *MDPI-Computation*, e-ISSN 2079-3197, **2021**, Vol 9, 9(12)-145, **WOS: 000735922400001**, DOI: 10.3390/computation9120145, **FI=2.2,Q2(indexat WOS 2022)**  
<https://doi.org/10.3390/computation9120145>,  
<https://www.webofscience.com/wos/woscc/fullrecord/WOS:000735922400001?SID=EUW1ED0BAEcWoqNMuNgqJY88vtNwz>
19. Farshidianfar, A., Ebrahimi, M., Rahnejat, H., Menday, M.T., Moavenian, M.(2002), “Optimization of the high-frequency torsional vibration of vehicle driveline systems using genetic algorithms.”, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part K J. Multi-Body Dyn.*, Vol. 216, pp. 249–262. <https://doi.org/10.1177/146441930221600305>.
20. Komorska, I., Puchalski, A.(2013), “On-board diagnostics of mechanical defects of the vehicle drive system based on the vibration signal reference model.”, *J. Vibroeng.*, Vol.



15, pp. 450–458, ISSN 1392-8716.

[https://www.academia.edu/95840440/On\\_board\\_diagnostics\\_of\\_mechanical\\_defects\\_of\\_the\\_vehicle\\_drive\\_system\\_based\\_on\\_the\\_vibration\\_signal\\_reference\\_model](https://www.academia.edu/95840440/On_board_diagnostics_of_mechanical_defects_of_the_vehicle_drive_system_based_on_the_vibration_signal_reference_model)

21. Alugongo, A.A. Parametric Vibration of a Cardan Shaft and Sensitivity Analysis. In Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2018 Vol II WCECS, San Francisco, CA, USA, 23–25 October 2018. Available online: <https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=Parametric+Vibration+of+a+Cardan+Shaft+and+Sensitivity+Analysis+Alfayo+A.+Alugong>
22. Xu, J., Zhu, J., Xia, F.(2020), “Modeling and Analysis of Amplitude-Frequency Characteristics of Torsional Vibration for Automotive Powertrain. Hindawi Shock Vib. 2020, 2020. <https://www.hindawi.com/journals/sv/2020/6403413/>
23. Idehara, S.J.; Flach, F.L.; Lemes, D. Modeling of nonlinear torsional vibration of automotive powertrain. J. Vib. Control. 2018, 24, 1774–1786. [https://www.researchgate.net/publication/308132759\\_Modeling\\_of\\_nonlinear\\_torsional\\_vibration\\_of\\_the\\_automotive\\_powertrain](https://www.researchgate.net/publication/308132759_Modeling_of_nonlinear_torsional_vibration_of_the_automotive_powertrain)
24. Bugaru, M.; Chereches, T.; Trana, E.; Gheorghian, S.; Homotescu, T.N. Theoretical model of the dynamic interaction between wagon train and continuous rail. WSEAS Trans. Math. 2006, 5, 374–378. Available online: [https://scholar.google.com/citations?view\\_op=view\\_citation&hl=en&user=tYI6MzwAAAAJ&citation\\_for\\_view=tYI6MzwAAAAJ:FxGoFyzp5QC](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=tYI6MzwAAAAJ&citation_for_view=tYI6MzwAAAAJ:FxGoFyzp5QC)
25. Rao, S.S. Mechanical Vibrations, 5th ed.; Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ, USA, 2011; ISBN 978-0-13-212819-3. [https://www.researchgate.net/profile/V-T-T-Nguyen/publication/273330566\\_Basic\\_Mechanical\\_Vibrations/links/54fecf170cf2741b69f164f2/Basic-Mechanical-Vibrations.pdf](https://www.researchgate.net/profile/V-T-T-Nguyen/publication/273330566_Basic_Mechanical_Vibrations/links/54fecf170cf2741b69f164f2/Basic-Mechanical-Vibrations.pdf)
26. Bugaru, M., Vasile, A., A Physically Consistent Model for Forced Torsional Vibrations of Automotive Driveshafts, MDPI-Computation, e-ISSN 2079-3197, **2022**, Vol 10, 10(1), **WOS: 000747629800001**, DOI: 10.3390/computation10010010, **FI=2.2,Q2(indexat WOS 2022)** <https://doi.org/10.3390/computation10010010>, <https://www.webofscience.com/wos/woscc/fullrecord/WOS:000747629800001?SID=EUW1ED0BAEcWoqNMuNgqJY88v>
27. Bugaru, M., Vasile, O., Vasile, A., Investigation of Nonlinear Dynamic Parametric Stability for Forced Bending Vibration of an Automotive Driveshaft Using Asymptotic Method, *Proceedings of the 10th IC-SCCE, 10th International Conference from Scientific Computing to Computational Engineering*, 6-9 July **2022**, Athens, Greece, ISSN 2241-8865, ISBN 978-618-84028-4-3, pp. 104-117 <https://www.mdpi.com/2079-3197/9/12/145>
28. Bugaru, M., Vasile, O., Modeling and Analysis of FBV Movements for Automotive Driveshafts in the PPR Region, *MDPI-Applied Sciences*, e-ISSN 2076-3417, **2022**, Vol. 12(7), 3237, **WOS: 000781051300001**, DOI: 10.3390/app12073237, **IF=2,838 (2021)--Q2**, <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000781051300001?SID=EUW1ED0EABncEBOWBgpRp8kZOQOcJ>

