Universitatea Naţională de Ştiinţă şi Tehnologie
POLITEHNICA Bucureşti
Departamentul de Matematică-Informatică
Splaiul Independenţei 313, 060042 Bucureşti, Romania

Structuri geometrice pe varietăţi. Subvarietăţi şi aplicaţii

Geometric structures on manifolds.
Submanifolds and applications

PhD student Crina Daniela NEACŞU
E-mail address: crina.neacsu@upb.ro

Rezumatul tezei de doctorat

Sub îndrumarea Prof. dr. habil. Gabriel-Eduard VÎLCU

16 martie 2024

Cuvinte şi fraze cheie: subvarietate; curbura medie; δ-invariant; curbura Casorati; varietate cuaternionică Kähler; formă spaţială cuaternionică; subvarietate lagrangiană; subvarietate total geodezică; subvarietate H-ombilicală; varietate statistică.

2010 Mathematics Subject Classification: 53B25; 53C40; 53C15; 53C25.

Cuprins

Rezumat

Motivaţie şi introducere. Este cunoscut faptul că geometria structurilor Riemanniene, structurilor complexe, structurilor de contact, structurilor hipercomplexe, cuaternionice şi Cauchy-Riemann aparţine teoriei generale a G-structurilor, un domeniu de mare interes în geometria diferenţială modernă, în analiza globală şi în fizica matematică. Pe de altă parte, teoria subvarietăţilor este un domeniu de cercetare extrem de vast şi activ, care are un rol cheie în dezvoltarea actuală a geometriei diferenţiale. Acest domeniu de studiu care are multe aplicaţii în alte ramuri ştiinţifice este încă extrem de ofertant, existând multe probleme deschise demne de investigat. Scopul prezentei teze de doctorat este acela de a obţine noi rezultate în această direcţie. Studiul se va concentra pe patru direcţii principale: deducerea de inegalităţi optime pentru invarianţi de curbură ai subvarietăţilor, determinarea proprietăţilor fundamentale ale structurilor statistice mixt 3-Sasaki şi mixt 3-cosimplectice, precum şi al submersilor statistice între varietăţi de acest tip, stabilirea unor criterii pentru stabilitatea/instabilitatea T-formelor spaţiale şi clasificarea hipersuprafeţelor de producţie cu izocuante minimale. În continuare vom descrie pe larg motivaţia problemelor abordate, principalele rezultate obţinute, consecinţe ale acestor rezultate şi câteva probleme deschise care derivă din studiul întreprins.

Obţinerea unor relaţii cât mai simple între invarianţii de curbură, atât de natură intrinsecă, precum şi extrinsecă, este o problemă cheie în teoria subvarietăţilor Riemann [18]. Un moment de cotitură în găsirea unor astfel de relaţii a fost introducerea δ-invarianţilor de către Chen în [17]. În lucrarea la care facem referire, autorul a introdus aceşti invarianţi de curbură (numiţi în prezent invarianţi Chen) şi pentru utilizarea lor a dedus inegalităţi optime care implică noii invarianţi şi principalul invariant extrinsec (şi anume pătratul curburii medii $\|H\|^2$) pentru subvarietăţi în forme spaţiale reale. De atunci, teoria δ-invarianţilor a devenit un domeniu activ şi fructuos de cercetare (a se vedea [18]). Pe de altă parte, noţiunea de curbură Casorati (care este un invariant extrinsec) a fost introdusă în anul 1890, pentru suprafeţe în spaţiul euclidian $\mathbb{E}^3$ (a se vedea [15]). Curbura Casorati corespunde mai bine intuţiei noastre comune asupra conceptului de curbură, raportat la curbura Gauss clasică. Acest lucru se datorează faptului că spre deosebire de curbura Gauss, care se poate anula şi pentru suprafeţe care intuitiv nu arată plate, curbura Casorati este identic zero doar pentru plane. Datorită acestui aspect, Casorati a propus noţiunea de curbură a unei suprafeţe $\mathcal{S}$ din $\mathbb{E}^3$ sub forma $\mathcal{C} = \frac{1}{2}\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)$, unde k_1 şi k_2 reprezintă curburile principale ale lui $\mathcal{S}$. În cazul general al unei subvarietăţi într-o varietate Riemann, curbura Casorati se defineşte ca pătratul normalizat al lungimii formei a doua fundamentale [24].

