Universitatea Naţională de Ştiinţă şi Tehnologie
POLITEHNICA Bucureşti
Departamentul de Matematică & Informatică
Splaiul Independenţei 313, 060042 Bucureşti, Romania

Operatori cu punct fix în spaţii metrice generalizate JS

Operators with fixed point
in JS generalized metric spaces

Doctorand Doru Mihai DUMITRESCU
E-mail: doru.dumitrescu@upb.ro

Rezumatul tezei de doctorat

Sub îndrumarea Prof. Dr. habil. Mihai POSTOLACHE

Bucureşti, 19 decembrie, 2023

Cuvinte şi fraze cheie: spaţii metrice generalizate în sensul lui Jleli şi Samet, punct fix, şir Cauchy, şir convergent, operator contractiv convex, condiţia (H), contracţie raţională, funcţie de tip comparaţie, funcţie contractivă de tip Geraghty, preordine, spaţiu metric generalizat crescător-complet.

2010 Mathematics Subject Classification: 47H09; 47H10; 54H25.

Cuprins

Rezumat

Obiectivul general. Teoria punctului fix s-a dovedit a fi o unealtă utilă în rezolvarea problemelor apărute în diverse ramuri ale ştiinţelor moderne, întrucât multe fenomene din lumea reală pot fi modelate matematic prin diferite ecuaţii ale căror soluţii pot fi găsite prin asocierea unei probleme de punct fix. Una dintre direcţiile de cercetare ale acestor teorii este dată de condiţiile contractive care sunt impuse operatorilor studiaţi, pentru a asigura existenţa unui punct fix şi, în plus, pentru ca acest punct fix să fie unic. Mai mult, spaţiul în care se lucrează joacă un rol important în construcţia teoremelor de punct fix. Scopul principal al acestei teze de doctorat este dezvoltarea unor rezultate de existenţa şi unicitate pentru puncte fixe asociate unor operatori cu anumite proprietăţi într-un context general. Mai precis, contextul utilizat aici este al spaţiului metric generalizat, introdus de Jleli şi Samet [19], prin schimbarea primei şi celei de-a treia axiome a metricii uzuale. Întrucât familia acestor spaţii metrice extinse conţine, pe lângă spaţiile metrice clasice, alte generalizări, precum spaţiile b-metrice, spaţiile metrice dislocate sau spaţiile modulare cu proprietatea lui Fatou, rezultate cunoscute în literatură sunt generalizate prin teoremele enunţate aici. În ceea ce priveşte rezultatele prezentate în această teză, acestea se referă la studiul operatorilor care sunt definiţi de diverse tipuri de condiţii contractive slabe, precum: funcţii contractiv convexe, operatori care satisfac inegalităţi definite de cantităţi care conţin termeni raţionali, funcţii care verifică condiţii introduse cu ajutorul funcţiilor auxiliare ce posedă proprietăţi adecvate, şi operatori de tip Geraghty cu anumite caracteristici menite să suplinească lipsa oricărei inegalităţi a triunghiului în contextul de lucru cu metricile Jleli-Samet.

Metodologie. Metodele utilizate pentru dezvoltarea rezultatelor din această teză sunt specifice teoriei punctului fix, particularizate mediului de lucru cu spaţiile generalizate Jleli-Samet. Principala dificultate care a trebuit depăşită a fost absenţa oricărei inegalităţi de tip triunghiular, care este in general principalul instrument în demonstrarea proprietăţii că un şir este şir Cauchy. Problema a fost rezolvată, în primă instanţă, prin impunerea unor condiţii de mărginire pentru orbita funcţiilor studiate, un lucru esenţial

în spaţiile metrice generalizate. Mai mult, o parte din teoremele cu privire la existenţa şi unicitatea punctelor fixe au fost prezentate cu ajutorul unor relaţii de preordine adecvate şi proprităţi de monotonie şi continuitate asociate acestora. Problemele demonstrării faptului că limita şirului Picard este într-adevăr un punct fix au fost soluţionate fie extinzând mulţimea de puncte pentru care relaţia contractivă este verificată, sau prin impunerea de condiţii cu privire la tipurile de continuitate ale operatorilor.

Contextul general. Teoria punctului fix este un subiect actual de cercetare în matematica modernă, unul dintre motive fiind acela că furnizează o modalitate utilă de rezolva diferite tipuri de ecuaţii, unele dintre acestea provenind din necesităţi practice. Aceste ecuaţii pot fi aranjate într-o formă în care soluţia lor este exact punctul fix al operatorului implicat. Prima întrebare la care trebuie răspuns este dacă există un punct fix pentru funcţia studiată, şi apoi dacă acest punct este unic. Principiul contracţiilor este unul dintre cele mai renumite rezultate în această direcţie, cu privire la aplicaţii ce minimizează distaţa dintre oricare două puncte; pentru lucrarea de pionierat se poate consulta [6]. Edelstein [14] a demonstrat că în cadrul unui spaţiu metric compact, condiţia ca distanţa dintre imaginile oricăror două puncte este strict mai mică decât distanţa dintre cele două puncte date asigură existenţa unui punct fix al operatorului. Aceste condiţii s-au dovedit uneori a fi prea restrictive, deoarece toţi aceşti operatori ar trebui să posede continuitate, fapt ce a dus la diferite extinderi ale conceptului. Kannan [22] a modificat forma inegalităţii contractive utilizând imaginea celor două puncte în ambii membri ai relaţiei, obţinând o clasă de aplicaţii care posedă punct fix unic, dar care nu sunt neapărat continue. Reich [29] a unificat principul contracţiei cu operatorii Kannan într-o condiţie contractivă mult mai generală. Sehgal [33] a îmbunătăţit ideea lui Edelstein [14], prin luarea în considerare a maximului distanţelor în principiul contracţiilor şi în teorema lui Kannan, şi a unui operator continuu. Reich [30] a extins într-o manieră nouă ideea de contractivitate slabă, prin multiplicarea diferitelor distanţe ce apar în inegalitatea contractivă cu funcţii crescătoare, ce satisfac în plus o condiţie de mărginire în raport cu suma lor. Bianchini [4] a înlocuit suma folosită de Kannan cu un termen care este definit ca maximul distanţelor dintre punctele în discuţie şi imaginile lor, înmulţit cu o cantitate subunitară. Ideea unei combinaţii diferite între distanţe faţă de cea a lui Kannan a fost propusă de Chatterjea [7].