29. Deciu, E.; Bugaru, M.; Dragomirescu, C. Nonlinear Vibrations with Applications in Mechanical Engineering; Romanian Academy Publishing House: Bucharest, Romania, 2002; ISBN 973-27-0911-1. [file:///C:/Users/py12774/Downloads/applsci-12-03237-v3%20\(2\).pdf](file:///C:/Users/py12774/Downloads/applsci-12-03237-v3%20(2).pdf)
30. M. Bugaru, **A. Vasile**, Investigation of chaotic forced bending vibrations of the automotive driveshaft, U.P.B. Sci. Bull., Series D, Vol. 85, Issue 3, pp. 93-110, Indexat Scopus 30/08/2023 2023 ISSN 1454-2358 <https://0d10e8nla-y-https-www-scopus-com.z.e-nformation.ro/record/display.uri?eid=2-s2.0-85168542524&origin=resultslist&sort=plf-f>

### Bibliografie Capitolul 1

1. Glaenger Spicer, Specialiste mondial de la transmission, 1988. <https://docplayer.fr/66116946-Joints-homocinetiques.html>
2. Reuleaux, F.: Theoretische Kinematik (Theoretical Kinematics). Vol. I, Brunswick: Vieweg 1875, p. 179 onwards <https://www.qbbooks.com/pages/books/71547/f-reuleaux-franz-reuleaux/lehrbuch-der-kinematik-textbook-of-kinematics-volumes-i-and-ii-2-volume-set-all-published>
3. Reuleaux, F.: Der Konstrukteur (The Designer). 3rd edition Brunswick: Vieweg 1869, p. 260–267 <https://epdf.tips/universal-joints-and-driveshafts-analysis-design-applications.html>
4. Gruebler, M. F.: Getriebelehre (Theory of Kinematics). Berlin: Springer 1917, p. 6–39 2.4 <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-02746-2>
5. Steeds, W.: Universal Joints. Automob. Eng. 27 (1937) No. 354, p. 10–12 [https://books.google.ro/books?id=feckBgAAQBAJ&pg=PA77&lpg=PA77&dq=Steeds,+W.:+Universal+Joints.+Automob.+Eng.+27+\(1937\)+No.+354,+p.+10%E2%80%9312&source=bl&ots=7OocrDby\\_w&sig=ACfU3U2ap6uupTiNMum3slOhe0p\\_QfhBsQ&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwiRxJmTv9qAAxUg1AIHHVJEClwQ6AF6BAgiEAM#v=onepage&q=Steeds%2C%20W.%3A%20Universal%20Joints.%20Automob.%20Eng.%2027%20\(1937\)%20No.%20354%2C%20p.%2010%E2%80%9312&f=false](https://books.google.ro/books?id=feckBgAAQBAJ&pg=PA77&lpg=PA77&dq=Steeds,+W.:+Universal+Joints.+Automob.+Eng.+27+(1937)+No.+354,+p.+10%E2%80%9312&source=bl&ots=7OocrDby_w&sig=ACfU3U2ap6uupTiNMum3slOhe0p_QfhBsQ&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwiRxJmTv9qAAxUg1AIHHVJEClwQ6AF6BAgiEAM#v=onepage&q=Steeds%2C%20W.%3A%20Universal%20Joints.%20Automob.%20Eng.%2027%20(1937)%20No.%20354%2C%20p.%2010%E2%80%9312&f=false)
6. Balken, J.: Systematische Entwicklung von Gleichlaufgelenken (Systematic development of constant velocity joints). Diss. TU Munich 1981 [https://books.google.ro/books?id=GPdmft\\_cpKQC&pg=PA78&lpg=PA78&dq=6.%09Balken,+J.:+Systematische+Entwicklung+von+Gleichlaufgelenken+\(Systematic+development+of+constant+velocity+joints\).+Diss.+TU+Munich+1981&source=bl&ots=zsVpWS5BIO&sig=ACfU3U2FHQUzDPOvxyBRPchmYwgNmsvpeg&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwjhu\\_Sgv9qAAxV70gIHHVvyqAiYQ6AF6BAgiEAM#v=onepage&q=6.%09Balken%2C%20J.%3A%20Systematische%20Entwicklung%20von%20Gleichlaufgelenken%20\(Sytematic%20development%20of%20constant%20velocity%20joints\).%20Diss.%20TU%20Munich%201981&f=false](https://books.google.ro/books?id=GPdmft_cpKQC&pg=PA78&lpg=PA78&dq=6.%09Balken,+J.:+Systematische+Entwicklung+von+Gleichlaufgelenken+(Systematic+development+of+constant+velocity+joints).+Diss.+TU+Munich+1981&source=bl&ots=zsVpWS5BIO&sig=ACfU3U2FHQUzDPOvxyBRPchmYwgNmsvpeg&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwjhu_Sgv9qAAxV70gIHHVvyqAiYQ6AF6BAgiEAM#v=onepage&q=6.%09Balken%2C%20J.%3A%20Systematische%20Entwicklung%20von%20Gleichlaufgelenken%20(Sytematic%20development%20of%20constant%20velocity%20joints).%20Diss.%20TU%20Munich%201981&f=false)

