



UNIVERSITATEA NAȚIONALĂ DE  
ȘTIINȚĂ ȘI TEHNOLOGIE  
POLITEHNICA BUCUREȘTI



Școala Doctorală de Electronică, Telecomunicații și  
Tehnologia Informației

Decision No. 92 from 05.10.2023

REZUMAT TEZĂ DE  
DOCTORAT

Ileana Mădălina CIUCĂ

---

METODE PENTRU  
ANALIZA DATELOR POLSAR MONOSTATICE ȘI BISTATICE  
METHODS FOR MONOSTATIC AND BISTATIC POLARIMETRIC  
SAR IMAGE ANALYSIS

---

COMISIA DE DOCTORAT

<b>Prof. Dr. Ing. Ion MARGHESCU</b> Univ. Națională de Știință și Tehnologie Politehnica București	Președinte
<b>Prof. Dr. Ing. Silviu CIOCHINĂ</b> Univ. Națională de Știință și Tehnologie Politehnica București	Conducător de doctorat
<b>Prof. Dr. Ing. Ioan NICOLAESCU</b> Academia Tehnică Militară „Ferdinand I” București	Referent
<b>Prof. Dr. Ing. Ion BOGDAN</b> Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași	Referent
<b>Prof. Dr. Ing. Andrei ANGHEL</b> Univ. Națională de Știință și Tehnologie Politehnica București	Referent

BUCUREȘTI 2023

---



# Abstract

Un sistem radar imagistic, de exemplu, radarul cu apertură sintetică (eng., Synthetic Aperture Radar) având diversitate polarimetrică (eng., Polarimetric SAR - PolSAR) măsoară răspunsul de retrodifuzie al semnalului electromagnetic radar în două direcții ortogonale din planul transversal propagării. Interacțiunea semnalului de microunde cu elemente antropogene și din mediul natural, de obicei, va modifica starea polarimetrică incidentă. În aplicațiile cu date PolSAR, este exploatată relația dintre starea polarimetrică de incidență și retrodifuzie. Aportul diversității polarimetrice s-a dovedit important, spre exemplu, pentru detecție și clasificare.

Scopul acestei teze este de a aduce contribuții în analiza datelor PolSAR full-polarimetrice (deci, în diversitate polarimetrică completă). Pe parcursul lucrării, formalismul matriceal este preferat pentru reprezentarea și prelucrarea datelor. În conformitate cu evoluțiile tehnologice așteptate în domeniul instrumentelor radar, nu este tratat doar cazul monostatic, ci și cel bistatic (al geometriei de achiziție). Deoarece proprietățile matricelor PolSAR de împrăștiere (eng., scattering matrices) depind de tipul geometriei, metodele propuse în teză sunt aplicabile în cazul cel mai general, pentru date non-reciproce (monostatice sau bistatice).

Teza propune două cadre pentru matricea de împrăștiere bazate pe reprezentarea reală și pe descompunerea polară. Cele două părți sunt complementare, cu modele bazate pe o prelucrare algebrică vs. geometrică, pe utilizarea unor operații de echivalență tip similaritate conjugată vs. similaritate, precum și axarea pe un context aplicativ coerent vs. incoerent. Prima contribuție este orientată spre studiul similarității conjugate în PolSAR prin utilizarea reprezentării reale. A doua contribuție se bazează pe proprietățile descompunerii polare și pe proprietățile geometrice (geometrie Riemanniană) a matricelor semidefinite pozitive.

Pentru testarea metodelor propuse sunt utilizate seturi de date PolSAR reale (geometrie de achiziție monostatică), împreună cu datele polarimetrice simulate (geometrie de achiziție monostatică și bistatică).



# Cuprins

<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Listă de acronime</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introducere</b>	<b>1</b>
1.1 Prezentarea domeniului tezei de doctorat . . . . .	1
1.2 Conținutul tezei . . . . .	3
<b>2 Diversitatea radar polarimetrică</b>	<b>5</b>
2.1 Convenția radar vs. convenția optică . . . . .	6
2.2 Similaritate și consimilaritate . . . . .	6
2.3 Descompuneri polarimetrice de tip coerent și incoerent . . . . .	8
2.4 Aplicație: Clasificare H-alpha pentru date dual-pol VV-HV monos- tative și bistatice . . . . .	10
<b>3 Reprezentarea reală a matricii de scattering</b>	<b>13</b>
3.1 Reprezentarea reală ca instrument algebric pentru consimilaritate	14
3.2 Forma canonică și proprietăți ale reprezentării reale . . . . .	14
<b>4 Clustering geometric pornind de la descompunerea polară a datelor     PolSAR</b>	<b>19</b>
4.1 Descompunerea polară . . . . .	19
4.2 Varietăți Riemmaniene . . . . .	21
4.3 Clustering geometric cu factori hermitieni . . . . .	22
<b>5 Concluzii</b>	<b>25</b>
5.1 Sinteză și contribuții . . . . .	25
5.2 Perspective pentru dezvoltări ulterioare . . . . .	27
5.3 Listă de publicații . . . . .	28
<b>Bibliografie</b>	<b>31</b>



# Listă de acronime

<b>AIRM</b>	Affine Invariant Riemannian Metric (Metrică Riemanniană Afin Invariantă)
<b>BSA</b>	Backscatter Alignment (Alinierea (radar) de retrodifuzie)
<b>CEM</b>	Computational Electromagnetic (Software Computațional Electromagnetic)
<b>dual-pol</b>	Dual Polarimetric (Polarimetrie parțială/duală)
<b>EM</b>	Electromagnetic (Electromagnetic)
<b>full-pol</b>	Full Polarimetric / Quad Polarimetric (Polarimetrie completă)
<b>FSA</b>	Forward Scattering Alignment (Aliniere (optică) de împrăștiere înainte)
<b>HPD</b>	Hermitian Positive Definite (Hermitiană Pozitiv Definită)
<b>ICA</b>	Independent Component Analysis (Analiza Componentelor Independente)
<b>ICTD</b>	Incoherent Target Decomposition (Descompunere a țintei necoerente)
<b>MLE</b>	Maximum Likelihood Estimation (Estimare de Plauzibilitate Maximă)
<b>PolSAR</b>	Polarimetric Synthetic Aperture Radar (Radar cu Apertură Sintetică tip Polarimetric)
<b>PolInSAR</b>	Polarimetric Interferometric Synthetic Aperture Radar (Interferometrie Radar cu Apertură Sintetică tip Polarimetric)
<b>RCS</b>	Radar Cross-Section (Secțiunea Transversală Radar)
<b>RR</b>	Real Representation (Metoda Reprezentării Reale)
<b>RRSM</b>	Real Representation Scattering Matrix (Reprezentarea Reală a Matricii de Scattering)

## Capitolul 0 – Listă de acronime

<b>Rx</b>	Receiver (Receptor)
<b>SAR</b>	Synthetic Aperture Radar (Radar cu Apertură Sintetică)
<b>SM</b>	Scattering Matrix (Matricea de scattering)
<b>SSVD</b>	Symmetric Singular Value Decomposition (Descompunere în Valori Singulare a Matricelor Simetrice)
<b>SVD</b>	Singular Value Decomposition (Descompunere în Valori Singulare)
<b>Tg</b>	Target (Țintă)
<b>Tx</b>	Transmitter (Emitător)



# Capitolul 1

## Introducere

### 1.1 Prezentarea domeniului tezei de doctorat

Teledetecția permite detectate și monitorizate de la distanță a caracteristicilor fizice ale unui obiect. Teledetecția cu microunde este ramura care utilizează pentru acest studiu semnale electromagnetice aparținând domeniului frecvențelor radar ( $\approx 300$  MHz - 300 GHz). Sub-categoriile sale sunt detecția activă și pasivă cu semnale de microunde.

Teledetecția activă cu instrumente radar este astăzi una dintre tehnologiile convenționale pentru observarea Terrei. Ea completează achizițiile optice datorită capacităților neîntrerupte de imagistică: teledetecția activă permite utilizarea atât ziua cât și noaptea și este mai puțin influențată de condițiile meteo. Instrumentele de tip radar cu apertură sintetică (en., Synthetic Aperture Radar - SAR<sup>1</sup>) sunt printre cele mai utilizate în teledetecția activă de microunde. Acești senzori colectează răspunsul de retrodifuzie (ori de scattering) al zonei observate și permit focalizarea unor imagini cu o înaltă rezoluție spațială (în prezent, chiar de ordinul centimetrilor).

Se poate remarca un interes crescut în ultimul deceniu pentru îmbunătățirea sistemelor radar (cu apertură sintetică) multi-platformă. Lansarea în 2010 a satelitului geamăn al TerraSAR-X, numit TanDEM-X, a dus la crearea primului instrument spațial de tip SAR interferometric single-pass. Aceste eforturi au evidențiat maturitatea tehnologică și posibilele avantaje ale diversității multiplatformă, cum ar fi capacitatea de a efectua simultan achiziții din poziții spațiale distincte la o singură trecere a instrumentelor. În plus, numeroasele studii științifice pregătitoare și de explorare a datelor oferite de cuplul TerraSAR-X/TanDEM-X au dat un nou avânt dezvoltării interesului în sistemele bistatice ori multistatice.

Achizițiile repetate multi-pass permit obținerea unui set de observații, ale unei zone de interes, într-o perioadă de timp (diversitate tip multitemporal). Alte forme

---

<sup>1</sup>acronimul în engleză va fi cel preferat și pentru rezumatul în română al lucrării

de diversitate pentru sistemele SAR sunt: în frecvență, în polarizație, ori diversitatea multiplatformă. Toate acestea necesită existența unor instrumente specializate.

Polarizația este proprietatea undelor care descrie orientarea geometrică a oscilațiilor în planul transversal propagării, precum și modul în care aceasta variază în timp. În cazul sistemelor de microunde, orientarea este cea a vectorului intensitate câmp electric. Polarimetria radar SAR (en., Polarimetric SAR - PolSAR) cuantifică schimbările de polarizație a undelor electromagnetice în urma interacțiunii cu obiectele geofizice din teren. Sensorul radar fiind unul de tip activ, este cel ce fixează polarizația undelor emise (e.g., polarizație lineară). Sistemul de recepție (reprezentat de același sensor sau de unul altul distinct) va recepționa doar acele proiecții ale semnalelor electromagnetice incidente aliniat cu propria polarizație. Măsurătorile de acest tip pot fi realizate la una sau mai multe frecvențe. Polarimetria radar oferă avantaje în aplicații din domenii, precum: monitorizarea culturilor, clasificarea acoperirii terenului, detecția țintelor persistente din mediul urban, studiul ecosistemelor sensibile (e.g., arctic, forestier, biomasă), etc.

Lucrarea de față se concentrează pe studiul diversității de tip polarimetric în seturi de date radar obținute prin achiziții PolSAR în geometrie monostatică ori bistatică și propune noi metode și algoritmi de prelucrare a acestora. Metodele propuse au la bază două ipoteze de lucru, identificate în raport cu provocări actuale în domeniu.

- **Context:** Între finalul sec. XX - începutul sec. XXI, diversitate polarimetrică era, cel mai adesea, alăturată celei de tip multitemporal sau multifrecvență pentru a obține seturi compuse de date. Cea mai mare parte a metodelor PolSAR au la bază modelul algebric al datelor reciproce, fiind dezvoltate și testate pornind exclusiv de la achiziții în geometrie monostatică.

**Provocare:** Datorită interesului tot mai crescut pentru platformele în geometrie bistatică și multistatică, este de așteptat ca astfel de seturi PolSAR vor deveni accesibile în viitor (atât ca achiziții singulare cât și în seturi compuse ce vor exploata diversitatea spațială oferită de instrumente multi-platformă).