Spaţiile metrice au fost un cadru de lucru adecvat pentru rezultate importante, în diferite domenii din matematică, inclusiv în teoria punctului fix. Extinderile spaţiilor metrice clasice s-au dovedit a fi utile atât din punct de vedere teoretic, cât şi practic. Hitzler şi Seda [17] au schimbat prima dintre axiome pentru a introduce spaţiile metrice dislocate. Renunţarea la cea de-a doua condiţie cu privire la simetrie de la definiţia spaţiilor metrice a fost un alt mod de a extinde acest concept, lucru făcut de Wilson [35]. O metodă productivă de a generaliza spacţiile metrice este legată de inegalitatea triunghiului. În acest sens, ne referim aici, spre exemplu, la spaţiile b-metrice, introduse de Czerwik [8] şi Bakhtin [3], în care membrul drept al inegalităţii triunghiului de la spaţii metrice a fost înmulţit cu o constantă mai mare decât unu. Această schimbare a avut un efect puternic, întrucât b-metricile nu mai sunt neapărat funcţii continue. În acest caz proprietatea că limita unui şir conergent este unică se păstrează. Branciari [5] a modificat inegalitatea triunghiului într-una cu patru termeni, obţinând spaţiile metrice rectangulare; aici, unicitatea limitei unui şir convergent nu mai este asigurată. Kamran *et al.* [21] au introdus spacţiile b-metrice extinse, multiplicând membrul drept al inegalităţii triunghiului cu o funcţie adecvată. O altă extindere a spaţiilor metrice sunt spaţiile modulare, introduse de Nakano [28] şi apoi de Musielak şi Orlicz [27]. Spaţiile metrice parţiale au fost propuse de Matthews [25], din necesităţi provenite din informatica teoretică. Diverse rezultate de punct fix au fost demonstrate în aceste spaţii. Cadrul spaţiilor metrice dislocate a fost folosit de Jungck şi Rhoades [20] pentru a studia aplicaţiile slab compatibile, în timp ce Hitzler [16] le-a găsit aplicaţii practice în programarea logică semantică. Samreen *et al.* [31] au adaptat funcţiile de tip comparaţie în contextul spaţiilor b-metrice extinse pentru a crea condiţii contractive generalizate.

În lucrarea [19], Jleli şi Samet au introdus o generalizare a spaţiilor metrice clasice, ce include strict câteva dintre extinderile descoperite anterior, precum spaţiile b-metrice, spaţiile metrice dislocate sau spaţiile modulare ce satisfac proprietatea lui Fatou. În acelaşi articol, ei au demonstrat nişte principii ale contracţiei adaptate acestui nou context. Karapınar *et al.* [24] au folosit o relaţie binară în scopul de a dezvolta noi rezultate de existenţă în acest cadru, idee ce a fost preluată de Senapati *et al.* [34] pentru a îmbunătăţi condiţiile contractive Wardowski definite implicit. Altun şi Samet [2] au studiat operatori pseude-Picard în contextul spaţiilor Jleli-Samet, fapt ce a fost mai departe folosit de Karapınar *et al.* [23] pentru a enunţa rezultate de tip Meir-Keeler. Sawangsup şi Sintunavarat [32] au abordat subiectul relaţiilor tranzitive din perspectiva definirii unor operatori adecvaţi în aceste spaţii.

Descrierea tezei şi elemente de conţinut.

Capitolul 1 are un scop introductiv, acesta prezintă noţiuni şi concepte necesare pentru dezvoltarea rezultatelor în capitolele următoare. Acestea se referă în principal la cadrul în care teoremele sunt prezentate, şi anume spaţiile metrice Jleli-Samet.

Definiţia 1. Să considerăm o mulţime arbitrară $X \neq \emptyset$ şi fie $D\colon X \times X \to [0,\infty]$ o funcţie. Pentru fiecare punct $x_* \in X$, considerăm mulţimea tuturor şirurilor $\{x_n\} \subset X$ din mulţimea

$$\mathcal{C}(D, X, x_*) = \Big\{\{x_n\} \subset X : \lim_{n\to\infty} D(x_n, x_*) = 0\Big\}.$$

Spunem că D este o JS-metrică pe X dacă următoarele axiome sunt satisfăcute:

$(D1)$ Pentru oricare x, $y \in X$, egalitatea

$$D(x, y) = 0 \text{ implică } x = y;$$

$(D2)$ Pentru oricare x, $y \in X$, condiţia de simetrie

$$D(x, y) = D(y, x)$$

e satisfăcută;

$(D3)$ Există o constantă $C > 0$ astfel încât pentru oricare x, $y \in X$, şi pentru oricare şir $\{x_n\} \in \mathcal{C}(D, X, x)$, următoarea inegalitate se verifică

$$D(x, y) \leq C \limsup_{n\to\infty} D(x_n, y).$$

Pe parcursul studiului nostru, perechea (X, D) va desemna mereu un spaţiu metric Jleli-Samet (denumit şi spaţiu JS), cu excepţia cazului când se va menţiona clar altceva.

În concordanţă cu relaţiile pe care spaţiile JS le au cu spaţiile prezentate anterior, aşa cum s-a demonstrat în [19], această clasă le cuprinde pe cea a spaţiilor metrice clasice, pe cea a b-metricilor, a spaţiilor dislocate sau pe cea a spaţiilor modulare cu proprietatea lui Fatou. Pe de altă parte, este mai numeroasă decât reuniunea tuturor acestor subclase. În acest sens, recomandăm cititorului, spre exemplu, articolul [24] şi alte referinţe similare. Să dăm un exemplu ilustrativ în această direcţie.

Exemplul 1. Fie $X = \{0, p, q\}$ cu p, $q \in \mathbb{R}^*$, $p \neq q$, şi

$$D\colon X \times X \to [0,\infty], \qquad \begin{cases} D(0,0) = 0; \\ D(0,p) = D(p,0) = D(p,p) = p; \\ D(0,q) = D(q,0) = D(p,q) = D(q,p) = q; \\ D(q,q) = \infty. \end{cases}$$

Acest exemplu ne arată că există spaţii Jleli-Samet care nu aparţin niciuneia dintre clasele de metrici menţionate mai sus.

Definiţia 2. Fie (X, D) un spaţiu metric JS şi fie $\{x_n\}$ un şir în X.

1. Spunem că $\{x_n\}$ e convergent la $x \in X$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0.$$

2. Se va spune că $\{x_n\}$ este un şir D-Cauchy dacă

$$\lim_{m,n\to\infty} D(x_m, x_n) = 0.$$

La fel ca în cazul clasic, se poate vedea imediat că limita unui şir convergent este unică. Mai mult, este evident faptul că orice şir convergent în metrică JS este de asemenea D-Cauchy; reciproca nu se verifică. Un spaţiu JS (X, D) în care fiecare şir D-Cauchy este D-convergent la un element din X se numeşte D-complet.