În ultimul deceniu, diverşi geometrii au obţinut inegalităţi de tip Chen între curburile Casorati şi diverşi invarianţi intrinseci. Principalele rezultate obţinute în acest domeniu şi câteva probleme deschise ce implică invarianţii δ-Casorati, se găsesc în lucrarea [21]. Reamintim că subvarietăţile pentru care se realizează cazul de egalitate într-o inegalitate de tip Chen se numesc subvarietăţi ideale şi denumirea de *ideal* este motivată de faptul că aceste subvarietăţi primesc cantitatea minimă de tensiune din mediul ambiant. În familia δ-invarianţilor avem curburile δ-Casorati care au fost definite utilizând curburile Casorati ale hiperplanelor din spaţiul tangent într-un punct. În 2007, S. Decu, S. Haesen şi L. Verstraelen au introdus curburile δ-Casorati normalizate $\hat{\delta}_C(s-1)$ and $\delta_C(s-1)$ pentru o subvarietate Riemann s-dimensională a unei varietăţi Riemann. În plus, autorii au demonstrat două inegalităţi optime pentru aceşti noi invarianţi extrinseci şi curbura scalară normalizată ρ pentru subvarietăţi în forme spaţiale reale [23]. Un an mai târziu, au fost definite curburile δ-Casorati normalizate generalizate $\hat{\delta}_C(r; s-1)$, pentru orice număr real $r > s(s-1)$, respectiv $\delta_C(r; s-1)$, pentru orice număr real $0 < r < s(s-1)$ [24]. Ulterior, au fost realizate o mulţime de studii cu privire la aceşti invarianţi (a se vedea [21] şi referinţele de aici). Este demn de menţionat că $\hat{\delta}_C(s-1)$ şi $\delta_C(s-1)$ sunt doi invarianţi diferiţi, însă în toate studiile efectuate până în 2017 s-a observat că aceştia satisfac inegalităţi similare. Aceeaşi situaţie are loc şi pentru invarianţii $\hat{\delta}_C(r; s-1)$ şi $\delta_C(r; s-1)$, în contrast cu toate rezultatele obţinute anterior pentru diverse clase de subvarietăţi în forme spaţiale. În 2018, G.-E. Vîlcu a demonstrat o inegalitate optimă pentru curburile Casorati normalizate ale subvarietăţilor lagrangiene în forme spaţiale complexe [63]. În articolul tocmai menţionat, s-a obţinut un rezultat neaşteptat, şi anume că marginile inferioare ale invarianţilor $\hat{\delta}_C(s-1)$ şi $\delta_C(s-1)$ sunt diferite. Aceasta a fost prima lucrare în care s-a obţinut că inegalităţile satisfăcute de cei doi invarianţi sunt distincte. Cazurile de egalitate ale inegalităţilor au fost de asemenea discutate în aceeaşi lucrare, unde au fost clasificate subvarietăţile Casorati ideale ale formelor spaţiale complexe. Un an mai târziu, M. Aquib şi alţi autori [4] au generalizat rezultatele din [63] la cazul curburilor Casorati normalizate generalizate. Mai mult, autorii articolului [4] au propus două probleme deschise privind subvarietăţile Legendre în forme spaţiale Sasaki şi subvarietăţile lagrangiene în forme spaţiale cuaternionice. Foarte recent, prima problemă a fost complet rezolvată în [38, 39]. Cu alte cuvinte, autorii au studiat versiunea din geometria de contact a rezultatelor obţinute în [4] şi [63]. Prima problemă abordată în această teză constă în studiul corespondentului cuaternionic al problemei, rezolvând în particular a doua problemă de cercetare propusă în [4].