7. Grashof, F.: Theoretische Maschinenlehre (Theoretical Engineering). Vol. 2: Theorie der Getriebe etc. (Theory of power transmission etc.) Leipzig: Voss 1883  
[https://books.google.ro/books?id=iLyCAAAQBAJ&pg=PA56&lpg=PA56&dq=Grashof,+F.:+Theoretische+Maschinenlehre+\(Theoretical+Engineering\).+Vol.+2:+Theorie+der+Getriebe+etc.+\(Theory+of+power+transmission+etc.\)+Leipzig:+Voss+1883&source=bl&ots=qVfguNvh0i&sig=ACfU3U2bNocOWAqbJixJk9cKP8FIjXuI9Q&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwi\\_0ZHQv9qAAxWUHP0HHR8YD8AQ6AF6BAgIEAM#v=onepage&q=Grashof%2C%20F.%3A%20Theoretische%20Maschinenlehre%20\(Theoretical%20Engineering\).%20Vol.%202%3A%20Theorie%20der%20Getriebe%20etc.%20\(Theory%20of%20power%20transmission%20etc.\)%20Leipzig%3A%20Voss%201883&f=false](https://books.google.ro/books?id=iLyCAAAQBAJ&pg=PA56&lpg=PA56&dq=Grashof,+F.:+Theoretische+Maschinenlehre+(Theoretical+Engineering).+Vol.+2:+Theorie+der+Getriebe+etc.+(Theory+of+power+transmission+etc.)+Leipzig:+Voss+1883&source=bl&ots=qVfguNvh0i&sig=ACfU3U2bNocOWAqbJixJk9cKP8FIjXuI9Q&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwi_0ZHQv9qAAxWUHP0HHR8YD8AQ6AF6BAgIEAM#v=onepage&q=Grashof%2C%20F.%3A%20Theoretische%20Maschinenlehre%20(Theoretical%20Engineering).%20Vol.%202%3A%20Theorie%20der%20Getriebe%20etc.%20(Theory%20of%20power%20transmission%20etc.)%20Leipzig%3A%20Voss%201883&f=false)
8. Molly, H.: Bengisu, O.O Das Gleichgang-Gelenk im Symmetriespiegel (The constant velocity joint in the mirror of symmetry). Automob. Ind. 14 (1969) No. 2, p. 45–54  
[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-02746-2\\_2](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-02746-2_2)
9. Beyer, R.: Technische Kinematik (Engineering Kinematics). Leipzig: Barth 1931, p. 88, Fig. 176 [https://books.google.ro/books?id=iLyCAAAQBAJ&pg=PA56&lpg=PA56&dq=Beyer,+R.:+Technische+Kinematik+\(Engineering+Kinematics\).+Leipzig:+Barth+1931,+p.+88,+Fig.+176&source=bl&ots=qVfguNvh7i&sig=ACfU3U01lgujj5L4CK11KbaDytlC86E1pg&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwj5m9Hxv9qAAxWD\\_7sIHQsWCUUQ6AF6BAgeEAM#v=onepage&q=Beyer%2C%20R.%3A%20Technische%20Kinematik%20\(Engineering%20Kinematics\).%20Leipzig%3A%20Barth%201931%2C%20p.%2088%2C%20Fig.%20176&f=false](https://books.google.ro/books?id=iLyCAAAQBAJ&pg=PA56&lpg=PA56&dq=Beyer,+R.:+Technische+Kinematik+(Engineering+Kinematics).+Leipzig:+Barth+1931,+p.+88,+Fig.+176&source=bl&ots=qVfguNvh7i&sig=ACfU3U01lgujj5L4CK11KbaDytlC86E1pg&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwj5m9Hxv9qAAxWD_7sIHQsWCUUQ6AF6BAgeEAM#v=onepage&q=Beyer%2C%20R.%3A%20Technische%20Kinematik%20(Engineering%20Kinematics).%20Leipzig%3A%20Barth%201931%2C%20p.%2088%2C%20Fig.%20176&f=false)
10. Richtlinien VDI 2722 (VDI Directives): Homokinetische Kreuzgelenk-Getriebe einschließlich Gelenkwellen (Homokinetic universal jointed transmissions including driveshafts). Düsseldorf: VDI-Verlag 1978  
<https://www.yumpu.com/en/document/view/7180412/universal-joints-and-driveshafts-hchrseherr-thoss-f-index-of>
11. d’Ocagne, M.: Cours de géométrie pure et appliquée de l’Ecole Polytechnique (Course of pure and applied geometry of the Ecole Polytechnique), vol. 2, Ch. VI Cinématique Appliquée (Applied Kinematics), No. 170–172 Joint universel de Cardan (Universal Cardan Joint), p. 52–57. Paris: Gauthier-Villars 1918  
[https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-30170-4\\_1](https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-30170-4_1)
12. Pahl, G., & Kuettner, K. H. (1990). Fundamentals (of design), in: Dubbel, Handbook of Mechanical Engineering, vol. 1. Berlin: Springer.  
[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-02746-2\\_5](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-02746-2_5)
13. F.Smeltz. (2006). Universal Joints and Driveshafts. Berlin: Springer,. <https://download.e-bookshelf.de/download/0000/0101/78/L-G-0000010178-0002343465.pdf>
14. A. Jante, Kraftfahrt-Mechanik, 3 Der Kraftschluß m. d. Fahrbahn (Motor vehicle mechanics, 3. Friction at the road surface). In: Bussien, R. (Publisher): Automobiltechnisches, 14, 1941.  
[https://books.google.ro/books?id=GPdmft\\_cpKQC&pg=PA246&lpg=PA246&dq=14.%0](https://books.google.ro/books?id=GPdmft_cpKQC&pg=PA246&lpg=PA246&dq=14.%0)