Pe tot parcursul acestei teze vom folosi următoarele notaţii. Să definim

$$\delta_{n_0}(D, T, x) = \sup(\{D(T^n x, T^m x) : n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0\}),$$

unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este un index, şi

$$\delta(D, T, x) = \sup(\{D(T^n x, T^m x) : n, m \in \mathbb{N}\}).$$

Mai mult, notăm orbita unui element x printr-un operator $T\colon X \to X$ ca

$$\mathcal{O}_T(x) = \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definiţia 3. Pentru o preordine dată $\mathbf{B}$, un şir $\{x_n\} \subset X$ este $\mathbf{B}$-crescător dacă $x_n \mathbf{B} x_{n+1}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$.

În strânsă legătură cu preordinea $\mathbf{B}$ sunt tipurile adecvate de monoton regularitate, după cum urmează.

Definiţia 4. Spaţiul metric Jleli-Samat (X, D) este $\mathbf{B}$-crescător-regulat, unde $\mathbf{B}$ este o preordine, dacă pentru orice $\{x_n\} \in \mathcal{C}(D, X, z)$ ce este $\mathbf{B}$-crescător avem că $x_n \mathbf{B} z$, pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

Monotonia operatorilor va fi necesară de-a lungul unor porţiuni din această lucrare.

Definiţia 5. Fie (X, D) un spaţiu Jleli-Samet înzestrat cu o relaţie binară $\mathbf{B}$, care este şi preordine, şi $T\colon X \to X$. Operatorul T se numeşte B-crescător dacă $x\mathbf{B}y$ implică $Tx\mathbf{B}Ty$ pentru orice x, $y \in X$.

Definiţia 6. Spaţiul metric Jleli-Samat (X, D) este $\mathbf{B}$-crescător-complet dacă orice $\{x_n\}$ care este D-Cauchy şi $\mathbf{B}$-crescător este D-convergent in X.

Să notăm prin Ψ familia de funcţii $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ care sunt superior semi-continue, strict crescătoare, şi pentru care $\varphi(t) < t$, oricare $t > 0$. Să remarcăm că aceste funcţii verifică în mod necesar $\varphi(0) = 0$. Altă mulţime ce este utilizată în mod frecvent în această lucrare este Θ, care conţine toate funcţiile continue $\theta\colon [0,+\infty)^4 \to [0,+\infty)$, având ca proprietăţi $\theta(0,t,s,u) = 0$, şi $\theta(t,s,0,u) = 0$, pentru toţi t, s, $u \in [0,+\infty)$. Altă unealtă folosită în formularea unor rezultate din generalizările teoremelor de punct fix prezentate este α-admisibilitatea.

Definiţia 7. Să considerăm $X \neq \emptyset$, şi o aplicaţie $\alpha\colon X \times X \to [0,\infty)$. Un operator $T\colon X \to X$ este α-admisibil dacă $\alpha(x,y) \geq 1$ implică $\alpha(Tx,Ty) \geq 1$, pentru orice x, $y \in X$.

Triangular admisibilitatea, şi α-regularitatea au fost aplicate în demonstrarea unor rezultate din această teză.

Definiţia 8. Fie $X \neq \emptyset$ şi aplicaţia $\alpha\colon X \times X \to [0,\infty)$. Spunem că $T\colon X \to X$ este o funcţie triangular α-admisibilă dacă inegalitatea $\alpha(x,y) \geq 1$ implică faptul că $\alpha(Tx,Ty) \geq 1$, şi relaţiile $\alpha(x,y) \geq 1, \alpha(y,z) \geq 1$ implică $\alpha(x,z) \geq 1$, pentru toţi x, y, $z \in X$.

Definiţia 9. Fie (X,D) un spaţiu Jleli-Samet şi $\alpha\colon X \times X \to [0,\infty)$. (X,D) se numeşte JS α-regular dacă pentru orice $\{x_n\}$ convergent la x şi $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$, există un subşir al şirului iniţial astfel ca $\alpha(x_{n_k}, x) \geq 1$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Capitolul 2, cu titlul **Funcţii contractiv convexe** [13], dezvoltă un studiu al funcţiilor de tip contracţii convexe în cadrul spaţiilor metrice JS. Noţiunea de contracţie convexă a fost introdusă de Istrăţescu în lucrarea sa [18]. În acest articol, Istrăţescu a demonstrat nişte rezultate de existenţă şi unicitate cu privire la diverse tipuri de contracţii convexe. Mai precis, membrul drept al inegalităţii contractive e dat de combinaţii între distanţe şi scalarii în cauză au suma mai mică decât unu. Schimbând distanţele sau adăugând noi termeni în inegalitate se pot forma noi tipuri de contracţii de studiat. Aceste idei au fost generalizate cu succes în diferite spaţii şi inegalitatea convexă a fost îmbunătăţită prin utilizarea de noi termeni. Aceste rezultate au fost dezvoltate mai departe de Miandaragh *et al.* [26], care a enunţat teoreme de punct fix în spaţii metrice prin utilizarea de proprietăţi adiţionale pentru operatorii studiaţi. Mai precis, ei au utilizat noţiunea de α-admisibilitate şi proprietatea (H) pentru a stabili existenţa şi unicitatea unui punct fix pentru operatori cu proprietăţi adecvate. Acest capitol reuneşte toate aceste noţiuni pentru a extinde teoria în cadrul spaţiilor generalizate.

Definiţia 10. Fie $T\colon X \to X$ o funcţie. Pentru $\varepsilon > 0$, spunem că $x_* \in X$ este un ε-punct fix pentru T dacă $D(x_*, Tx_*) < \varepsilon$. Ca notaţie, $F_\varepsilon(T)$ este mulţimea tuturor ε-punctelor fixe ale lui T. Mai mult, se va spune că T are proprietatea de punct fix aproximativ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, T posedă un ε-punct fix.

Definiţia 11. Să considerăm $X \neq \emptyset$ şi aplicaţia $\alpha\colon X \times X \to [0, \infty)$. Spunem că X are proprietatea (H) dacă, pentru orice x, $y \in X$ există un punct $z \in X$ astfel ca $\alpha(x, z) \geq 1$ şi $\alpha(y, z) \geq 1$.

În practică, lucrul cu spaţiile Jleli-Samet în forma lor generală este problematic când vine vorba de a stabili proprietăţi legate de puncte fixe. Un mod de a evita situaţiile problematice este să restrângem valorile metricii astfel încât cazurile patologice cu distanţe infinite să nu apară.