A doua problemă abordată în teză o reprezintă investigarea curburilor Casorati generalizate ale subvarietăţilor statistice în varietăţi statistice. Noţiunea de varietate statistică apare pentru prima dată în lucrarea lui Amari [3] din necesitatea generalizării conceptului de model statistic pe o varietate. Ulterior, au fost scrise numeroase studii de valoare ce adaptează teoria generală a structurilor geometrice pe varietăţi la varietăţi statistice (a se vedea, de exemplu, [27, 48, 58]). În spiritul inegalităţilor Casorati stabilite în [24], Lee şi alţi autori au demonstrat în [40] unele rezultate similare în context statistic, arătând că există o limitare superioară a valorilor curburii scalare normalizate în funcţie de curburile Casorati ale subvarietăţilor într-o varietate statistică de curbură constantă. Ne propunem să obţinem o îmbunătăţire a inegalităţilor stabilite în [40], prin luarea în considerare a unui tensor de curbură care este mai natural în context statistic şi anume tensorul de curbură statistică propus de Opozda în [50]. Acest nou tensor a fost introdus deoarece are toate simetriile necesare unui tensor de curbură de tip $(0, 4)$, spre deosebire de tensorul clasic de curbură Riemann, care în context statistic nu mai are toate aceste simetrii [50].

Următoarea problemă abordată constă în investigarea structurilor paracuaternionice, a 3-structurilor mixte şi a submersiilor Riemann în context statistic. Reamintim că noţiunea de structură cuaternionică de speţa a doua, cunoscută în literatură şi sub denumirea de structură paracuaternionă, a fost introdusă de Libermann în [37]. Geometria varietăţilor Riemann echipate cu structuri paracuaternionice este un domeniu de cercetare interesant şi multe rezultate remarcabile au fost stabilite în ultimele decenii, inclusiv aplicaţii în diverse domenii precum sistemele mecanice lagrangiene şi hamiltoniene (a se vedea, de exemplu, [59, Capitolul 6] şi referinţele din acesta). Pe de altă parte, noţiunea de 3-structură mixtă a apărut în mod natural în studiul hipersuprafeţelor în varietăţi paracuaternionice efectuat de Ianuş, Mazzoco şi Vîlcu în [35]. Acest concept a fost în continuare rafinat de Caldarella şi Pastore în [13], autorii introducând structurile mixte 3-Sasaki negative şi pozitive, precum şi structurile mixte 3-cosimplectice negative şi pozitive. Mai mult, au demonstrat că un spaţiu mixt 3-Sasakian pozitiv (resp. negativ) este o varietate Einstein având constantă Einstein negativă (resp. pozitivă). Câteva rezultate importante privind geometria acestor varietăţi şi subvarietăţi ale acestora, precum şi exemple de astfel de spaţii, pot fi găsite în [12, 14, 36]. Motivaţi de toate aceste studii, vom investiga influenţa existenţei structurilor cuaternionice de speţa a doua şi a 3-structurilor mixte asupra geometriei varietăţilor statistice.

O altă problemă investigată în această teză constă în studiul stabilităţii T-formelor spaţiale. Se ştie că aplicaţia identitate 1_M a unei varietăţi compacte M ne furnizează unul dintre cele mai simple exemple de aplicaţii armonice. Dacă 1_M este o aplicaţie armonică stabilă, atunci varietatea M se numeşte stabilă, în caz contrar spunându-se că M este instabilă. Aplicaţiile armonice sunt cunoscute a fi obiecte geometrice de mare interes în teoria cuantică a câmpurilor şi în relativitatea generală (a se vedea [53]), fiind investigate intens în ultimele decenii (pentru rezultate recente a se vedea monografia [56] şi referinţele indicate aici). În particular, stabilitatea aplicaţiilor armonice este o problemă de interes major în fizica matematică şi a fost investigată de diverşi autori (a se vedea, de exemplu, [11, 32, 33, 51, 52] pentru mai multe rezultate privind stabilitatea aplicaţiilor armonice în geometria aproape complexă, aproape de (para-)contact şi aproape cuaternionică). În ciuda simplităţii funcţiei identitate, studiul stabilităţii acesteia este un subiect dificil şi intrigant, deoarece variaţia a doua a acestei aplicaţii este dificil de analizat. Un prim rezultat major în acest sens a fost obţinut de Smith [55], care a stabilit un criteriu pentru stabilitatea varietăţilor Einstein compacte în funcţie de prima valoare proprie a operatorului Laplace-Beltrami. Mai mult, el a demonstrat că aplicaţia identitate a oricărei varietăţi Kähler compacte este stabilă. Deşi majoritatea proprietăţilor varietăţilor Kähleriene se extind în mod natural la varietăţile Sasaki, este un fapt surprinzător că aproape toate spaţiile Sasaki clasice sunt instabile. În particular, aplicaţia identitate a oricărei sfere unitare de dimensiune impară este instabilă [55]. Rezultate mai generale privind stabilitatea formelor spaţiale Sasaki pot fi găsite în [32, 52]. Motivaţi de toate aceste studii, suntem interesaţi de extinderea rezultatelor de stabilitate pentru T-varietăţi de curbură ϕ-secţională constantă. Aceasta este o problemă naturală, deoarece T-varietăţile reprezintă o umbrelă pentru două clase importante de varietăţi, şi anume varietăţile Kähler şi varietăţile cosimplectice. Mai mult decât atât, conform lui Blair [9], T-varietăţile împreună cu K-varietăţile şi S-varietăţile reprezintă cele trei clase importante de varietăţi care au grupul structural $U(n) \times O(s)$.