[9A.+Jante,+Kraftfahrt-Mechanik,+3+Der+Kraftschlu%C3%9F+m.+d.+Fahrbahn+\(Motor+vehicle+mechanics,+3.+Friction+at+the+road+surface\).+In:+Bussien,+R.+\(Publisher\):+Automobiltechnisches,+14,+1941.&source=bl&ots=zsVpWS5FmJ&sig=ACfU3U0CSnxZx6VS0nM28PhYc\\_pENIBBxg&hl=fr&sa=X&ved=2ahUKEwjwJniwNqAAxVu1wIHHdIDCusQ6AF6BAgIEAM#v=onepage&q=14.%09A.%20Jante%2C%20Kraftfahrt-Mechanik%2C%203%20Der%20Kraftschlu%C3%9F%20m.%20d.%20Fahrbahn%20\(Motor%20vehicle%20mechanics%2C%203.%20Friction%20at%20the%20road%20surface\).%20In%203A%20Bussien%2C%20R.%20\(Publisher\)%203A%20Automobiltechnisches%2C%2014%2C%201941.&f=false](https://www.mdpi.com/2079-3197/9/12/145)

## Bibliografie Capitolul 2

1. **Vasile, A.,** Bugaru, M., Nonuniformity of isometric properties of automotive driveshafts, *9 th International Conference on “Experiments/Process/System Modeling/Simulation/Optimization”*, **9 th IC-EpsMso**, Athens, Greece, 7-10 July **2021**, pp. 247-255, ISSN: 2241-9209, ISBN: 978-618-84028-2-9 <https://www.mdpi.com/2079-3197/9/12/145>
2. Patent Rzeppa. Available online: <https://worldwide.espacenet.com/patent/search/family/008989560/publication/FR628309A?q=pn%3DFR628309A>
3. Glaenzer-Spicer. Tripod Joint GI. European Patent No. 1.272.530, 4 July 1960.
4. Patent. Drive Shaft Tube and End Fitting Assembly and Method of Manufacturing Same. EP0685659A1, 1995. Available online: <https://patents.google.com/patent/EP0685659A1>
5. Patent. Vehicle Driveshaft. U.S. Patent 006279221 B1, 2001. Available online: [https://www.google.com/search?q=USOO6279221B1&client=firefox-b-d&sxsrf=AoAemvJib3LZ507AICWIPBANx4VUsa9-Iw%3A1639040235249&ei=68SxYZH-De-C9u8Pq5mA4&ved=0ahUKEwjRn\\_nXrNb0AhVvgf0HHauPCe8Q4dUDCA0&uact=5&oq=USOO6279221B1&gs\\_lcp=Cgnd3Mtd2l6EAM6BwgAEEcQsANKBAhBGABKB