Definiţia 12. Dacă (X, D) este un spaţiu metric Jleli-Samet astfel încât $D(x, y) < \infty$, pentru toţi x, $y \in X$, spunem că (X, D) este un spaţiu Jleli-Samet tare.

Teorema 1. *Fie (X, D) un spaţiu metric Jleli-Samet, $T\colon X \to X$ un operator şi $\alpha\colon X \times X \to [0, \infty)$ o aplicaţie dată. Să presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

i) *T este α-admisibil;*

ii) *există $x_0 \in X$ cu $\delta(D, T, x_0) < \infty$, astfel ca $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;*

iii) *există a, $b \in [0, 1)$ cu $a + b < 1$, pentru care*

$$\alpha(x, y)D(T^2x, T^2y) \leq aD(Tx, Ty) + bD(x, y),$$

pentru toţi x, $y \in \mathcal{O}_T(x_0)$;

Atunci funcţia T are proprietatea de punct fix aproximativ.

Teorema 2. *Fie (X, D) un spaţiu metric Jleli-Samet complet, $T\colon X \to X$ un operator şi $\alpha\colon X \times X \to [0, \infty)$ o aplicaţie dată. Să presupunem că următoarele condiţii se verifică:*

i) *T este o funţie triangular α-admisibilă;*

ii) *există $x_0 \in X$ cu $\delta(D, T, x_0) < \infty$, astfel ca $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;*

iii) *există a, $b \in [0, 1)$ cu $a + b < 1$, pentru care*

$$\alpha(x, y)D(T^2x, T^2y) \leq aD(Tx, Ty) + bD(x, y),$$

pentru oricare x, $y \in \mathcal{O}_T(x_0)$;

iv) *T e funcţie continuă;*

v) *$\alpha(T^n x_0, T^n x_0) \geq 1$, pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci şirul $\{T^n x_0\}$ este convergent la un punct x_* în X. Mai mult, x_* este un punct fix al lui T.

Ca o remarcă imediată, dacă avem două puncte fixe ale lui T, formând perechea (x_*, y_*), pentru care α nu este mai mică decât unu şi distanţa dintre ele este finită, şi inegalitatea contractivă este îndeplinită, atunci proprietatea de unicitate a punctului fix se verifică.

Pentru a enunţa un rezultat de unicitate a punctelor fixe pentru funcţii care îndeplinesc condiţia de convexitate, indiferent de valoarea lui α în perechea formată din presupuse puncte fixe, trebuie să impunem o proprietate adiţională acestor operatori, dar în schimb avem voie să eliminăm unele proprietăţi deja folosite.

Teorema 3. *Fie (X, D) un spaţiu metric Jleli-Samet tare şi $T\colon X \to X$ o funcţie . Să presupunem că următoarele ipoteze se verifică:*

i) *T este α-admisibil pentru o aplicaţie $\alpha\colon X \times X \to [0, \infty)$;*

ii) *există a, $b \in [0, 1)$ cu $a + b < 1$, pentru care*

$$\alpha(x, y)D(T^2x, T^2y) \leq aD(Tx, Ty) + bD(x, y),$$

pentru oricare x, $y \in X$;

iii) *T are proprietatea (H);*

Atunci, dacă T are un punct fix, acesta este unic.

Altă serie de rezultate pot fi obţinute urmând noţiunile introduse în [26], precum conceptul de contracţie convexă generalizată bilaterală, după cum urmează.

Teorema 4. *Fie (X, D) un spaţiu metric Jleli-Samet, $T\colon X \to X$ un operator şi $\alpha\colon X \times X \to [0, \infty)$ o funcţie dată. Să presupunem că se verifică următoarele:*

i) *T este α-admisibil;*

ii) *există $x_0 \in X$ cu $\delta(D, T, x_0) < \infty$, astfel ca $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;*

iii) *există a_1, a_2, b_1, $b_2 \in [0, 1)$ cu $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 < 1$, pentru care*

$$\begin{aligned}\alpha(x, y)D(T^2x, T^2y) \leq{} & a_1D(x, Tx) + a_2D(Tx, T^2x)\\ & +b_1D(y, Ty) + b_2D(Ty, T^2y),\end{aligned}$$

pentru orice x, $y \in \mathcal{O}_T(x_0)$;

Atunci funcţia T are proprietatea de punct fix aproximativ.

Teorema 5. *Fie (X, D) un spaţiu metric Jleli-Samet complet, $T\colon X \to X$ un operator şi $\alpha\colon X \times X \to [0, \infty)$ o aplicaţie dată. Presupunem că se verifică afirmaţiile:*

i) *T este triangular α-admisibil;*

ii) *există $x_0 \in X$ cu $\delta(D, T, x_0) < \infty$, astfel ca $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;*

iii) *există* a_1, a_2, b_1, $b_2 \in [0,1)$ *cu* $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 < 1$, *pentru care*

$$\alpha(x,y)D(T^2x, T^2y) \leq a_1 D(x, Tx) + a_2 D(Tx, T^2x) \\ + b_1 D(y, Ty) + b_2 D(Ty, T^2y),$$

oricare ar fi x, $y \in \mathcal{O}_T(x_0)$;

iv) T *e funcţie continuă;*

v) $\alpha(T^n x_0, T^n x_0) \geq 1$, *pentru toţi* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci şirul $\{T^n x_0\}$ *este convergent la* x_*. *Mai mult,* x_* *este un punct fix al lui* T.

În Capitolul 3, **Condiţii raţional contractive** [10], extindem operatorii contractivi de tip raţional în contextul spaţiilor JS. În 2015, Alsulami *et al.* [1] au introdus noţiunea de contracţie (α, ψ)-raţională, care reuneşte funcţii cu diferite proprietăţi, ce satisfac o condiţie de tip inegalitate. Studiul lor a fost făcut în contextul spaţiilor metrice generalizate, unde cea de-a treia axiomă este o extindere a celei clasice prin adunarea unui nou termen, si -prin urmare- inegalitatea de tip triunghiular joacă un rol esenţial în demonstrarea unor rezultate de existenţă a punctelor fixe. Alt pas făcut în studiul unor noi contracţii slabe a fost realizat de Wu şi Zhao în [36], unde aceştia au introdus contracţiile (α, ψ)-raţionale în cadrul spaţiilor b-metrice. Importanţa contracţiilor raţionale a dus la extinderi ale teoriei în spaţii ce posedă structuri diferite în raport cu cele clasice. Printr-o combinaţie de idei tehnice şi o metodă adecvată, rezultate de punct fix vor fi demonstrate luând în considerare restricţiile impuse de lucrul în absenţa vreunui fel de inegalitate triunghiulară. Abordarea noastră este diferită faţă de cea din Alsulami *et al.* [1], unde este folosită o metrică printr-o inegalitate cu patru termeni (în aceste spaţii, unicitatea limitei unui şir convergent nu mai este garantată).