**Ipoteză de lucru în cadrul tezei:** Metodele propuse vor fi aplicabile și cazului bistatic. Acest lucru înseamnă că datele polarimetrice nu vor mai fi constrânse să respecte modelul reciproc.

- **Context:** Diminuarea treptată a dimensiunilor celulei de rezoluție radar în imaginile SAR s-a realizat prin evoluții tehnologice și în materie de prelucrare a datelor. Îmbunătățirea constantă a rezoluției spațiale a făcut imaginile SAR atractive în aplicații practice diverse și competitive în raport cu cele optice.

**Provocare:** În schimb, s-a observat că metodele bazate pe modele statistice și utilizate în procesarea de date SAR/PolSAR trebuie actualizate cu noi modele

statistice în condiții de înaltă rezoluție spațială. O gamă largă de modele au fost propuse în acest scop [13].

**Ipoteză de lucru în cadrul tezei:** Dificultatea alegerii unui model optim ar putea fi rezolvată prin propunerea de tehnici care nu se bazează exclusiv pe distribuția statistică a datelor.

## 1.2 Conținutul tezei

Această teză este organizată după cum urmează:

**Capitolul 2** stabilește cadrul teoretic. Sunt prezentate noțiuni elementare despre polarizația undelor electromagnetice și sunt comparate convențiile radar și optică (orientare în funcție de antenă - "antenna oriented" vs. orientare în funcție de undă - "wave oriented") pentru definirea polarizației în planul de recepție. Mai apoi, sunt introduse formalismele matriceal și vectorial pe baza cărora se întemeiază majoritatea descompunerilor PolSAR coerente și incoerente.

**Capitolul 3** urmărește să propună o nouă metodă PolSAR (coerentă) de analiză a datelor, bazată pe operații matriceale. Datele folosite, deși se consideră că respectă convenția radar - "antenna oriented" pot avea matrici de retrodifuzie non-reciproce. Acest capitol are la bază utilizarea operației de similaritate conjugată (consimilaritate) ca operație matriceală, pentru care se va propune o soluție bazată pe Reprezentarea Reală. Se va insista asupra cazului unora dintre matricile non-reciproce, pentru care se remarcă posibilitatea obținerii de valori proprii complexe.

**Capitolul 4** continuă să exploreze formalismul matriceal, de data aceasta prin descompunerea polară, o operație bazată pe echivalența de similaritate. Metoda propusă utilizează factorul pozitiv hermitian  $\mathbf{H}$  al descompunerii polare împreună cu operații geometrice pe varietăți riemanniene. Este implementată media geometrică a matricelor hermitiene, urmată de un algoritm de clustering k-means cu o metrică geodesică. Metoda este evaluată prin teste (calitative și cantitative) folosind date monostatice reale și simulate. În ciuda acestui fapt, tehnica poate fi aplicată și datelor bistatice.

**Capitolul 5** prezintă o imagine de ansamblu a contribuțiilor tezei și înglobează sugestia de dezvoltare ulterioară. Tot aici sunt indexate publicațiile în jurnal sau conferențe din perioada tezei.

Informații suplimentare furnizate în **Anexele A - H** completează elementele prezentate de capitolele principale.



## Capitolul 2

# Diversitatea radar polarimetrică

Polarizația unei unde este definită de direcția de oscilație a componentelor câmpului electric în planul transversal propagării. Această proprietate este adesea înțeleasă ca fiind figura "pe care o desenează extremitatea unui câmp vectorial (electric, magnetic) în funcție de timp". Altfel, polarizația unei antene este "cea a unei plane pe care o radiază într-o direcție dată din câmpul îndepărtat" [1, 2].

Geometria convențională de achiziție în radar este cea *monostatică*, în care echipamentele de emisie și recepție sunt amplasate în aceeași locație. Într-un sistem *bistatic*, emițătorul și receptorul sunt situate distinct, cu o separație considerabilă între ele (câteva ordine de mărime mai mare decât lungimea de undă). În cazul în care emițătorul și receptorul sunt doar echipamente separate, dar amplasate foarte aproape unul de celălalt, geometria se numește *cuasi-monostatică*.

O țintă dintr-o scenă oarecare, iluminată de instrumentul radar, se poate comporta ca un modificador al stării de polarizare [16]. Pentru un set generic de baze de polarizare (X-Y), folosite la emisie și recepție, legătura dintre componentele câmpului incident și cele ale câmpului retrodifuzat este descrisă prin matricea de împrăștiere (matricea de scattering, 2.1),  $S \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ :

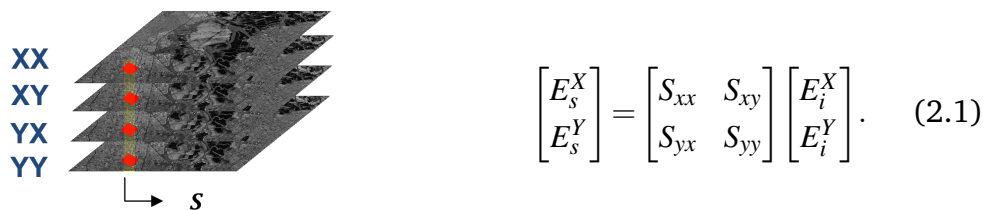

$$\begin{bmatrix} E_s^X \\ E_s^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^X \\ E_i^Y \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Figura 2.1 Achiziție radar full-polarimetrică.

Modelele actuale de împrăștiere diferențiază între ținte cu răspuns determinist (coerent) și ținte cu răspuns aleator (necoerent). O țintă coerentă are un răspuns stabil în timp, complet caracterizat prin matricea de scattering. În schimb, răspunsul de împrăștiere al unei ținte necoerente este aleator, astfel încât, se folosesc modele stocastice pentru modelarea sa. Ținta este numită și parțială sau distribuită,

întrucât este de așteptat să prezinte dimensiuni care acoperă mai multe celule de rezoluție [34, 41].

## 2.1 Convenția radar vs. convenția optică

Deși polarizația este o proprietate a semnalului electromagnetic recepționat, în radar, dispozitivul folosit pentru recepție poate fi unul și același cu dispozitivul activ de emisie. În conformitate cu standardele IEEE Antenna Standards, polarizația unei antene este cea a undeii pe care o radiază, fapt ce implică ca, în cazul recepției, "sistemele de coordonate utilizate pentru a descrie polarizarea antenei și a undeii primite sunt orientate în direcții opuse" [2]. Prin urmare, s-a impus definirea unei convenții specifice radar - orientată spre antenă (en, antenna-oriented), cunoscută drept Alinierea de retrodifuziune (en, Backscatter Alignment, BSA) [28].

În schimb, în optică și în alte domenii ce utilizează principii de polarimetrie, sistemul de coordonate folosit în recepție este cel standard (en, wave-oriented), de împrăștiere înainte (en., Forward Scattering Alignment, FSA). Astfel, sistemul vectorial de-a lungul traiectoriei de recepție prezintă în BSA, o inversiune cu  $180^\circ$ , față de cel din FSA [28]. Distincția dintre cele două convenții este marcată în termeni matematici prin introducerea unei operații de conjugare complexă, într-o parte a ecuației ce descrie transformare de echivalență în BSA. Astfel, operațiile de schimbare de bază ale celor două convenții sunt diferite: în timp ce FSA exploatează transformările de similaritate ale matricei Jones, BSA exploatează transformările de similaritate conjugată efectuate asupra matricei Sinclair (matricea de împrăștiere radar) [21, 32, 41].

## 2.2 Similaritate și consimilaritate

Similaritatea și similaritatea conjugată sunt două relații de echivalență distincte pentru matrici complexe. Fie trei matrici  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , atunci putem scrie:

Tabel 2.1 Ecuațiile pentru similaritate și consimilaritate.

similaritate	consimilaritate
$\mathbf{AV} = \mathbf{VB}$	$\mathbf{AX} = \mathbf{X}^* \mathbf{C}$

Tabel 2.2 Valori/vectori proprii și omologii consimilari.

valoare/vector proprii	convaloare/convector proprii
$\mathbf{Av}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n$	$\mathbf{Ax}_n = \xi_n \mathbf{x}_n^*$

Matricile  $\mathbf{V}$  și  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sunt denumite și matrici de schimbare de bază ale operațiilor de similaritate și consimilaritate. Dacă  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ea este atunci o matrice ortogonală de rotație, iar operația de consimilaritate se reduce la una de similaritate.

Dacă matricile  $\mathbf{V}$  și  $\mathbf{X}$  sunt unitare ( $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{I}$  și  $\mathbf{X}^H \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{X}^H = \mathbf{I}$ ) transformările de similaritate și consimilaritate sunt asimilate unei descompunerii în valori/vectori proprii și respectiv, unei descompunerii în convalori/convectori proprii (Tabelul 2.2).

Fie o matrice complexă simetrică  $\mathbf{A}$ , atunci  $\mathbf{X}$  va fi întotdeauna o matrice unitară iar operația de consimilaritate se va reduce la o operație de congruență unitară [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= (\mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = (\mathbf{X}^{-1})^* \mathbf{A} \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{X}^H)^* \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pe scurt, în urma introducerii convenției BSA în radar, se trece la necesitatea utilizării operației de consimilaritate pentru transformări de echivalență ale matricii de scattering. Cu toate acestea, în cazul geometriei de tip monostatic, prin introducerea convenției BSA se presupun identice traseele de emisie și recepție, ceea ce duce la coeficienți cross-canal identici și deci, la o matrice  $\mathbf{S}$  de împrăștiere simetrică. Astfel, pentru cazul monostatic, operația de consimilaritate se reduce la un caz particular: matricile de împrăștiere care verifică reciprocitatea sunt diagonalizate prin congruență unitară [19, 33, 23].

Formalismul matematic pentru congruența unitară este binecunoscut în PolSAR prin lucrările lui Graves [17]. În literatura matematică operația mai poartă numele și de factorizarea Autonne-Takagi [18]. Această teză analizează și cazul matricilor de împrăștiere nesimetrice pentru care factorizarea Graves nu mai este adecvată în oferirea de soluții.

În cazul matricilor de scattering simetrice,  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ , valorile proprii ale matricii Graves,  $\mathbf{G} = \mathbf{S}^H \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{S}^* \mathbf{S}$ , sunt egale cu pătratul convalorilor, în timp ce vectorii proprii sunt egali convectorilor [31]. Apare și aici un caz particular: dacă valorile proprii ale lui  $\mathbf{G}$  sunt egale, metoda clasică Graves/Takagi poate prezenta probleme [30, 18].

Tot în cazul matricilor de scattering simetrice, operația de congruență unitară este echivalentă cu operația SSVD (en., Symmetric form of the Singular Value Decomposition). Operația clasică de descompunere în valori singulare (en., Singular Value Decomposition, SVD) este propunerea curentă în literatura PolSAR pentru descompuneri coerente cu date bistatice. Această factorizare poate extrage din matricea de împrăștiere două matrici unitare, una pentru caracterizarea traseului emițător-țintă (Tx-Tg) și alta pentru caracterizarea traseului țintă-receptor (Tg-Rx)

[11]. În schimb, în operația generală de consimilaritate se impune ca între cele două matrici unitare să existe o relație de conjugare complexă. De aceea, consimilaritatea este considerată de către unele referințe drept un caz special al SVD. Figura 2.2 sintetizează grafic relațiile dintre consimilaritate, congruența unitară și descompunerea în valori singulare, în PolSAR.