Ultimul subiect abordat în această teză este studiul unor clase de hipersuprafeţe ale spaţiului euclidian de dimensiune $(n+1)$ ce sunt de mare interes în teoria producţiei. Este cunoscut faptul că funcţiile de producţie reprezintă unul dintre concepte fundamentale folosite în economie [54]. Deoarece funcţiile de producţie cu n factori pot fi identificate în mod natural cu hipersuprafeţele spaţiului euclidian $(n + 1)$-dimensional (a se vedea [60, 62]), studiul modelelor de producţie cu ajutorul instrumentelor geometriei diferenţiale a devenit un subiect fervent în ultimii ani (a se vedea, de exemplu, [6, 61]). Prin urmare, putem găsi în literatura recentă multe rezultate de clasificare geometrică pentru modelele de producţie fundamentale utilizate în analiza economică, şi anume modele de producţie omogene [22], de tip cvasi-sumă [7, 20], omotetice [19], cvasiomogene (sau ponderat omogene) [2] şi de tip cvasi-produs [1, 28]. Demonstraţiile acestor rezultate de clasificare sunt foarte tehnice, implicând în general o combinaţie de metode din analiza matematică, geometria diferenţială, ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale. Printre proprietăţile geometrice ale funcţiilor de producţie, cele legate de curbura Gauss şi curbura medie a hipersuprafeţelor de producţie corespunzătoare sunt de interes primordial. Reamintim că minimalitatea modelelor de producţie de tip cvasi-sumă a fost investigată de Y. Du, Y. Fu şi X. Wang [26], autorii obţinând o teoremă de clasificare pentru dimensiunile 2 şi 3. Recent, Y. Luo şi X. Wang [42] au extins clasificarea la cazul modelelor de producţie de tip cvasi-produs. Minimalitatea este o proprietate fundamentală investigată iniţial în geometria diferenţială (a se vedea, de exemplu, [25]), dar datorită semnificaţiei şi potenţialelor sale aplicaţii, a fost ulterior luată în considerare în multe alte domenii, cum ar fi calculul variaţional, teoria potenţialului, analiză complexă, arhitectură, relativitatea generală, inginerie moleculară, sculptură, aviaţie, economie şi ştiinţa materialelor. Ne concentrăm studiul pe minimalitatea izocuantelor, un concept cheie atât în teoria producţiei, cât şi în cea a ofertei, ce a fost introdus independent de A.L. Bowlley, R. Frisch, C.W. Cobb şi A.P. Lerner (pentru detalii despre paternitatea noţiunii, a se vedea [41]). În linii mari, o izocuantă ilustrează geometric toate combinaţiile posibile de factori de producţie ce asigură un anumit nivel al producţiei. În ciuda importanţei geometriei izocuantelor în luarea celei mai bune decizii pentru minimizarea costurilor şi, prin urmare, pentru maximizarea profitului, nu s-au obţinut rezultate de clasificare pentru modelele de producţie cu izocuante minimale. Acest lucru se datorează lipsei unor metode adecvate pentru rezolvarea ecuaţiei cu derivate parţiale ce caracterizează proprietatea minimalităţii în acest cadru. Scopul nostru este de a obţine un astfel de rezultat de clasificare în cazul modelelor de producţie de tip cvasi-produs.