Teorema 6. *Fie* (X, D) *un spaţiu metric Jleli-Samet complet,* $T\colon X \to X$ *un operator şi* $\alpha\colon X \times X \to [0, \infty)$ *o aplicaţie dată. Presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

i) T *este o funcţie triangular* α*-admisibilă;*

ii) *există* $x_0 \in X$ *cu* $\delta(D, T, x_0) < \infty$ *astfel ca* $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;

iii) *există o funcţie* $\psi \in \Psi$ *astfel încât:*

$$\alpha(x,y)D(Tx, Ty) \leq \psi(M(x,y)),$$

unde

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \max\left\{ D(x,y), D(x,Tx), \frac{D(x,Tx)D(y,Ty)}{1+D(x,y)}, \right. \\ &\left. \frac{D(x,Tx)D(y,Ty)}{1+D(Tx,Ty)} \right\}, \end{aligned}$$

pentru toţi x, $y \in \mathcal{O}'_T(x_0) = \mathcal{O}_T(x_0) \cup \{\omega \in X : \lim_{n\to\infty} D(T^n x_0, \omega) = 0\}$;

iv) X *este* α*-regulat;*

v) $D(T^n x_0, T^n x_0) = 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci şirul $\{T^n x_0\}$ *e convergent la un punct* $x_* \in X$. *Mai mult, dacă* $D(x_*, Tx_*) < \infty$, *atunci* x_* *este un punct fix al lui* T.

În plus, dacă există alt punct fix al lui T, *notat* y_*, *cu* $D(y_*, y_*) < \infty$, $\alpha(x_*, y_*) \geq 1$ *şi* $D(x_*, y_*) < \infty$, *aşa încât perechea* (x_*, y_*) *verifică ipoteza* iii), *atunci* $x_* = y_*$.

În următoarea teoremă, slăbim condiţia contractivă adăugând un termen în plus în membrul drept al relaţiei, şi din acest motiv avem nevoie de o altă condiţie în locul celei de la iv).

Teorema 7. *Fie* (X, D) *un spaţiu metric Jleli-Samet complet,* $T\colon X \to X$ *un operator şi* $\alpha\colon X \times X \to [0, \infty)$ *o funcţie dată. Să presupunem că următoarele condiţii se îndeplinesc:*

i) T *este o funcţie triangular* α*-admisibilă;*

ii) *există* $x_0 \in X$ *cu* $\delta(D, T, x_0) < \infty$ *astfel ca* $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;

iii) *există un* $\psi \in \Psi$ *pentru care:*

$$\alpha(x,y)D(Tx,Ty) \leq \psi(M(x,y)),$$

unde

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \max\left\{ D(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{D(x,Tx)D(y,Ty)}{1+D(x,y)}, \right. \\ &\left. \frac{D(x,Tx)D(y,Ty)}{1+D(Tx,Ty)} \right\}, \end{aligned}$$

pentru orice x, $y \in \mathcal{O}_T(x_0)$;

iv) T *e funcţie continuă;*

v) $D(T^n x_0, T^n x_0) = 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T *are un punct fix* $x_* \in X$ *iar şirul Picard* $\{T^n x_0\}$ *tinde la* x_*. *În plus, dacă am avea un alt punct fix al lui* T, *notat* y_*, *cu* $D(y_*, y_*) = 0$, $\alpha(x_*, y_*) \geq 1$, *şi* $D(x_*, y_*) < \infty$, *astfel ca* (x_*, y_*) *verifică inegalitatea contractivă, atunci* $x_* = y_*$.

Exemplul 2. Să considerăm mulţimea $A = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, unde $N \geq 2$, înzestrată cu metrica Jleli-Samet $D\colon A \times A \to [0.\infty]$ definită în modul următor:

$$D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x = y \text{ iar } x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}, \\ x + y, & \text{pentru } x \neq y \text{ iar } x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}, \\ \infty, & \text{pentru } x = y = N. \end{cases}$$

Să luăm $T\colon A \to A$ dat de $T(0) = T(1) = \cdots = T(N-1) = 1$ şi $T(N) = N - 1$. Considerăm atunci $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\psi(t) = \frac{2}{3}t$, şi $\alpha\colon A \times A \to [0,\infty)$ cu $\alpha(x,y) = 1$, pentru orice x, $y \in A$. Toate condiţiile din Theorema 6 sunt satisfăcute, şi punctul fix este $x_* = 1$.

Modificând forma termenului $M(x,y)$, obţinem alte rezultate interesante de punct fix în acest cadru.

Pentru o asemenea clasă de operatori, poate fi demonstrată următoarea teoremă de existenţă şi unicitate.

Teorema 8. *Fie (X, D) un spaţiu JS complet, $T\colon X \to X$ un operator şi $\alpha\colon X \times X \to [0,\infty)$ o funcţie dată. Presupunem că sunt satisfăcute următoarele ipoteze:*

i) *T este o funcţie triangular α-admisibilă;*

ii) *există $x_0 \in X$ cu $\delta(D, T, x_0) < \infty$ astfel ca $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$;*

iii) *există un $\psi \in \Psi$ pentru care:*

$$\alpha(x,y) D(Tx, Ty) \leq \psi(M(x,y)),$$

unde

$$\begin{aligned} M(x,y) \;=\; & \max\left\{ D(x,y), D(x,Tx), \frac{D(x,Tx)D(x,T^2x)}{1 + D(x,Ty)}, \right. \\ & \left. \frac{D(x,Tx)D(y,Ty)}{1 + D(y,T^2x)} \right\}, \end{aligned}$$

pentru orice x, $y \in \mathcal{O}'_T(x_0)$;

iv) *X este α-regulat;*

v) *$D(T^n x_0, T^n x_0) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci $\{T^n x_0\}$ e convergent la un punct $x_* \in X$. Mai mult, dacă $D(x_*, Tx_*) < \infty$, atunci x_* este un punct fix al lui T.

În plus, dacă mai există un alt punct fix al lui T, notat y_* cu $D(y_*, y_*) < \infty$, $\alpha(x_*, y_*) \geq 1$ şi $D(x_*, y_*) < \infty$, astfel ca (x_*, y_*) îndeplineşte condiţia contractivă, atunci $x_* = y_*$.