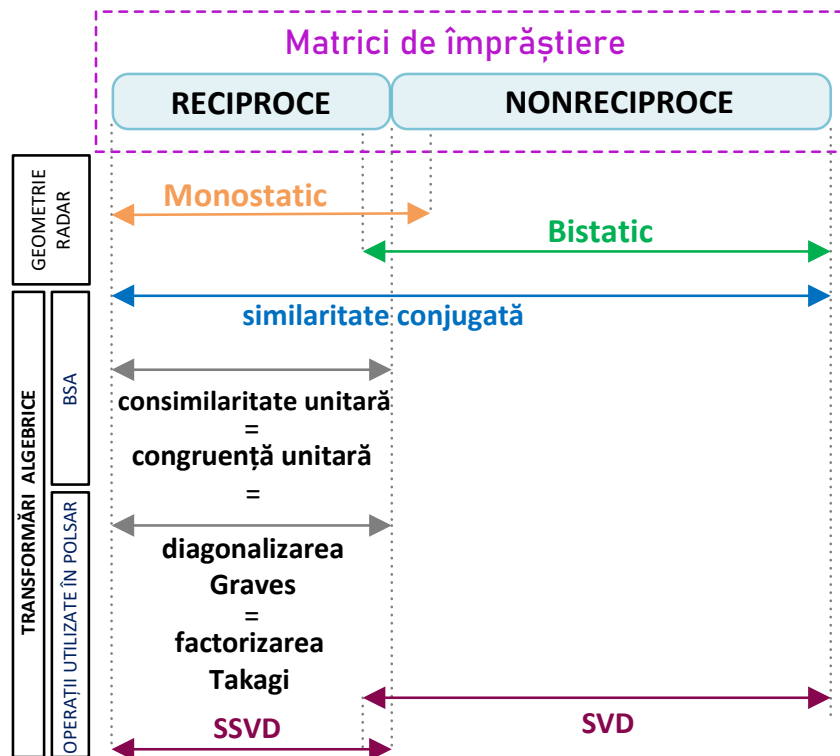


Figura 2.2 Similaritatea conjugată și operația SVD pentru matrici de scattering reciproce și nonreciproce.

Forma generală a operației de consimilaritate, aplicabilă matricilor nonreciproce este insuficient studiată și înțeleasă în polarimetria radar. Prima parte a contribuțiilor tezei face eforturi în această direcție. Se urmărește modul în care această operație poate furniza noi informații pentru analiza matricelor de scattering.

## 2.3 Descompuneri polarimetrice de tip coerent și incoerent

Tehnicile de descompunere polarimetrică ocupă un loc important în PolSAR. Ele pot fi împărțite în metode coerente și incoerente (Figura 2.3), în funcție de natura țintelor considerate în scenă. Aceste tehnici urmăresc explicarea fenomenului de împrăștiere radar și identificarea caracteristicilor geo-fizice ale țintelor fie



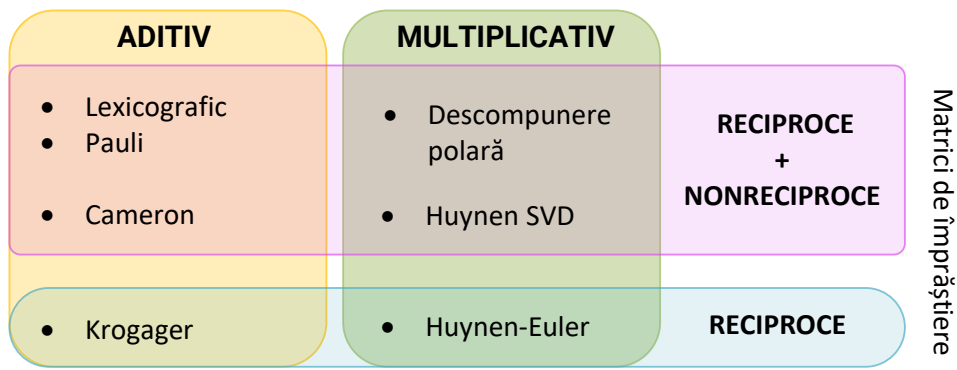


Figura 2.3 **Classificarea decompozițiilor PolSAR coerente.**

Acronim : SVD : Singular Value Decomposition.

prin descompunerea răspunsului polarimetric într-o combinație de răspunsuri de împrăștiere mai simple, fie prin extragerea unor parametrii descriptivi.

#### ■ **Decompoziții coerente**

Putem separa decompozițiile coerente în funcție de tehnica algebrică aplicată pentru descompunerea matricii de scattering în decompoziții aditive sau multiplicative [28]. Spre exemplu, setul complet de patru matrici  $2 \times 2$  Pauli reprezintă baza standard pentru descompuneri aditive. Pentru extragerea unor interpretări fizice, fiecare astfel de termeni vor avea asociate, de obicei, mecanisme polarimetrice. În cazul matricilor Pauli, ele au următoarele interpretări: mecanism de reflexie par, mecanism de reflexie impar, mecanism difuz, mecanism asimetric. Numai primele trei sunt nonzero în cazul descompunerii de matrici de scattering reciproce.

O descompunere multiplicativă utilizează operații algebrice (spre exemplu, diagonalizarea ori operația SVD) pentru a extrage factori elementari. Decompoziția Huynen [22] ori decompoziția polară [39] sunt exemple cunoscute din PolSAR.

Principalele dezvoltări propuse în această teză sunt legate de ramura descompunerilor coerente. Mai precis, contribuțiile se bazează pe metode de descompunere multiplicativă adecvate atât pentru matrici de împrăștiere reciproce cât și nonreciproce.

#### ■ **Decompoziții incoerente**

Vectorul de scattering oferă o reprezentare echivalentă a matricii de scattering [10, 11]. Se poate stabili o legătură între aceste două forme scriind

vectorul (2.3) drept o proiecție a matricii de scattering într-un set de  $N$  matrici (decompoziției prin însumare;  $N$  coincide și cu numărul de elemente din vector) al unei baze  $\{\Psi\}$ :

$$\mathbf{k} = \text{Vect}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{S}\Psi), \quad (2.3)$$

unde operatorul  $\text{Tr}(\cdot\Psi)$  returnează suma elementelor de pe diagonala principală a matricii (urma matricii).

Cele două baze de reprezentare convenționale în PolSAR sunt baza Pauli  $(\cdot)_{\mathcal{P}}$  și cea lexicografică  $(\cdot)_{\mathcal{L}}$ .

#### I. Date în polarizație completă

Observațiile bistatice necesită un set complet de matrici de bază (patru pentru matrici de dimensiune  $2 \times 2$ ). În schimb, în cazul monostatic reciproc acest set se reduce la numai trei elemente.

#### II. Date în dublă polarizație

Pentru date în polarizație parțială, dublă, indiferent dacă geometria de achiziție este monostatică sau bistatică, vectorul de scattering este de dimensiune  $2 \times 1$  (deci, având asociat un set incomplet de două matrici de bază). Pentru polarizația lineară H-V, există trei combinații dublu polarimetrice des întâlnite: HH-VV, HH-VH și VV-HV.

## 2.4 Aplicație: Clasificare H-alpha pentru date dual-pol VV-HV monostatice și bistatice

Metodele coerente (aplicabile la nivelul fiecărui pixel) nu mai sunt relevante pentru analiza răspunsului de împrăștiere al țintelor distribuite. Cu cât este mai mare amprenta la sol a unei celule de rezoluție, cu atât există un număr mai mare de obiecte reale care vor interacționa cu semnalul radar în interiorul celulei. Astfel de date PolSAR prezintă o natură stocastică, iar metodele de analiză folosite în acest sens necesită calculul momentelor statistice de ordin superior. Modelul statistic de bază considerat a fi aplicabil vectorului de împrăștiere este cel al distribuției gaussiene circulare de medie nulă [38]. Astfel, se asociază funcția densitate de probabilitate:

$$p(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi^m \det(\mathbf{C})} \exp\left(-\mathbf{k}^H \mathbf{C}^{-1} \mathbf{k}\right), \quad (2.4)$$

unde  $m \in \{3, 4\}$  corespunde dimensiunii vectorului,  $\mathbf{C} = \mathbb{E}\left\{\mathbf{k}_{\mathcal{L}} \mathbf{k}_{\mathcal{L}}^H\right\}$  este matricea de covarianță lexicografică, iar  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  este operatorul pentru calculul valorii medii (a valorii așteptate).

În general, se consideră că modelul gaussian pentru vectorul țintă descrie cel mai bine datele PolSAR: a) provenite din regiuni omogene sau b) pentru care un număr mare de ținte elementare sunt prezente în interiorul celei de rezoluție (după modelul teoremei limită centrală). Acest lucru este verificat în primul rând de către observațiile de rezoluție medie și joasă.

Metodele propuse în teză nu se întemeiază pe ipoteza unui anumit model statistic, de aceea, în cadrul expunerii se va presupune implicit modelul gaussian (se ignoră cazul non-gaussian al datelor de rezoluție foarte mare). Covarianța complexă în PolSAR este, în general, estimată în baza metodei de plauzibilitate maximă (en., Maximum Likelihood Estimation, MLE) ca media aritmetică a unui set de eșantioane spațiale/temporale. Variabila estimată  $\hat{\mathbf{C}}$  poate fi privită apoi ca o variabilă aleatoare a distribuției complexe Wishart având funcția densitate de probabilitate:

$$p(\hat{\mathbf{C}}) = \frac{L^{qL} (\det \hat{\mathbf{C}})^{L-q}}{(\det \mathbf{\Sigma})^L \Gamma_q(L)} \exp(-L \cdot \text{Tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{C}})), \quad (2.5)$$

unde  $\Gamma_q(L) = \pi^{\frac{q(q-1)}{2}} \prod_{i=0}^{q-1} \Gamma(L-i)$ ,  $\Gamma(\cdot)$  reprezintă funcția Gamma,  $q$  este rangul matricii de covarianță, iar  $\mathbf{\Sigma} = \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{C}}\}$ .

Metoda Cloude-Pottier bazată pe cei doi parametri entropie și unghiul alpha este una dintre cele mai cunoscute descompuneri PolSAR incoerente. Entropia ( $H$ ) se obține din valorile proprii ale covarianței estimate și este un parametru utilizat pentru a descrie caracterul aleatoriu al unei ținte. Valoarea unghiulară alpha ( $\alpha$ ) se obține prin medierea unghiurilor de orientare ( $\alpha_i$ ) corespunzătoare fiecărui vector propriu:

$$H = -\sum_{i=1}^m P_i \log_m P_i \quad 0 \leq H \leq 1 \quad (2.6) \quad \alpha = \sum_{i=1}^m P_i \alpha_i \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \quad [deg.] \quad (2.7)$$

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^m \lambda_j} \quad 0 \leq P_i \leq 1; \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.8)$$

Definițiile de mai sus pentru  $H$  și  $\alpha$  sunt valabile indiferent de valoarea lui  $m$  (numărul de elemente al vectorului de scattering), deci indiferent dacă se folosesc date polarimetrice complete sau parțiale [11]. Cu toate acestea, modul în care proprietățile de împrăștiere pot fi interpretate prin intermediul acestor parametri se modifică, în special în cazul lui alpha, care pierde proprietatea de invarianță la rotație în dual-pol [12, 3]. Acesta este un rezultat cunoscut, menționat de câteva ori în literatura de specialitate, pentru cazul monostatic.