Descrierea tezei şi elemente de conţinut.

Subvarietăţile lagrangiene, o clasă de subvarietăţi Riemann ce au apărut în mod natural în cadrul mecanicii hamiltoniene, joacă un rol important în unele teorii moderne ale fizicii. În primul capitol al tezei, intitulat **Subvarietăţi lagrangiene în varietăţi cuaternionice Kähler** şi al cărui conţinut se bazează pe [5], utilizând o tehnică de optimizare pe subvarietăţi imersate în varietăţi Riemann, sunt obţinute mai întâi inegalităţi pentru invarianţii de curbură δ-Casorati ai subvarietăţilor lagrangiene în forme spaţiale cuaternionice, adică în varietăţi cuaternionice Kähler de curbură q-secţională constantă.

Teorema 1. [5] *Fie M^s o subvarietate lagrangiană a unei forme spaţiale cuaternionice $\hat{M}^{4s}(c)$.*

(i) Pentru orice număr real r astfel încât $0 < r < s(s-1)$, are loc inegalitatea:

$$\rho \leq \frac{\delta_C(r; s-1)}{s(s-1)} + \frac{c}{4} - \frac{2r^2}{(s-1)[s^2 + s(r-1) + r]}\|H\|^2. \tag{1}$$

(ii) Pentru orice număr real r astfel încât $r > s(s-1)$, are loc inegalitatea:

$$\rho \leq \frac{\widehat{\delta}_C(r; s-1)}{s(s-1)} + \frac{c}{4} - \frac{2s[s^2 + s(r-1) - 2r]}{(s-1)[s^2 + s(r-1) + r]}\|H\|^2. \tag{2}$$

O subvarietate Casorati ideală într-o varietate Riemann este o subvarietate care satisface identic cazul de egalitate într-o inegalitate optimă ce implică invarianţii de curbură δ-Casorati. Am arătat că în familia subvarietăţilor lagrangiene în forme spaţiale cuaternionice, există doar două subclase de subvarietăţi Casorati ideale, mai exact familia subvarietăţilor total geodezice şi o subfamilie particulară de subvarietăţi H-ombilicale. Reamintim că subvarietăţile lagrangiene H-ombilicale au fost introduse în [49] deoarece nu există subvarietăţi lagrangiene total ombilicale proprii în forme spaţiale cuaternionice.

Definiţia 1. [49] *O subvarietate lagrangiană non-total geodezică M^s într-o formă spaţială cuaternionică $\hat{M}^{4s}(c)$ se numeşte H-ombilicală dacă forma a doua fundamentală satisface:*

$$\begin{cases} \sigma(e_1, e_1) = \sum_{\varsigma} \lambda_\varsigma J_\varsigma e_1, \\ \sigma(e_2, e_2) = \cdots = \sigma(e_s, e_s) = \sum_{\varsigma} \mu_\varsigma J_\varsigma e_1, \\ \sigma(e_1, e_j) = \sum_{\varsigma} \mu_\varsigma J_\varsigma e_j, \quad j = 2, \ldots, s, \\ \sigma(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 2, \ldots, s, \end{cases} \tag{3}$$

pentru anumite funcţii $\{\lambda_\varsigma, \mu_\varsigma\}_{\varsigma=1,2,3}$, în raport cu un reper local ortonormal.

Am obţinut următoarele rezultate.

Teorema 2. [5] *Fie M o subvarietate lagrangiană a unei forme spaţiale cuaternionice $\hat{M}^{4s}(c)$. Atunci M este o subvarietate ideală pentru* (2) *dacă şi numai dacă M este o subvarietate total geodezică.*

Teorema 3. [5] *Fie M o subvarietate lagrangiană a unei forme spaţiale cuaternionice $\hat{M}^{4s}(c)$. Dacă M este o subvarietate ideală pentru* (1)*, atunci fie M este o subvarietate total geodezică, fie M este o subvarietate H-ombilicală ce satisface* (3) *cu* $\mu_\varsigma = \frac{s^2-s+2r}{r}\lambda_\varsigma$, $\varsigma = 1, 2, 3$.