În Capitolul 4, **Funcţii slab contractive** [12], principala motivaţie este studiul operatorilor contractivi generalizaţi definiţi de funcţii de tip comparaţie şi de aplicaţii continue de patru variabile în contextul spaţiilor metrice Jleli-Samet. Aceste funcţii sunt înzestrate adiţional cu proprietăţi adecvate care ne permit depăşirea problemei dată de absenţei unei inegalităţi triunghiulare. Aici accentul se pune pe condiţiile inspirate din principul contracţiei clasic, contracţiile de tip Kannan sau din clasa celor de tip Ćirić, care conduc la rezultate de existenţă şi unicitate pentru puncte fixe în aceste spaţii metrice generalizate. Spaţiile JS în care lucrăm satisfac proprietăţi de monotonie şi/sau regularitate cu privire la o relaţie de preordine. În plus, funcţiile studiate din aceste puncte de vedere satisfac diferite condiţii de continuitate.

Teorema 9. *Fie (X, D) un spaţiu metric Jleli-Samet şi fie $T\colon X \to X$ o funcţie dată. Să presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

i) *Există $x_* \in X$, şi $n_0 \in \mathbb{N}$ pentru care avem $\delta_{n_0}(D, T, x_*) < \infty$;*

ii) Există $\varphi \in \Psi$ şi $\theta \in \Theta$ astfel ca:

$$D(Tx, Ty) \leq \varphi(D(x, y)) + \theta(D(y, Tx), D(x, Ty), D(x, Tx), D(y, Ty)),$$

pentru oricare x, $y \in \mathcal{O}_T(x_*)$;

iii) $D(T^n x_*, T^n x_*) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci şirul Picard $\{T^n x_*\}$ este D-Cauchy.

Teorema 10. *Fie (X, D) un spaţiu metric Jleli-Samet înzestrat cu o preordine $\mathbf{B}$ astfel încât acesta este $\mathbf{B}$-crescător-complet şi $T\colon X \to X$ o funcţie. Prezumăm adevărate afirmaţiile:*

i) *Există $x_* \in X$ astfel încât $x_* \mathbf{B} T x_*$, şi $n_0 \in \mathbb{N}$ pentru care $\delta_{n_0}(D, T, x_*) < \infty$;*

ii) *Există $\varphi \in \Psi$, şi $\theta \in \Theta$, astfel ca:*

$$D(Tx, Ty) \leq \varphi(D(x, y)) + \theta(D(y, Tx), D(x, Ty), D(x, Tx), D(y, Ty)),$$

pentru oricare x, $y \in \mathcal{O}_T(x_*)$;

iii) *$D(T^n x_*, T^n x_*) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;*

iv) *T este $\mathbf{B}$-crescătoare, şi $\mathbf{B}$-crescătoare-continuă.*

Atunci şirul Picard $\{T^n x_*\}$ este D-convergent la un punct fix ω al lui T, şi $D(\omega, \omega) = 0$.

Mai mult, dacă mai există un alt punct fix al lui T, notat ω', aşa încât (ω, ω') verifică ii)*, atunci dacă $D(\omega, \omega') < \infty$ şi $D(\omega', \omega') < \infty$, atunci $\omega = \omega'$.*

Următorul exemplu ilustrează aplicabilitatea rezultatului prezentat.

Exemplul 3. Să pornim cu o mulţime $X = [0,1]$ înzestrată cu metrica

$$D(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ \max\{x,y\}, & x \neq y. \end{cases}$$

(X, D) este un spaţiu Jleli-Samet complet, pe care definim operatorul

$$T\colon X \to X, \quad Tx = x - \ln(1+x).$$

Să considerăm acum funcţia de comparaţie

$$\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}, & \text{pentru } x \leq 1, \\ \dfrac{x}{6}, & \text{pentru } x > 1, \end{cases}$$

şi $\theta(t,u,v,w) = \frac{3}{2}v^2 t$, $\theta \in \Theta$. T este o (φ,θ)-contracţie şi are un unic punct fix, $x = 0$.

Generalizări în sensul lui Kannan şi Ćirić pot fi de asemenea formulate şi demonstrate.

Teorema 11. *Fie (X, D) un spaţiu Jleli-Samet ce este* **B***-crescător-complet relativ la preordinea* **B** *şi fie $T\colon X \to X$ o funcţie. Să presupunem că:*

i) *Există $x_* \in X$ astfel ca $x_* \mathbf{B} T x_*$, and $\delta_{n_0}(D, T, x_*) < \infty$ pentru un $n_0 \in \mathbb{N}$;*

ii) *Există $\varphi \in \Psi$ şi $\theta \in \Theta$ astfel ca:*

$$\begin{aligned} D(Tx,Ty) \quad &\leq \quad \varphi\left(\frac{D(x,Tx)+D(y,Ty)}{2}\right) \\ &+\theta(D(y,Tx),D(x,Ty),D(x,Tx),D(y,Ty)), \end{aligned}$$

pentru oricare x, $y \in \mathcal{O}_T(x_*)$;

iii) $D(T^n x_*, T^n x_*) = 0$, *pentru orice $n \in \mathbb{N}$;*

iv) *T este* **B***-crescătoare şi* **B***-crescătoare-continuă.*

Atunci, $\{T^n x_*\}$ este D-convergent la un punct fix ω al lui T, şi $D(\omega,\omega) = 0$. Mai mult, dacă ω' este un punct fix al lui T astfel ca (ω,ω') verifică ipoteza ii)*, pentru care $D(\omega,\omega') < \infty$, şi $D(\omega',\omega') = 0$, atunci $\omega = \omega'$.*

Teorema 12. *Fie (X, D) un spaţiu metric Jleli-Samet ce este* **B***-crescător-complet relativ la preordinea* **B** *şi fie $T\colon X \to X$ un operator. Să presupunem că următoarele ipoteze sunt verificate:*

i) *Există $x_* \in X$ astfel ca $x_* \mathbf{B} T x_*$ şi $\delta_{n_0}(D, T, x_*) < \infty$ pentru un $n_0 \in \mathbb{N}$;*

ii) *Există $\varphi \in \Psi$ şi $\theta \in \Theta$ astfel ca:*

$$\begin{aligned} D(Tx,Ty) \quad &\leq \quad \varphi\left(\max\{D(x,y),D(x,Tx),D(y,Ty)\}\right) \\ &+\theta(D(y,Tx),D(x,Ty),D(x,Tx),D(y,Ty)), \end{aligned}$$

pentru oricare $x,\ y \in \mathcal{O}_T(x_*)$*;*

iii) $D(T^n x_*, T^n x_*) = 0$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*;*

iv) T *este* **B***-crescător and* **B***-crescător-continuu.*

Atunci, şirul Picard $\{T^n x_*\}$ *este* D*-convergent la un punct* ω *al lui* T*, şi* $D(\omega, \omega) = 0$*. Dacă* ω' *este un alt punct fix al lui* T *astfel ca* (ω, ω') *verifică inegalitatea* ii)*, cu* $D(\omega, \omega') < \infty$ *şi* $D(\omega', \omega') = 0$*, atunci* $\omega = \omega'$*.*