Accesarea diversității tip polarimetric este condiționată de dotările sistemului radar, la rândul său proiectat în vederea respectării unor compromisuri. De aceea, în sistemele reale, polarimetria dublă este adesea alegerea preferată. Acest capitol conține o mică secțiune aplicativă în care se urmărește evaluarea decompoziției  $H - \alpha$  în dublă polarizație, folosind atât date monostatice cât și date bistatice. Re-

zultatele experimentale indică faptul că mecanismele de împrăștiere sunt suficient de diferite între cele două geometrii, chiar și în cazul dual-pol. Comparând valorile obținute pentru  $\alpha$  la aceleași poziții din imagini, se observă valori ușor mai ridicate ale acestui parametru în cazul bistatic (Fig. 2.4).

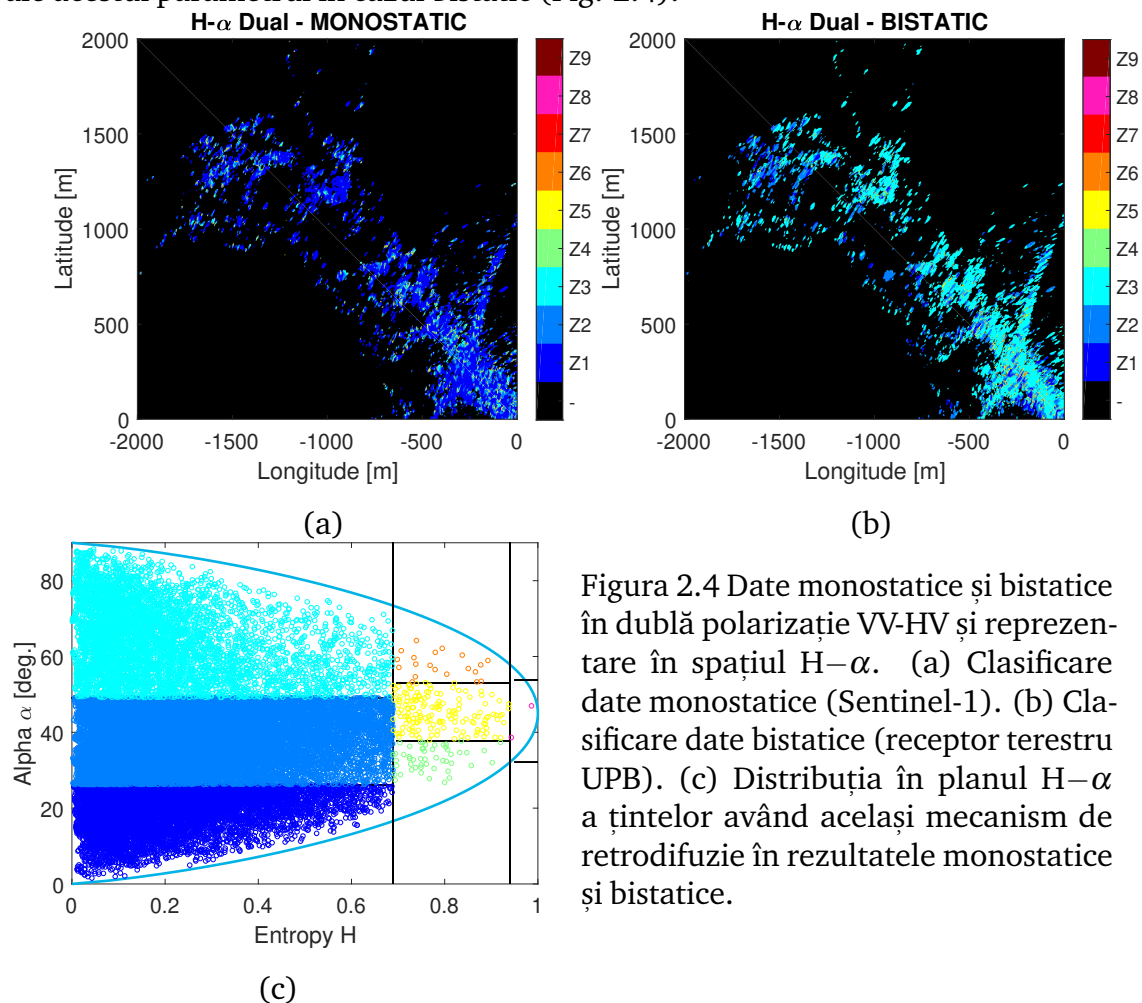


Figura 2.4 Date monostatic și bistatic în dublă polarizație VV-HV și reprezentare în spațiul H- $\alpha$ . (a) Clasificare date monostatic (Sentinel-1). (b) Clasificare date bistatic (receptor terestru UPB). (c) Distribuția în planul H- $\alpha$  a țintelor având același mecanism de retrodifuzie în rezultatele monostatic și bistatic.

Restul tezei presupune ca ipoteză de lucru folosirea de date polarimetrice full-pol.

# Capitolul 3

## Reprezentarea reală a matricii de scattering

Transformarea unei matrice de împrăștiere printr-o operație de consimilaritate este o procedură matematică introdusă în polarimetria radar prin convenția BSA. Pentru unele matrici această transformare permite obținerea unei forme diagonale, caz în care termenii descompunerii vor fi matrice de convalori și convectori (prin analogie cu diagonalizarea prin similaritate ce permite obținerea matricilor conținând valori și vectori proprii).

Cele două perechi de convalori și convectori  $(\xi_k, \mathbf{x}_k), k = \{1, 2\}$  ai matricii de împrăștiere verifică:

$$\mathbf{S}\mathbf{x}_k = \xi_k \mathbf{x}_k^* \quad (3.1)$$

După cum s-a menționat în capitolul anterior, reducerea echivalenței prin consimilaritate la o transformare tip congruență unitară este posibilă doar în cazul matricelor reciproce. Acest capitol va adresa cazul PolSAR nonreciproc printr-un studiu ce urmărește propunerea unei metode pentru determinarea factorilor transformării și extragerea de noi descriptori polarimetrici.

Decompozițiile PolSAR coerente utilizate în prezent se bazează fie pe metoda Graves/Takagi pentru operațiile de congruență unitară (matrice reciproce), fie pe descompunerea SVD (matrice nonreciproce). Primul tip de descompuneri este exclusiv utilizat pentru achiziții monostatice, în timp ce cel de-al doilea este recomandat cazului achizițiilor bistatice. Metoda propusă în acest capitol introduce o completare necesară, fie pentru cazul matricelor nonreciproce din achiziții monostatice, fie ca o alternativă a metodei SVD pentru cazul bistatic.

### 3.1 Reprezentarea reală ca instrument algebric pentru consimilaritate

Studiile bibliografice în literatura PolSAR cât și în cea a algebrei lineare au dezvăluit faptul că: metodele general cunoscute pentru rezolvarea unei transformări de similaritate conjugată între două matrice complexe nu sunt directe. Ele se bazează pe introducerea unei mapări bijective într-un spațiu echivalent în care consimilaritatea poate fi evaluată ca o transformare de similaritate. Mapările cunoscute utilizează fie a) produsul complex dintre matricea de împrăștiere și conjugatul său complex [20], fie b) matrice bloc specifice [8, 24].

În acest studiu se utilizează maparea matricii de împrăștiere folosind metoda Reprezentării Reale (RR) [25, 9]. Aceasta are la bază o matrice bloc  $\mathbf{S}_{RR} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  numită, în continuare, reprezentarea reală a matricii de împrăștiere (en., Real Representation Scattering Matrix, RRSM). Aceasta se compune prin concatenarea dintre părțile reală și imaginară ale matricii originale - desemnate în continuare de operatorii  $Re(\cdot)$  și respectiv  $Imag(\cdot)$  - ale matricii complexe de scattering.

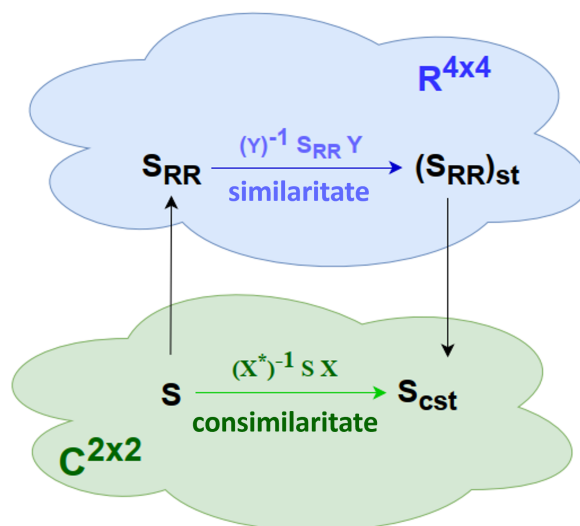


Figura 3.1 Operația de similaritate conjugată între două matrice complexe ( $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}_{cst}$ ) vs. operația de similaritate între două matrice reale ( $\mathbf{S}_{RR}$ ,  $\mathbf{S}_{RR_{st}}$ ).  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  este matricea de transformare în operația de consimilaritate iar  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  este matricea de transformare în operația de similaritate.

### 3.2 Forma canonică și proprietăți ale reprezentării reale

Valorile proprii ale RRSM prezintă următoarele proprietăți: a) se găsesc în perechi pozitiv-negativă și b) toate valorile au același tip algebric. Aceste valori pot fi

Tabel 3.1 Valori proprii ale RRSM și convalori/convectori proprii ale/ai SM.

	RRSM	SM	
	valoari proprii	convalori	convectori
reale	perechi distincte $\{\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2\}$	reale, distincte $\{\xi_1, \xi_2\}$	independenți, ortogonali
	perechi egale $\{\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda\}$	reale, egale $\{\xi, \xi\}$	a. independenți, ortogonali sau b. independenți, având un convector propriu și un convector generalizat
complexe	perechi conjugate complex-conjugate $\{\lambda, \lambda^*, -\lambda, -\lambda^*\}$	complex-conjugate $\{\xi, \xi^*\}$	un convector și un convector generalizat

utilizate pentru caracterizarea convalurilor matricei de împrăștiere (Tabel ??), în baza relației de mapare existente între cele două domenii.

Fiecărei perechi pozitiv-negative de valori proprii (cu elemente reale sau complexe) îi va corespunde o convaloare (se alege valoarea pozitivă din pereche). De exemplu, unei perechi de valori proprii reale,  $(\lambda, -\lambda)$ , îi va corespunde convaloarea reală, pozitivă,  $\xi = \lambda$   $\lambda > 0$ .

Când cel puțin două valori proprii ale  $\mathbf{S}_{RR}$  sunt egale, este posibil să nu existe o formă diagonală pentru  $\mathbf{S}_{RR, st}$ . Forma canonică Jordan poate înlocui forma diagonală în acest caz [20] (unde  $\mathbf{J}_{p_{\mathcal{R}}}$  și  $\mathbf{J}_{r_{p_{\mathcal{I}}}}$  sunt formele specifice ale celulelor Jordan pentru valori reale și valori complex conjugate - detalierea acestor notații se regăsește în Anexa C a lucrării):

$$(\mathbf{S}_{RR})_J = (\mathbf{S}_{RR})_{st} = \left[ \bigoplus_{k_1} \mathbf{J}_{p_{\mathcal{R}}}(\lambda_{k_1}) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{k_2} \mathbf{J}_{r_{p_{\mathcal{I}}}}(\lambda_{k_2}, \lambda_{k_2}^*) \right]. \quad (3.2)$$

Existența valorilor proprii complexe ale  $(\mathbf{S}_{RR})_{st}$  oferă o caracterizare completă a descompunerii matricelor Sinclair în raport cu operația de consimilaritate. După cum s-a menționat, pentru matrici de împrăștiere reciproce factorizarea Graves-Takagi este operația standard pentru extragerea convalurilor (Figura 2.2).