AhGGABQ5wlY5wlgRhdoAXACeACAAXaIAXaSAQMwLjGYAQCgAQKgAQHIAQjAAQE&scient=gws-wiz](https://www.google.com/search?q=USOO6279221B1&client=firefox-b-d&sxsrf=AoAemvJib3LZ507AICWIPBANx4VUsa9-Iw%3A1639040235249&ei=68SxYZH-De-C9u8Pq5mA4&ved=0ahUKEwjRn_nXrNb0AhVvgf0HHauPCe8Q4dUDCA0&uact=5&oq=USOO6279221B1&gs_lcp=Cgnd3Mtd2l6EAM6BwgAEEcQsANKBAhBGABKB AhGGABQ5wlY5wlgRhdoAXACeACAAXaIAXaSAQMwLjGYAQCgAQKgAQHIAQjAAQE&scient=gws-wiz)
6. Patent. Hybrid Driveshaft Based on Unidirectional and Fabric Composite Materials. U.S. Patent 20080045348 A1, 2008. Available online: <https://patents.google.com/patent/US20080045348>
7. Patent. Method of Manufacturing an Axially Collapsible Driveshaft Assembly. U.S. Patent 7080437 B2, 2006. Available online: <https://patents.google.com/patent/US7080437>

## Bibliografie Capitolul 3

1. Grünwald, B. Theory, Computation and Design of Internal Combustion Engines for Automotive; Didactic & Pedagogical Publishing House: Bucharest, Romania, 1980. <https://www.google.com/search?q=Gr%C3%BCnwald%2C+B.+Theory%2C+Computati>

[on+and+Design+of+Internal+Combustion+Engines+for+Automotive%3B+Didactic+Vs+Pedagogical+Publishing+House%3A+Bucharest%2C+Romania%2C+1980&sca\\_esv=556587111&rlz=1C1GCEB\\_enRO1066RO1067&biw=1536&bih=747&ei=FELZZKyyB\\_aG9u8P\\_yciA0&ved=0ahUKEwisjJ7EwdqAAxV2g\\_0HHX8-B9EQ4dUDCA8&uact=5&oq=Gr%C3%BCnwald%2C+B.+Theory%2C+Computation+and+Design+of+Internal+Combustion+Engines+for+Automotive%3B+Didactic+Vs+Pedagogical+Publishing+House%3A+Bucharest%2C+Romania%2C+1980&gs\\_lp=Egxnd3Mtd2l6LXNlcnAingFHcsO8bndhbGQsIEIuIFRoZW9yeSwgQ29tcHV0YXRpb24gYW5kIERlc2lnbiBvZiBJbnRlcm5hbCBDdb21idXN0aW9uIEVuZ2luZXMgZm9yIEF1dG9tb3RpdmU7IERpZGFjdGljIFZzIFBIZGFnb2dpY2FsIFB1Ymxcpc2hpbmcgSG91c2U6IEJ1Y2hhcmVzdCwgUm9tYW5pYSwgMTk4MEgAUABYAHAAeACQAQCYAQCgAQCqAQC4AQPIAQD4AQHiAwQYACBB&sclient=gws-wiz-serp](https://www.scribd.com/document/235930186/Bolotin-VV-The-Dynamic-Stability-of-Elastic-Systems)