Capitolul 5, **Operatori de tip Geraghty** [9, 11], este dedicat contracţiilor slabe de tip Geraghty, în cadrul de lucru al lui Jleli şi Samet. Diferite tipuri de rezultate sunt obţinute combinând classa contracţiilor de tip Geraghty clasice cu expresii adecvate, sumând operatorul cu o funcţie continuă ce posedă caracteristici adiţionale. Ideea iniţială a lui Geraghty [15] a fost mai departe exploatată prin slăbirea condiţiei care trebuie să fie verificată de operatori, prin adăugarea de expresii adecvate legate de funcţii continue ce satisfac de asemenea şi alte ipoteze. Trecând de la contextul metricilor uzuale la cel introdus de Jleli şi Samet necesită adăugarea diverselor condiţii adiţionale funcţiei metrice sau chiar operatorilor. Câteva rezultate originale sunt obţinute prin preordini adecvate sau ipoteze de continuitate, iar altele sunt date de îmbogăţirea mulţimii de puncte pe care se petrece inegalitatea contractivă.

Să notăm mulţimea **S** ce desemnează clasa de funcţii $\beta\colon [0,\infty) \to [0,1)$ astfel că pentru orice şir dat $\{t_n\} \subset [0,\infty)$, cu $\lim_{n\to\infty} \beta(t_n) = 1$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

Teorema 13. *Fie* (X, D) *un spaţiu metric Jleli-Samet şi fie* $T\colon X \to X$ *un operator. Presupunem satisfăcute condiţiile:*

i) *Există* $\tilde{x} \in X$*, şi* $n_0 \in \mathbb{N}$ *pentru care avem* $\delta_{n_0}(D, T, \tilde{x}) < \infty$*;*

ii) *Există o funcţie de tip Geraghty* $\beta \in \mathbf{S}$ *şi* $\theta \in \Theta$ *astfel cat:*

$$\begin{aligned} D(Tx, Ty) \leq & \beta(D(x,y))D(x,y) \\ & + \theta(D(y,Tx), D(x,Ty), D(x,Tx), D(y,Ty)), \end{aligned}$$

pentru oricare $x,\ y \in \mathcal{O}_T(\tilde{x})$*;*

iii) *Funcţia definită prin*

$$g\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad g(t) = \beta(t)t,$$

este crescătoare;

iv) $D(T^n \tilde{x}, T^n \tilde{x}) = 0$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*.*

Atunci şirul Picard $\{T^n \tilde{x}\}$ *este* D*-Cauchy.*

Teorema 14. *Să considerăm (X, D) un spaţiu Jleli-Samet pentru care există preordinea* $\mathbf{A}$ *astfel încât spaţiul este* $\mathbf{A}$*-crescător-complet. Fie $T\colon X \to X$ o funcţie şi să presupunem satisfăcute următoarele condiţii:*

i) *Există $\tilde{x} \in X$, şi $n_0 \in \mathbb{N}$ pentru care avem $\delta_{n_0}(D, T, \tilde{x}) < \infty$;*

ii) *Există o funcţie de tip Geraghty $\beta \in \mathbf{S}$ şi $\theta \in \Theta$ pentru care:*

$$\begin{aligned} D(Tx, Ty) \leq & \beta(D(x, y))D(x, y) \\ & + \theta(D(y, Tx), D(x, Ty), D(x, Tx), D(y, Ty)), \end{aligned}$$

pentru oricare x, $y \in \mathcal{O}_T(\tilde{x})$;

iii) *Funcţia definită de*

$$g\colon [0, \infty) \to [0, \infty), \quad g(t) = \beta(t)t,$$

e crescătoare;

iv) *$D(T^n\tilde{x}, T^n\tilde{x}) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;*

v) *T este* $\mathbf{A}$*-crescător-continuă, şi* $\mathbf{A}$*-crescătoare.*

În aceste condiţii, şirul Picard $\{T^n\tilde{x}\}$ este D-convergent la un punct fix ω al lui T, şi $D(\omega, \omega) = 0$.

Mai mult, dacă mai există un punct fix al lui T, fie acesta ω', astfel ca $D(\omega, \omega') < \infty$, $D(\omega', \omega') < \infty$, şi perechea (ω, ω') verifică condiţia ii)*, atunci $\omega = \omega'$.*

Următorul exemplu arată importanţa rezultatului nostru.

Exemplul 4. Pentru început, să considerăm mulţimea $X = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ înzestrată cu distanţa

$$D(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Se poate vedea că (X, D) este un spaţiu Jleli-Samet complet, aşa că putem defini următorul operator:

$$T\colon X \to X, \quad Tx = \ln(1 + x) + \frac{x^2}{4}.$$

Putem considera acum funcţia de tip Geraghty

$$\beta\colon [0, \infty) \to (0, 1), \quad \beta(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}, & \text{pentru } x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$$

şi $\theta(t, s, u, v) = tu$, $\theta \in \Theta$. T este o contracţie de tip Geraghty în sensul teoremelor de mai sus şi are un unic punct fix $x = 0$.

Să remarcăm că, pentru $x = \frac{1}{2}$ şi $y = \frac{49}{100}$, inegalitatea de tip contractiv

$$D(Tx, Ty) \leq \beta(D(x, y))D(x, y)$$

nu mai este adevărată, deci T nu e o contracţie Geraghty în sensul clasic.

Extinderi în sensul lui Kannan şi Ćirić pot fi formulate şi demonstrate aşa cum am făcut în capitolul anterior. Se poate observa că relaţia contractivă Kannan este suficient de puternică şi ne permite să renunţăm la ipoteza iii).