La începutul studiului s-a anticipat existența unui număr scăzut de matrice, în cazul monostatic, care să returneze convalori complexe. Această ipoteză este verificată în setul de date PolSAR reale. Se poate observa exemplul setului Brétigny (monostatic, banda X) în Figura 3.2b.

Figura 3.2a ilustrează pentru același set de date comparația numerică dintre rezultatele convalurilor reale obținute folosind metodele Graves-Takagi și RR. Într-un procent ridicat, valorile obținute prin cele două metode sunt egale cu toleranțe  $\delta_d$  mai mici de  $10^{-2}$ .

### Capitolul 3 – Reprezentarea reală a matricii de scattering

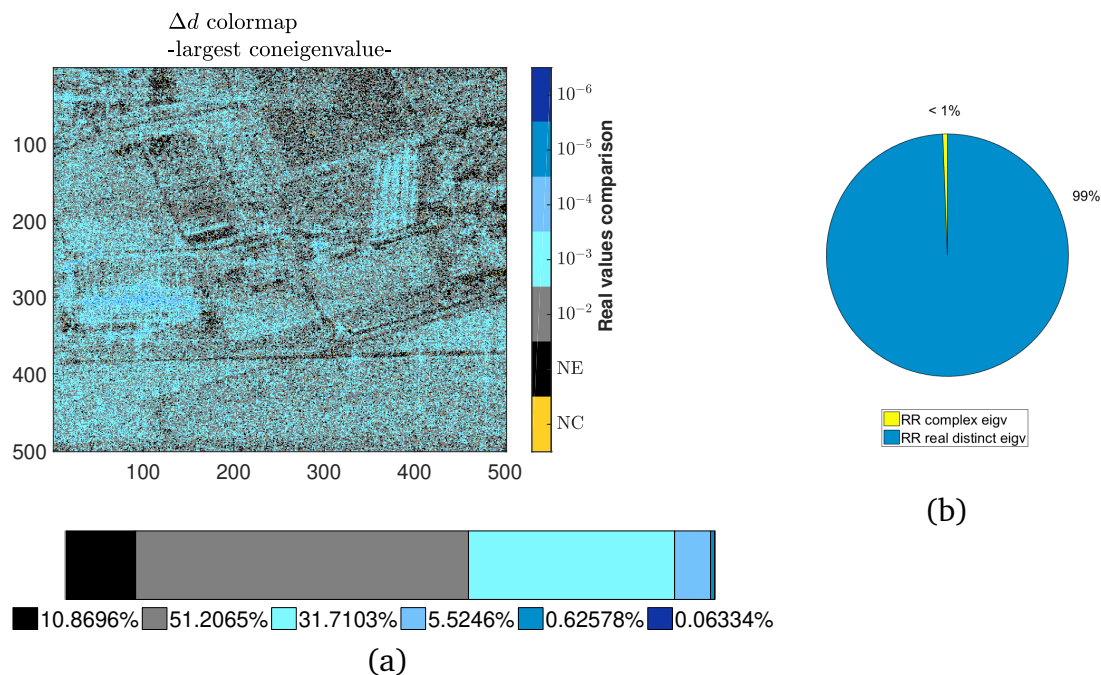


Figura 3.2 Diferența ( $\Delta d$ ) - valoare absolută - între convalori reale obținute prin metoda Graves și prin metoda RR. Se consideră convaloarea maximă ( $\xi_1$ ). (a) Reprezentare codată color (en., color-coded). (b) Procent de valori proprii reale sau complexe ale RRSM.

Acronime: NC (galben) = Necomparate (en., Not Compared), NE (negru) = Inegale (en., Not Equal). Pixelii sunt clasati în clase de gri sau bleu dacă diferența dintre cele două metode se încadrează într-o toleranță  $\delta_d$  dintre  $10^{-2}$  și  $10^{-6}$ .

Capitolul continuă prin a analiza legătura dintre factorul de non-reciprocitate al matricii de împrăștiere [26],  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(S_{vh} - S_{hv})}{\|S\|_F}$ , și convalorile complexe. Notația  $\|S\|_F = (\sum_{i,j \in \{h,v\}} |S_{ij}|^2)^{1/2}$  corespunde normei Frobenius. În această parte sunt utilizate pentru testare date polarimetrice simulate (geometrie monostatică și bistatică, banda C) ale răspunsului de împrăștiere radar pentru două obiecte metalice, considerate reflectori unici în celula de rezoluție: un diedru în unghi drept și o placă de formă pătrată. În teoria clasică radar (geometrie monostatică), aceste două obiecte au asociate două mecanisme elementare de împrăștiere: reflexie dublă și reflexie simplă.

Un software de calcul electromagnetic (CST Microwave Studio) este utilizat pentru a simula, în fiecare din cele două geometrii, valorile de câmp electric împrăștiat într-o gamă largă de direcții de observare. Aceste valori sunt folosite mai apoi pentru compunerea matricelor polarimetrice de scattering.

În acest scurt rezumat sunt incluse doar câteva dintre rezultatele obținute pentru ținta de tip diedru. Pentru geometria monostatică, valorile simulate sunt mai întâi verificate: a) prin compararea valorilor secțiunii transversale radar simulate (en., Radar Cross Section, RCS) cu valori obținute în baza formulelor analitice și b) prin extragerea de parametrii polarimetrice cu valori cunoscute folosind matricele S



estimate. Rezultatele acestor analize, pentru reflectorul diedru, sunt prezentate în Figura 3.3 și în Tabelul 3.2. Astfel de verificări n-au fost aplicate și în cazul bistatic datorită lipsei de date analitice pentru realizarea unor comparații asemănătoare.

În cele din urmă, matricele de împrăștiere estimarea (caz monostatic și bistatic) sunt puse sub forma reprezentării reale și procente diferitele valori proprii ale RRSM sunt calculate.

■ **Diedru (caz monostatic)**

I. *Verificarea simulărilor suprafeței echivalente radar*

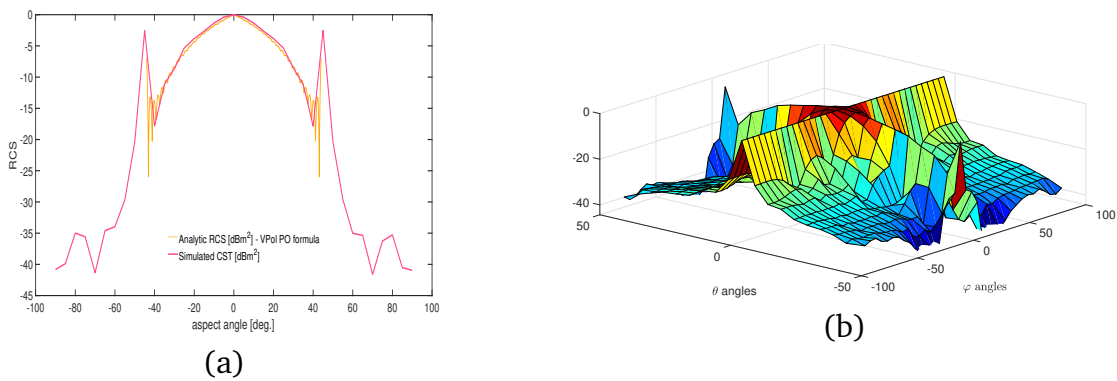


Figura 3.3 **Diedru - Rezultat monostatic** (Polarizație Verticală). (a) Comparație RCS: Valori simulate prin software CEM și prin formule analitice (1D, [dBm<sup>2</sup>]). (b) Valori absolute normalizate ale câmpului electric  $E_s$  (3D, [dB(V/m)]), simulate prin software.

II. *Verificarea prin parametrii polarimetri a matricelor de scattering estimate prin simulare*

Ilustrăm aici dn rezultatele verificărilor aplicate datelor monostatice. Pentru aproximativ 45% din direcțiile de împrăștiere considerate, valorile descriptorilor polarimetrici  $\alpha_{Cloud}$  și  $\alpha_{TSVM}$  variază cu mai puțin de 20° în jurul valorii teoretice (90°). Deși acest lucru arată că diedru este, în general, un reflector stabil există și direcții de observație pentru care valorile obținute indică mecanisme de împrăștiere diferite. Concluzii asemănătoare sunt observate și pentru verificările rezultatelor simulate pentru placa metalică.

Tabel 3.2 **Diedru - Rezultat monostatic**. Evaluare bazată pe descriptori polarimetrici angulari ( $\alpha_{Cloud}$  și  $\alpha_{TSVM}$ ). Procentul valorilor estimate în intervale de 10° între [0°, 90°].

	90–80	80-70	70-60	60-50	50-40	40-30	30-20	20-10	10-0
$\alpha_{Cloud}$ [11]	28.7 %	18.2 %	12.8 %	9.8 %	15.1 %	8.53 %	4.03 %	1.42 %	1.42 %
$\alpha_{TSVM}$ [40]	28.7 %	17.5 %	11.8 %	9.8 %	12.95 %	11.7 %	4.7 %	1.42 %	1.42 %

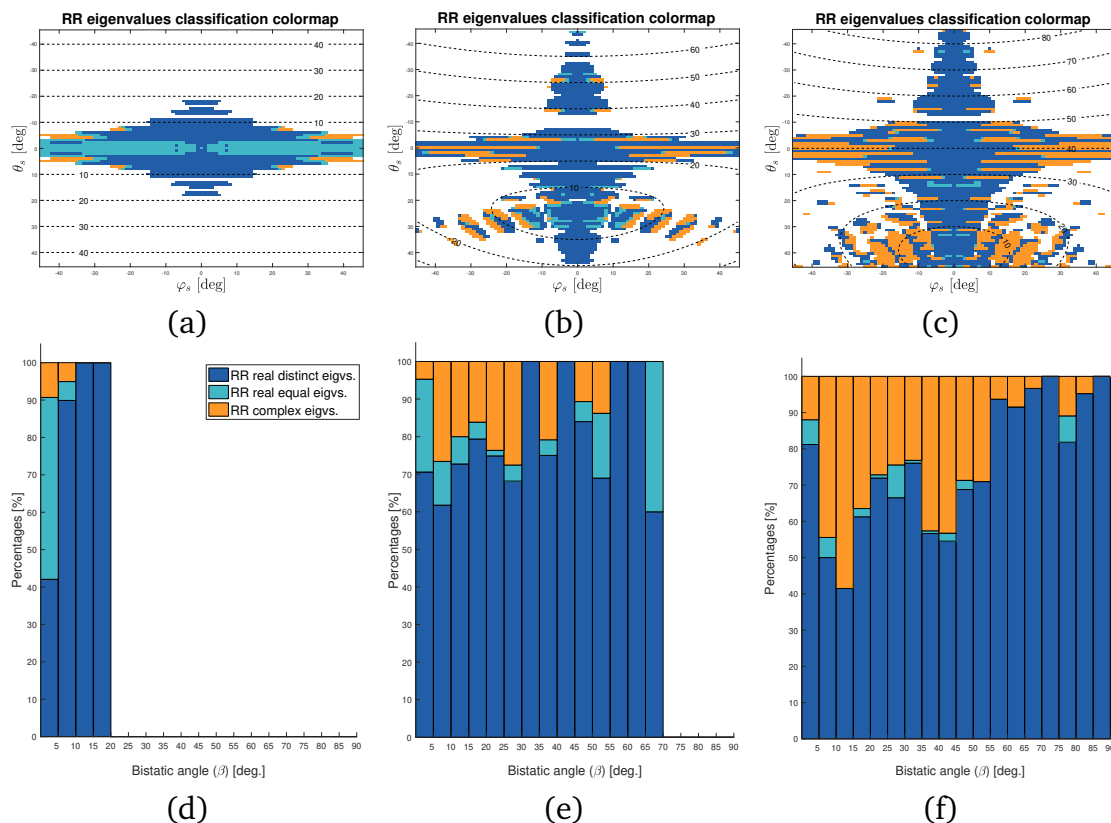


Figura 3.4 Diedru - Rezultat bistatic

Dir ecții de incidență : col. 1 :  $\{\theta_i = 0^\circ, \varphi_i = 0^\circ\}$ , col. 2 :  $\{\theta_i = 25^\circ, \varphi_i = 0^\circ\}$ , col. 3 :  $\{\theta_i = 40^\circ, \varphi_i = 0^\circ\}$ . (a)-(c) Clasificarea valorilor proprii RRSM. (d)-(f) Clasificarea valorilor proprii RRSM în raport cu unghiul bistatic,  $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ .

- Diedru (caz bistatic)** Pentru analiza din cazul bistatic, se consideră trei direcții distincte de incidență și același interval de împrăștiere utilizat în cazul monostatic,  $\{\varphi_s \in [-45, 45], \theta_s \in [-45, 45]\}$ . Rezultatele analizei valorilor proprii pe matricele RRSM estimate se găsesc în Figura 3.4.

Valorile proprii complexe ale RRSM apar pentru anumite direcții de împrăștiere oblice în raport cu direcția bisectoarei obiectului. În cazul acestor valori, experimentele nu au fost suficiente pentru a defini un criteriu al apariției în raport cu parametrii polarimetrice ori descriptori ai geometriei de împrăștiere (cum ar fi, unghiul bistatic).

Ar trebui subliniat faptul că, din punct de vedere al analizei PolSAR, evaluarea propusă matricii RRSM este incompletă deoarece, în forma actuală, a fost aplicată doar țintelor considerate coerente. Prin urmare, această evaluare nu este potrivită pentru caracterizarea țintelor distribuite. De asemenea, influența convectorilor a fost studiată aici doar într-o măsură limitată, fiind o direcție de exploatat pentru viitor.

# Capitolul 4

## Clustering geometric pornind de la descompunerea polară a datelor PolSAR

Acest capitol propune un algoritm de clasificare nesupervizată folosind un criteriu geometric pe varietăți și care pornește de la descompunerea polară a matricei de împrăștiere. Fiecare dintre aceste concepte vor fi expuse pe scurt, urmate de prezentarea rezultatelor metodei de grupare.

În Figura 4.1 se poate observa diagrama simplificată a unui algoritm de grupare (en., clustering) PolSAR.

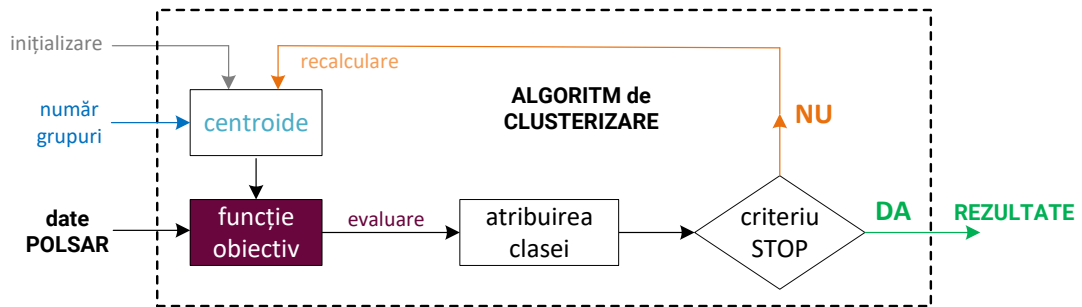


Figura 4.1 Diagramă generală a unui algoritm de clustering PolSAR.

### 4.1 Descompunerea polară

Descompunerea polară este operația de factorizare a unei matrice complexe  $\mathbf{A}$  în produsul a doi termeni: unul unitar și unul complex pozitiv (semi-)definit. Există două forme de descompunere, în funcție de plasarea celor doi factori: (4.1) este forma de dreapta a descompunerii polare, în timp ce (4.2) este forma stângă.

$$\mathbf{A} = \mathbf{UH} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{KU}, \quad (4.2)$$

## Capitolul 4 – Clustering geometric pornind de la descompunerea polară a datelor PolSAR

unde  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  verifică  $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}$  și este cea mai apropiată matrice de tip unitar de  $\mathbf{A}$  (în raport cu orice normă unitar-invariantă<sup>1</sup>, după cum s-a argumentat în [35, 27]).

Matricele  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{K}$  corespund factorilor hermitieni ai descompunerii polare (forma dreaptă și forma stângă). Cele două matrice sunt egale numai dacă matricea complexă  $\mathbf{A}$  este normală.

Indiferent de forma aleasă a descompunerii polare, (4.1) sau (4.2), termenul hermitian va avea o soluție unică. Pentru a avea și un termen  $\mathbf{U}$  unic este necesar ca matricea  $\mathbf{A}$  să fie nesingulară. Evaluările experimentale nu au arătat diferențe dacă una sau alta dintre forme este folosită. Prima dintre cele două forme este cea utilizată în teză pentru orice instanțiere a descompunerii polare.

### ■ *Factor hermitian pozitiv definit:*

Factorul complex definit pozitiv  $\mathbf{H}$  verifică  $\mathbf{u}^H \mathbf{H} \mathbf{u} \geq 0 \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$  și prezintă valori proprii reale, nonnegative. O astfel de matrice este o matrice hermitică,  $\mathbf{H}^H = \mathbf{H}$ .

În cazul în care matricea de împrăștiere este simetric-complexă (caz monostatic), valorile proprii ale factorului hermitian au o interpretare multi-fațetată: convalori, egale cu factorii descompunerii Takagi, egale cu valorile singulare SVD.

Conform teoriei PolSAR termenul hermitian poate fi interpretat și ca acea parte a matricei de scattering compensată în raport cu o rotație complexă (matricea unitară).

Din punct de vedere geometric, spațiul matricelor Hermitiene Positiv-Definite (HPD) ia forma unei varietăți conice deschise. Deoarece acesta este un spațiu geometric curbat, simpla utilizare a metricii euclidiene nu mai este optimă pentru operațiile convenționale pe varietate (măsurarea distanței, valoarea medie, statistici de ordin superior).

### ■ *Factor unitar:*

Matricele unitare sunt omologii în valori complexe ale matricelor ortogonale. Multe funcții distanță sunt unitar-invariante, astfel încât, transformările ce utilizează fie matrice ortogonale, fie matrice unitare, vor conserva parametrii de tip lungime. Grupul de matrice unitare  $2 \times 2$  cu determinant unu este cunoscut ca  $U(2)$  și formează un grup Lie cu operația de înmulțire matriceală. Este deci, un grup algebric având structura unei varietăți netede.

---

<sup>1</sup>adică, o normă ce satisface  $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^H\|$

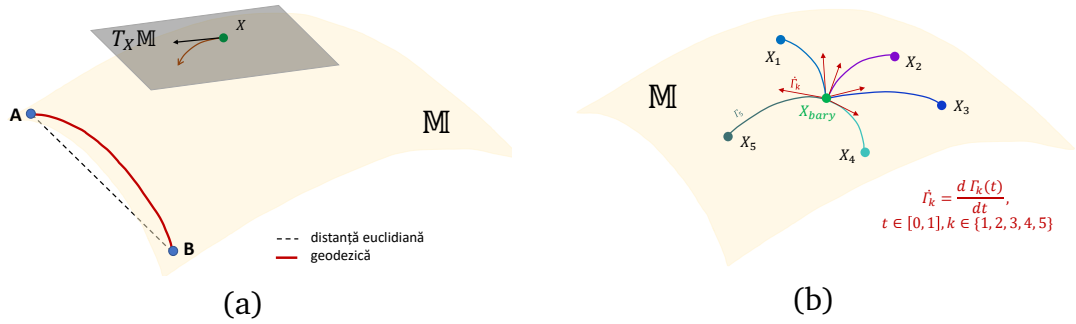


Figura 4.2 Varietate, spațiu tangent, geodesic. (a) Exempletu a unei varietăți ( $M$ ) și spațiul tangent în punctul  $X$  ( $T_X M$ ). (b) Geodesic și vector tangent străbătând ansamblul de puncte  $\{X_i\}$ ,  $1 \leq i \leq 5$  și baricentru.

## 4.2 Varietăți Riemmaniene

O *varietate* (en., manifold)  $M$  este un spațiu topologic, asemănător cu un spațiu euclidian la fiecare mică vecinătate. În orice punct  $X$  al varietății, se poate defini *spațiul tangent*  $T_X M$  (Figura 4.2a). O metrică a varietății implică alegerea unui produsului scalar la fiecare  $X \in M$ . Când metrica are o variație netedă de la un punct la altul, ea se numește riemanniană.

O geodesică este o generalizare a noțiunii de linie dreaptă într-un spațiu curbiliniu și reprezintă astfel modul intrinsec de măsurare a distanțelor pe varietate. Geodesica riemanniană este impusă de metrica definită. Alte metrici extrinseci pot fi impuse, dar acestea nu vor fi optime (Figura 4.2a).

Spațiul matricelor hermitiene formează o varietate riemanniană. Când se alege metrica afin invariantă (en., Affine Invariant Riemannian Metric, AIRM), distanța minimă dintre două matrice  $A$  și  $B$  este:

$$d_{\mathbb{P}(n)}(A, B) = \|\text{Log}(A^{-1/2} B A^{-1/2})\|_F \quad (4.3)$$

iar distanța geodesică dintre punctele asociate celor două matrice:

$$\Gamma(t) = A^{1/2} \left( A^{-1/2} B A^{-1/2} \right)^t A^{1/2}, \quad t \in [0, 1], \quad \Gamma(0) = A \quad \text{and} \quad \Gamma(1) = B.$$

Baricentrul riemannian este definit pe varietate și corespunde punctului ce minimizează pătratul distanțelor geodezice pentru mulțimea de puncte asociate unui set de matrici HPD (Figura 4.2b).

Atunci când setul conține mai mult de trei matrice nu există o soluție analitică pentru această operație. S-a demonstrat totuși, că minimul este unic chiar și în acest caz și poate fi estimat prin utilizarea metodelor de optimizare [6]. Metoda Karcher, bazată pe o implementare de tip descreștere a gradientului (en., gradient

descent) este utilizată în teză pentru a obține estimatului baricentrului factoriilor hermitieni [15].

### 4.3 Clustering geometric cu factori hermitieni

Primele metode care își propuneau să exploateze proprietățile de tip geometric ale matricelor hermitiene în relație cu varietățile riemanniene au apărut în urmă cu aproape un deceniu în domeniul polarimetriei radar. Aceste metode au folosit exclusiv matricele PolSAR de covarianță și au adresat domenii precum: clasificarea și segmentarea nesupervizată [14, 44], detecția schimbărilor în serii temporale [5, 4], clasificarea supervizată [43, 42], ori filtrarea speckle [37, 36].

Algoritmul de grupare geometrică propus în acest capitol se bazează pe metoda k-means/k-medoids și exploatează două operații elementare: a) descompunerea polară a datelor PolSAR și b) extragerea unei medii geometrice (baricentru) direct pe seturi de factori hermitieni  $\mathbf{H}$  ai imaginii și în cadrul operației de calcul a centroidelor k-means/k-medoids.