2. Bolotin, V.V. Dynamic Stability of Elastic Systems, 2nd ed.; US Military Report; Aerospace Corporation: El Segundo, CA, USA, 1962.  
<https://fr.scribd.com/document/235930186/Bolotin-VV-The-Dynamic-Stability-of-Elastic-Systems>
3. Detroux, T.; Renson, L.; Masset, L.; Kerschen, G. The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2015, 296, 18–38.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045782515002297>
4. Bugaru, M. Dynamic Behavior of Geared System Transmission. Ph.D. Thesis, PhD-Granting by Auburn University & University Politehnica of Bucharest (Joint Ph.D. Program Romania-University POLITEHNICA of Bucharest/USA-Auburn University/Germany Technische Universitat Munich Based on Deuche Forschung Gemeinschaft-VDI), Auburn, AL, USA, Bucharest, Romania, 13 October 2004. Available online: <https://crescdi.pub.ro/#/profile/804>
5. Bugaru, M., Vasile, A., Model for torsional forced vibrations of automotive driveshafts, *9 th International Conference on “Experiments/Process/System Modeling/Simulation/Optimization”*, 9 th IC-EPSMSO, Athens, Greece, 7-10 July 2021, pp. 239-246, ISSN: 2241-9209, ISBN: 978-618-84028-2-9  
<https://www.proquest.com/openview/2bad7bea3c810ac026b787e400e5c1a5/1.pdf?pq-origsite=gscholar&cbl=2032414>

#### **Bibliografie Capitolul 4**

1. Mitropolskii, Y.A. (1964), Problems of the Asymptotic Theory of Nonstationary Vibrations, Izdatel'stovo Nauka, Moscow, Russia. <https://www.abebooks.com/Problems-Asymptotic-Theory-Nonstationary-Vibrations-Mitropolskii/14804754982/bd>
2. Webber, H., Kaczmarczyk, S., Iwankiewicz, R.(2021) “Non-linear Response of Cable-mass-Spring System in High-Rise Buildings under Stochastic Seismic Excitation”, MDPI-Materials, <https://doi.org/10.3390/ma14226858>
3. Chan, K. T., Lai, K. F., Stephen, N. G., Young, K.(2011), “A new method to determine the shear coefficient of Timoshenko beam theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.

330, pp. 3488-3497.

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022460X11001131>

4. Bugaru, M., Vasile, A., Model for bending forced vibrations of automotive driveshafts, *9 TH International Conference on "Experiments/Process/System/Modeling / Simulation/Optimization"*, **9 TH IC-EPSMSO**, Athens, Greece, 7-10 July **2021**, pp. 231-238, ISSN: 2241-9209, ISBN: 978-618-84028-2-9 [https://docs.upb.ro/wp-content/uploads/2022/10/Rezumat-Teza-Abilitare\\_Mihai\\_BUGARU.pdf](https://docs.upb.ro/wp-content/uploads/2022/10/Rezumat-Teza-Abilitare_Mihai_BUGARU.pdf)

### **Bibliografie Capitolul 5**

1. S. Li, Y. Wu, X. Zhang, "Analysis and Synchronization of a New Hyperchaotic System with Exponential Term", in *Mathematics-MDPI*, vol. 9, no. 3281, Dec. 2021, pp. 1-16 <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/24/3281>
2. M. Bugaru, "Chaotic Behavior of Helical Gear-Pair Systems Non-linear Parametrically Excited", in *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, vol. 1, no.1, Dec. 2004, pp. 7-13. [https://www.researchgate.net/publication/359985306\\_CHAOTIC\\_BEHAVIOR\\_OF\\_HELICAL\\_GEAR-PAIR\\_SYSTEMS\\_NON-LINEAR\\_PARAMETRICALLY\\_EXCITED](https://www.researchgate.net/publication/359985306_CHAOTIC_BEHAVIOR_OF_HELICAL_GEAR-PAIR_SYSTEMS_NON-LINEAR_PARAMETRICALLY_EXCITED)
3. M. Bugaru, A. Vasile, Investigation of automotive driveshaft chaotic FBV 10th International Conference on "Experiments/Process/System Modeling/Simulation/Optimization" 10th IC-EPSMSO Loutraki, 5-8 July, 2023 ©LFME <https://10times.com/e15r-kgz5-ph35>