Teorema 15. *Fie (X, D) un spaţiu Jleli-Samet pentru care există o preordine $\mathbf{A}$ astfel încât spaţiul este $\mathbf{A}$-crescător-complet. Fie $T\colon X \to X$ o funcţie şi să presupunem că se verifică următoarele afirmaţii:*

i) *Există $\tilde{x} \in X$, şi $n_0 \in \mathbb{N}$ pentru care avem $\delta_{n_0}(D, T, \tilde{x}) < \infty$;*

ii)*Există o funcţie de tip Geraghty $\beta \in \mathbf{S}$ şi $\theta \in \Theta$ astfel ca:*

$$\begin{aligned} D(Tx, Ty) \leq & \beta\left(\frac{D(x, Tx) + D(y, Ty)}{2}\right) \frac{D(x, Tx) + D(y, Ty)}{2} \\ & + \theta(D(y, Tx), D(x, Ty), D(x, Tx), D(y, Ty)), \end{aligned}$$

pentru oricare x, $y \in \mathcal{O}_T(\tilde{x})$;

iii) *$D(T^n\tilde{x}, T^n\tilde{x}) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;*

iv) *T is $\mathbf{A}$-crescător-continuă, şi $\mathbf{A}$-crescătoare.*

În aceste condiţii, şirul Picard $\{T^n\tilde{x}\}$ este D-convergent la un punct fix ω al lui T, şi $D(\omega, \omega) = 0$.

Mai mult, dacă există un alt punct fix al lui T, fie acesta ω', având proprietăţile $D(\omega, \omega') < \infty$ şi $D(\omega', \omega') = 0$, iar perechea (ω, ω') satisface condiţia de la ii), *atunci $\omega = \omega'$.*

Bibliografie

1. H.H. Alsulami, S. Chandok, M-A. Taoudi, I.M. Erhan, Some fixed point theorems for (α, ψ)-rational type contractive mappings, Fixed Point Theory Appl., 97(2015).

2. I. Altun, B. Samet, Pseudo Picard operators on generalized metric spaces, Appl. Anal. Discrete Math., 12(2018), 389-400.

3. I.A. Bakhtin, The contraction mapping principle in almost metric spaces, Funct. Anal. Gos. Ped. Inst. Unianowsk, 30(1989), 26-37.

4. R.M.T. Bianchini, Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi, Bolletrino Un. Mat. Ital., 5(1972), 103-108.

5. A. Branciari, A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces, Publ. Math. Debrecen, 57(2000), 31-37.

6. R. Caccioppoli, Un teorema generale sull' esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale, Rend. Accad. Naz. Lincei 11(1930), 794-799.

7. S.K. Chatterjea, Fixed-point theorems, C.R. Acad. Bulgaire Sci., 25(1972), 727-730.

8. S. Czerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, Acta Math. Inform. Univ. Ostrav., 1(1993), 5-11.

9. **D. Dumitrescu**, Geraghty-type contractions in Jleli-Samet generalized metric spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 24(2023), 1005-1020.

10. **D. Dumitrescu**, A. Pitea, Fixed point theorems for (α, ψ)-rational type contractions in Jleli-Samet generalized metric spaces, AIMS Mathematics 8(2023), 16599-16617.

11. **D. Dumitrescu**, Weakly contractive operators in Jleli-Samet generalized metric spaces, U. Politeh. Buch. Ser. A, 84(2022), 33-40.

12. **D. Dumitrescu**, A. Pitea, Fixed point theorems on almost (φ, θ)-contractions in Jleli-Samet generalized metric spaces, Mathematics, 10(2022), No. 22, Art. No. 4239.

13. **D. Dumitrescu**, A. Pitea, Convex contractive mappings in JS distance spaces, submitted.

14. M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings, J. Lond. Math. Soc., 37(1962), 74-79.

15. M. Geraghty, On contractive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 40(1973), 604-608.

16. P. Hitzler, Generalized Metrics and Topology in Logic Programming Semantics, PhD. Thesis, National University of Ireland, University College Cork (2001).

17. P. Hitzler, A.K. Seda, Dislocated topologies, J. Electr. Engng., 51(2000), 3-7.

18. V.I. Istrăţescu, Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with convex diminishing diameters I, Ann. Mat. Pura Appl., 130(1982), 89-104.

19. M. Jleli, B. Samet, A generalized metric space and related fixed point theorems, Fixed Point Theory Appl. 2015., Art. No. 61(2015).

20. G. Jungck, B.E. Rhoades, General fixed point results in dislocated metric spaces, Fixed Point Theory, 18(2017), 615-624.

21. T. Kamran, M. Samreen, Q.Ul. Ain, A generalization of b-metric space and some fixed point theorems, Mathematics, 5(2017).

22. R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 60(1968), 71-76.

23. E. Karapınar, B. Samet, D. Zhang, Meir-Keeler type contractions on JS-metric spaces and related fixed point theorems, J. Fixed Point Theory Appl., 20(2018).

24. E. Karapınar, D. O'Regan, A.F.R.L. Hierro, N. Shahzad, Fixed point theorems in new generalized metric spaces, J. Fixed Point Theory Appl., 18(2016), 645-671.

25. S.G. Matthews, Partial metric topology, in Papers on General Topology and Applications, Flushing NY (1992), Annals of the New York Academy of Sciences, 728(1994), 183-197.

26. M.A. Miandaragh, M. Postolache, S. Rezapour, Approximate fixed points of generalized convex contractions, Fixed Point Theory Appl., Art. No 2013:255(2013).

27. J. Musielak, W. Orlicz, On modular spaces, Studia Math., 18(1959), 49-65.

28. H. Nakano, Modular Semi-ordered-Spaces, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, Japan (1959).

29. S. Reich, Some remarks concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull., 14(1971), 121-124.

30. S. Reich, Kannan's fixed point theorem, Boll. Un. Mat. Ital., 4(1971), 1-11.

31. M. Samreen, T. Kamran, M. Postolache, Extended b-metric space, extended b-comparison function and nonlinear contractions, U. Politeh. Buch. Ser. A, 80(2018), 21-28.

32. K. Sawangsupa, W. Sintunavarat, Further investigation into the contractive condition in D-generalized metric spaces with the transitivity, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 14(2023), 331-344.

33. V.M. Sehgal, On fixed and periodic points for a class of mappings, J. London Math. Soc., 5(1972), 571-576.

34. T. Senapati, L.K. Dey, D. Dolićanin Dekić, Extentions of Ćirić and Wardowski type fixed point theorems in D-generalized metric spaces, Fixed Point Theory Appl., Art. No. 2016:133(2016).

35. W.A. Wilson, On quasi-metric spaces, Amer. J. Math., 53(1931), 675-684.

36. X. Wu, L. Zhao, Fixed point theorems for generalized alpha-psi type contractive mappings in b-metric spaces and applications, J. Math. Comput. Sci., 18(2018), 49-62.