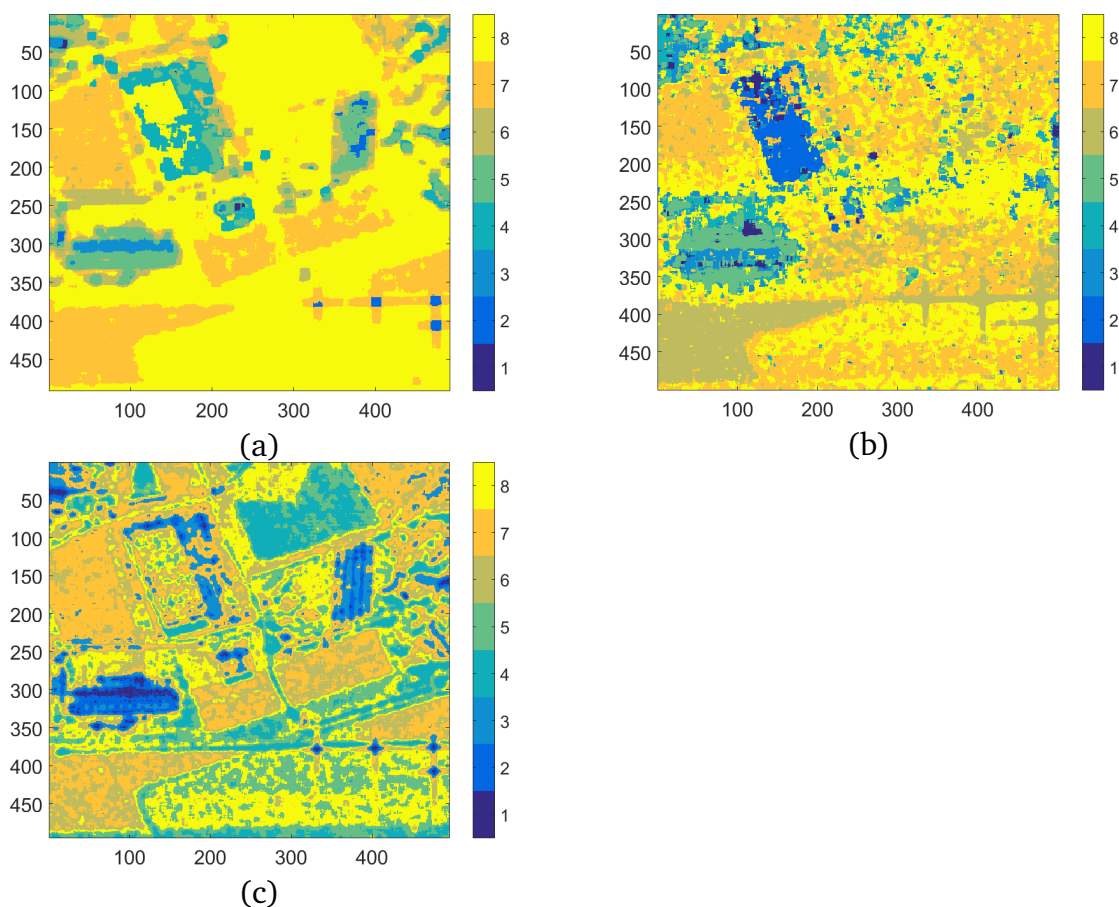


Figura 4.3 Date PolSAR Brétigny. (a) Wishart. (b) k-means folosind distanța geodesică angulară. (c) k-means folosind distanța geodesică Riemanniannă.

Metoda propusă este inovativă prin faptul că nu se mai bazează în mod direct pe estimarea de matrici de covarianță, estimarea covarianței fiind înlocuită cu estimarea baricentrului riemannian (dar folosind același principiu al ferestrei glisante). De asemenea, nu mai este nevoie de vectorizarea datelor (necesară pentru construirea vectorului de împrăștiere), toate operațiile fiind efectuate numai asupra matricelor. Astfel, metoda conservă atât din punct de vedere algebric, cât și din punct de vedere geometric, structura și proprietățile factorilor hermitieni din matricea de scattering.

Pentru evaluarea metodei propuse sunt utilizate date PolSAR reale (evaluare calitativă) și date simulate (evaluare cantitativă). Folosind date simulate care urmează modelul statistic gaussian, testele arată rezultate comparabile cu cele obținute prin metoda clasică de clustering PolSAR bazată pe algoritmul Wishart.

În testele pe date PolSAR se observă cum rezultatele în baza metodei propuse recuperează mult mai bine informațiile de textură din imaginile radar. Spre exemplu, folosind același set Brétigny menționat anterior, se observă în Figura 4.3 o îmbunătățire în separarea unora din zonele de intensitate mai scăzută în imaginile inițiale (precum cele cu vegetație), comparativ cu alte metode de clustering propuse.





# Capitolul 5

## Concluzii

### 5.1 Sinteza și contribuții

Această teză aduce contribuții la dezvoltarea metodelor de prelucrare a imaginilor radar polarimetrice.

Este cunoscut faptul că răspunsul de retrodifuzie polarimetric este influențat de geometria sistemului radar. În cadrul tezei se detaliază cum aceasta poate influența și selecția metodelor de procesare a unor astfel de date. Astfel, Capitolele 2 și 3 explorează și diferența dintre paradigmele monostatice și bistatice. Diversitatea polarimetrică completă (en., full-pol) este asumată pentru toate metodele propuse în cadrul tezei. Totuși, în partea de sfârșit a Capitolului 2, un experiment bazat pe date dual-pol (polarizație parțială, dublă) monostatice și bistatice este propus. Sunt abordate diferențele de interpretare a parametrilor  $H - \alpha$  între polarimetria dublă și cea completă, finalizând cu studiul influenței geometriei de achiziție în dual-pol, prin compararea rezultatelor monostatice (achiziție satelitară) și bistatice (achiziție cu receptor de sol).

În celelalte capitole ale tezei se utilizează modelul polarimetric complet. În PolSAR, datele sunt de tip complex, fiecare pixel fiind descris de o matrice de împrăștiere cu valori complexe. Acest model este, în general, utilizat pentru ținte deterministe, în timp ce formalismul vectorial bazat pe estimarea matricelor de covarianță se aplică modelului cu ținte distribuite. Dintre metodele propuse, cea prezentată în Capitolul 3 se întemeiază pe modelul coerent, în timp ce metoda propusă în Capitolul 4 adresează clasificarea datelor reale, pentru care se adoptă modelul cu ținte distribuite.

Teza este structurată în jurul următoarelor contribuții principale:

#### ■ Capitolul 3:

- **Contribuția 1:** *Metodă bazată pe reprezentarea reală pentru detecția convalorilor complexe*

Capitolul debutează cu prezentarea matematică detaliată a transformării de similaritate conjugată: de ce apare în PolSAR în baza convenției radar BSA și ce metode sunt cunoscute în literatură pentru factorizare. În acest scop, se introduce metoda reprezentării reale și se explică modul în care aceasta poate fi utilizată în contextul consimilarității pentru matrice de împrăștiere reciproce și nonreciproce. Pentru matricele reciproce factorizarea este unică și experimentele din acest capitol arată că factorii descompunerii coincid cu cei obținuți prin descompunerea în valori proprii a matricii în putere,  $\mathbf{S}^H \mathbf{S}$ . În cazul matricelor nonreciproce, factorizarea poate avea soluții în planul complex și este posibil ca cel puțin unul dintre termenii implicați în operația de consimilaritate să nu fie unic.

- **Contribuția 2:** *Analiza datelor polarimetrice aeroportate (caz monostatic) și simulate (cazuri monostatic și bistatic) folosind reprezentarea reală*  
Cea de-a doua parte cuprinde atât generarea unui set de răspunsuri polarimetrice pentru două ținte coerente (o placă metalică pătrată și un diedru în unghi drept) cât și analiza acestor date în baza descompunerii în valori proprii a reprezentării reale. Simulările au fost realizate folosind un software computațional electromagnetic tip full-wave, atât în geometrie monostatică cât și bistatică, iar valorile câmpului electric recepționat au fost calculate pentru o gamă largă de unghiuri de observare. Analiza bazată pe descompunerea în valori proprii a matricii de scattering în reprezentare reală este aplicată și datelor PolSAR reale. Atât datele simulate, cât și datele reale, arată posibilitatea apariției de (con)valori proprii complexe. Procentul este scăzut în cazul monostatic (sub 5% pentru toate datele reale testate) devenind mult mai semnificativ în cazul observațiilor bistatice.

### ■ Capitolul 4:

- **Contribuția 1:** *Analiza celor doi factori ai decompoziției polare a matricii de scattering*

În prima parte a acestui capitol s-au studiat proprietățile algebrice și geometrice ale celor doi factori polari. Termenul hermitian conservă informația de intensitate a matricii de împrăștiere fiind în același timp compensat cu o rotație complexă (corespunzătoare factorului unitar).

- **Contribuția 2:** *Clustering geometric cu factori hermitieni*

Metoda de clustering geometric propusă se bazează pe proprietatea factorilor polari pozitiv-definiți (hermitieni) de a aparține unei varietăți riemanniene. În baza unui set de factori polari (dintr-o vecinătate spațială de dimensiune fixă, aleasă după metoda ferestrei glisante), se

calculează o medie geometrică (baricentru). Metoda de optimizare folosită este de tip descreștere a gradientului. Această operație de mediere poate fi pusă în paralel cu estimarea matricelor de covarianță. Clustering-ul propriu-zis este un algoritm partițional tip k-means/k-medoids, bazat pe calculul de centroide locale (dar după același principiu geometric, utilizând metrica riemanniană AIRM pentru distanțele intra/intercluster).

Performanța metodei este evaluată pornind de la date polarimetrice reale și simulate. În comparație cu metoda clasică nesupervizată Wishart se observă îmbunătățiri de natură cantitativă și calitativă. Spre exemplu, evaluările vizuale calitative arată că metoda propusă recuperează mult mai fidel detaliile de textură din imaginea inițială.

## 5.2 Perspective pentru dezvoltări ulterioare

În această subsecțiune sunt detaliate posibile extensii precum și potențiale îmbunătățiri, separate pe cele două axe principale de studiu detaliate în teză.

### ■ Direcția 1: Consimilaritate și Reprezentarea Reală

- Studiul bazat pe reprezentarea reală și utilizând date polarimetrice simulate nu a permis identificarea unei legături între descriptorii geometriei bistatice (de exemplu, unghiul bistatic) și convalorile complexe. Acest lucru poate sugera că, dacă există, legătura este multivariată, fiind necesară propunerea de noi modele și teste.
- O prelungire imediată a studiului din Capitolul 3 este în a considera și informația polarimetrică a convectorilor. În stadiul actual de dezvoltare, aplicația pe baza reprezentării reale s-a limitat la modelul țintelor coerente. Prin introducerea unui nou model vectorial, adaptat convectorilor, noi parametrii polarimetrice descriptivi ar putea fi identificați. De asemenea, modelul ar putea permite extinderea pentru aplicații cu ținte necoerente, prin calculul covarianței.
- În altă ordine de idei, modelele de învățare automată ar putea fi antrenate folosind ca variabile de intrare parametrii obținuți din operațiile de consimilaritate sau parametrii ai reprezentării reale.

### ■ Direcția 2: Decompoziția polară și clustering-ul geometric

- În multe aplicații, mediana s-a dovedit un estimat mult mai robust în cazul existenței de valori aberante decât valoarea medie. Păstrând ideea

de bază a metodei de clustering geometric (cu operații pe varietate), noi teste pot înlocui estimarea baricentrului riemannian cu estimarea medianei riemanniene [7].

- O altă propunere ar putea fi testarea metricii AIRM în raport cu un set mult mai larg de metrici geometrice. Prioritare ar fi cele mai puțin costisitoare din punct de vedere computațional (spre exemplu, metrica log-euclideană) [29]. De asemenea, s-ar putea urmări înlocuirea algoritmului de clustering partițional bazat pe k-means cu alte metode de grupare (spre exemplu, clustering ierarhic).
- O comparație mult mai amplă ar putea aborda o înțelegere a rolului dimensiunii varietății și a diferențelor între conținutul informațional al diferitelor reprezentări polarimetrice. În acest scop, se propune aplicarea algoritmului de clustering riemannian plecând de la trei variabile de intrare diferite: factorul hermitian al matricei de împrăștiere ( $2 \times 2$ ), matricea PolSAR de covarianță ( $3 \times 3$ ) și factorul pozitiv-definit ( $4 \times 4$ ) din descompunerea polară a reprezentării reale.

### 5.3 Listă de publicații

Pot fi menționate următoarele publicații de jurnal și conferință elaborate în timpul tezei:

#### Articole de jurnal:

- [J1] M. Ciuca, G. Vasile, A. Anghel, M. Gay and S. Ciochina, "Bistatic Analysis Using the Real Representation Scattering Matrix Eigen-Classification," in IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 60, pp. 1-18, 2022, Art no. 5228318, doi: 10.1109/TGRS.2022.3175475. **(Factor de impact 2022-2023: 8.125 - Q1)**
- [J2] M. Ciuca, G. Vasile, A. Anghel, M. Gay and S. Ciochina, "Real Representation of the Polarimetric Scattering Matrix for Monostatic Radar" in Remote Sensing, 2023, 15, 1037, <https://doi.org/10.3390/rs15041037>. **(Factor de impact 2022-2023: 5 - Q1)**
- [J3] A. Anghel, R. Cacoveanu, M. Ciuca, B. Rommen and S. Ciochina, "Multi-channel Ground-based Bistatic SAR Receiver for Single-pass Opportunistic Tomography", in IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2023, doi: 10.1109/TGRS.2023.3294124. **(Factor de impact 2022-2023: 8.125 - Q1)**

- [J4] M. Ciuca, G. Vasile, M. Congedo and M. Gay, "*Riemannian Clustering of PolSAR Data using the Polar Decomposition*"  
(trimis pentru review)

### Articole de conferință:

- [C1] M. Ciuca, A. Anghel, R. Cacoveanu, G. Vasile, M. Gay and S. Ciochina, "*Spaceborne Transmitter - Stationary Receiver Bistatic SAR Polarimetry - Experimental Results*", IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2020, pp. 3869-3872.
- [C2] M. Ciuca, A. Anghel, R. Cacoveanu, B. Rommen and S. Ciochina, "*Single-Pass Spaceborne Transmitter-Stationary Receiver Bistatic SAR Tomography - Novel Solution with 3 Imaging Channels*", IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium IGARSS (IGARSS), 2020, pp. 124-127.
- [C3] M. Ciuca, G. Vasile, M. Gay, A. Anghel and S. Ciochina, "*Polarimetric Analysis Using the Algebraic Real Representation of the Scattering Matrix*", IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2021, pp. 499-502.
- [C4] M. Ciuca, G. Vasile, M. Gay, A. Anghel and S. Ciochina, "*Méthode générale de résolution de la similarité conjuguée en polarimétrie radar*" XXVIII-ème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Sep 2022, Nancy, France.
- [C5] M. Ciuca, G. Vasile, M. Congedo, "Geometric Clustering of PolSAR Data using the Polar Decomposition", IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2023, pp. 1618-1621.



# Bibliografie

- [1] (1983). IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas. *IEEE Std 145-1983*, pages 1–31.
- [2] (2014). IEEE Standard for Definitions of Terms for Antennas. *IEEE Std 145-2013 (Revision of IEEE Std 145-1993)*, pages 1–50.
- [3] Ainsworth, T. L., Preiss, M., Stacy, N., Nord, M., and Lee, J.-S. (2007). Analysis of Compact Polarimetric SAR Imaging Modes. In *POLInSAR Workshop Proceedings*.
- [4] Alonso-González, A., López-Martínez, C., Papathanassiou, K. P., and Hajnsek, I. (2020). Polarimetric SAR Time Series Change Analysis Over Agricultural Areas. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 58(10):7317–7330.
- [5] Alonso-González, A., López-Martínez, C., and Salembier, P. (2014). PolSAR Time Series Processing With Binary Partition Trees. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 52(6):3553–3567.
- [6] Barachant, A., Bonnet, S., Congedo, M., and Jutten, C. (2012). Multiclass Brain–Computer Interface Classification by Riemannian Geometry. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 59(4):920–928.
- [7] Bhatia, R. (2013). *The Riemannian Mean of Positive Matrices*, pages 35–51. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [8] Cho, S. K. and Chu, C. M. (1989). Optimal Polarization in Bistatic Scattering. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 49(5):1473–1479.
- [9] Ciuca, M., Vasile, G., Gay, M., Anghel, A., and Ciochina, S. (2022). Méthode Générale de Résolution de la Similarité Conjuguée en Polarimétrie Radar. In *GRETSI 2022 - XXVIIIème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images*.
- [10] Cloude, S. (1986). *Polarimetry - The Characterization of Polarization Effects in EM Scattering*. PhD thesis, Birmingham University.
- [11] Cloude, S. (2009). *Polarisation: Applications in Remote Sensing*. Oxford University Press.
- [12] Cloude, S. R. (2007). The Dual Polarization Entropy/Alpha Decomposition: A PALSAR Case Study.
- [13] Deng, X., Lopez-Martinez, C., Chen, J., and Han, P. (2017). Statistical Modeling of Polarimetric SAR Data: A Survey and Challenges. *Remote Sensing*, 9(4).

## Bibliografie

- [14] Formont, P., Ovarlez, J., Pascal, F., Vasile, G., and Ferro-Famil, L. (2011). On the Extension of the Product Model in POLSAR Processing for Unsupervised Classification using Information Geometry of Covariance Matrices. In *2011 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 1361–1364.
- [15] Formont, P., Ovarlez, J.-P., and Frédéric, P. (2013). *On the Use of Matrix Information Geometry for Polarimetric SAR Image Classification*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [16] Germond, A.-L. (1999). *Theorie de la Polarimetrie Radar Bistatique*. PhD thesis, Nantes University.
- [17] Graves, C. (1956). Radar Polarization Power Scattering Matrix. *Proceedings of the IRE*, 44(2):248–252.
- [18] Haber, H. E. (2021). A Tale of Three Diagonalizations. *International Journal of Modern Physics A*, 36(04).
- [19] Hong, Y. and Horn, R. A. (1989). A Characterization of Unitary Congruence. *Linear and Multilinear Algebra*, 25(2):105–119.
- [20] Horn, R. A. and Johnson, C. R. (2013). *Matrix Analysis – Second Edition*. Cambridge University Press.
- [21] Hubbert, J. C. (1994). A Comparison of Radar, Optic, and Specular Null Polarization Theories. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(3):658–671.
- [22] Huynen, J. R. (1970). *Phenomenological Theory of Radar Targets*. PhD thesis.
- [23] Ikramov, K. D. (2010). A Note on Complex Matrices that are Unitarily Congruent to Real Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 433(4):838–842.
- [24] Jiang, T., Cheng, X., and Chen, L. (2006). An Algebraic Relation Between Consimilarity and Similarity of Complex Matrices and its Applications. *Journal of Physics: Mathematical and General*, 39:9215–9222.
- [25] Jiang, T. and Wei, M. (2006). On the Reduction of a Complex Matrix to Triangular or Diagonal by Consimilarity. *Numerical Mathematics-English Series*, 15(2):107.
- [26] Karnychev, V., Khlusov, V., Ligthart, L., and Sharygin, G. (2004). Algorithms for Estimating the Complete Group of Polarization Invariants of the Scattering Matrix (SM) Based on Measuring all SM Elements. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 42(3):529–539.
- [27] Lankeit, J., Neff, P., and Nakatsukasa, Y. (2014). The Minimization of Matrix Logarithms: On a Fundamental Property of the Unitary Polar Factor. *Linear Algebra and its Applications*, 449:28–42.
- [28] Lee, J.-S. and Pottier, E. (2009). *Polarimetric Radar Imaging: From Basics to Applications*. CRC Press - Taylor and Francisc Group.
- [29] Lin, Z. (2019). Riemannian Geometry of Symmetric Positive Definite Matrices via Cholesky Decomposition. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 40(4):1353–1370.



- [30] Ling, S. and Jiang, T. (2012). New Method for General Kennan's Pseudoeigenvalue Equation in Radar Polarimetry. *Front. Math. China*, 7(1):85–95.
- [31] Lüneburg, E. and Boerner, W.-M. (1997). Homogeneous and Inhomogeneous Sinclair and Jones Matrices. In *Wideband Interferometric Sensing and Imaging Polarimetry*, volume 3120, pages 45–54. International Society for Optics and Photonics.
- [32] Lüneburg, E., Cloude, S., and Boerner, W.-M. (1997). On the Proper Polarimetric Scattering Matrix Formulation of the Forward Propagation versus Backscattering Radar Systems Description. In *Proc. IEEE Int. Geosci. Remote Sens. Symp. (IGARSS 1997)*, volume 4, pages 1591–1593 vol.4.
- [33] Lüneburg, E., Morisaki, J., and Boerner, W.-M. (2004). On the Forward Scatter Alignment and the Backscatter Alignment Conventions of Bistatic Radar Polarimetry. In *Proceedings of ISAP*, volume 1, pages 1273–1276.
- [34] Marino, A., Cloude, S. R., and Woodhouse, I. H. (2012). Detecting Depolarized Targets Using a New Geometrical Perturbation Filter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 50(10):3787–3799.
- [35] Neff, P., Nakatsukasa, Y., and Fischle, A. (2014). A Logarithmic Minimization Property of the Unitary Polar Factor in the Spectral and Frobenius Norms. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 35(3):1132–1154.
- [36] Pang, B., Xing, S., Li, Y., and Wang, X. (2013). Novel Polarimetric SAR Speckle Filtering Algorithm Based on Mean Shift. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 24(2):222–223.
- [37] Pang, B., Xing, S.-q., Li, Y.-z., and Wang, X.-s. (2012). Speckle Filtering Algorithm for Polarimetric SAR Based on Mean Shift. In *2012 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 5892–5895.
- [38] Pralon, L. (2016). *Scene Analysis and Interpretation by ICA Based Polarimetric Incoherent Target Decomposition for Polarimetric SAR Data*. PhD thesis.
- [39] Souyris, J.-C. and Tison, C. (2007). Polarimetric Analysis of Bistatic SAR Images From Polar Decomposition: A Quaternion Approach. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(9):2701–2714.
- [40] Touzi, R. (2007). Target Scattering Decomposition in Terms of Roll-Invariant Target Parameters. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(1):73–84.
- [41] Trouvé, N. (2011). *Comparaison des Outils Optique et Radar en Polarimétrie Bistatique*. PhD thesis.
- [42] Zhang, Y., Lai, X., Xie, Y., Qu, Y., and Li, C. (2021). Geometry-Aware Discriminative Dictionary Learning for PolSAR Image Classification. *Remote Sensing*, 13(6).
- [43] Zhong, N., Yan, T., Yang, W., and Xia, G.-S. (2016). A Supervised Classification Approach for PolSAR Images Based on Covariance Matrix Sparse Coding. In *2016 IEEE 13th International Conference on Signal Processing (ICSP)*, pages 213–216.
- [44] Zhong, N., Yang, W., Cherian, A., Yang, X., Xia, G.-S., and Liao, M. (2017). Unsupervised Classification of Polarimetric SAR Images via Riemannian Sparse Coding. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 55(9):5381–5390.