La sfârşitul capitolului am furnizat exemple ilustrative pentru rezultatele obţinute. În particular, am arătat că o întreagă familie de subvarietăţi lagrangiene Casorati ideale poate fi construită folosind conceptul de extensor cuaternionic introdus în [49].

Exemplul 1. [5] Spaţiul proiectiv real $\mathbb{R}P^n\left(\frac{c}{4}\right)$ (de curbură secţională constantă $\frac{c}{4}$) poate fi imersat natural în spaţiul proiectiv cuaternionic $\mathbb{H}P^n(c)$ ca o subvarietate total geodezică (a se vedea [29, 43]). Această imersie este definită în termeni de coordonate omogene ca $\iota : \mathbb{R}P^n\left(\frac{c}{4}\right) \to \mathbb{H}P^n(c)$, $\iota(u) = (u, 0, 0, 0)$. Prin urmare, ι ne furnizează un exemplu simplu de subvarietate lagrangiană Casorati ideală pentru (1) şi (2).

Exemplul 2. [5] Sfera Riemanniană n-dimensională ne furnizează un al doilea exemplu remarcabil de subvarietate total geodezică în $\mathbb{H}P^n(c)$ (a se vedea [16]). Evident, aceasta reprezintă o subvarietate lagrangiană Casorati ideală pentru (1) şi (2).

Exemplul 3. [5] O întreagă familie de subvarietăţi lagrangiene Casorati ideale pentru (1) şi (2) poate fi obţinută prin intermediul extensorilor cuaternionici introduşi în [49]. Reamintim că un extensor cuaternionic al unei imersii izometrice $G : M^{n-1} \to \mathbb{E}^m$ a unei varietăţi Riemann M de dimensiune $n-1$ în spaţiul euclidian m-dimensional $\mathbb{E}^m$, este imersia produs tensorial dintre o curbă de viteză unitară $F : I \to \mathbb{H}$ din planul cuaternionic şi imersia G, notată prin $\phi = F \otimes G : I \times M^{n-1} \to \mathbb{H} \otimes \mathbb{E}^m = \mathbb{H}^m$ şi definită astfel: $\phi(t, p) = F(t) \otimes G(p),\ \forall\ t \in I,\ p \in M^{n-1}$.

Aplicând [49, Propoziţia 3.3], rezultă că prin considerarea incluziunii $\iota : S^{n-1} \to \mathbb{E}^n$ a hipersferei unitate S^{n-1} în $\mathbb{E}^n$, a curbei de viteză unitară F în $\mathbb{H}$ definită prin $F(t) = (t + a)q$, pentru o constantă $a \in \mathbb{R}$ şi un cuaternion unitar $q \in \mathbb{H}$, se obţine extensorul cuaternionic $\phi = F \otimes \iota$ ce defineşte o subvarietate lagrangiană total geodezică în $\mathbb{H}^n$. Prin urmare, $\phi = F \otimes \iota$ ne furnizează exemple de subvarietăţi lagrangiene Casorati ideale în spaţiul cuaternionic euclidian $\mathbb{H}^n$ pentru (1) şi (2), pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi pentru orice cuaternion unitar $q \in \mathbb{H}$. Remarcăm că în cazul în care curba generatoare F este o curbă de viteză unitară F în $\mathbb{H}$ diferită de $F(t) = (t+a)q$, pentru $a \in \mathbb{R}$ şi $q \in \mathbb{H}$ un cuaternion unitar, atunci orice extensor cuaternionic $\phi = F \otimes \iota$ defineşte o subvarietate lagrangiană în $\mathbb{H}^n$, cu forma a doua fundamentală σ satisfăcând (3) pentru $\lambda_\varsigma =< F'', J_\varsigma F' >$ şi $\mu_\varsigma =< \left(\frac{F}{||F||}\right)', J_\varsigma\left(\frac{F}{||F||}\right) >$, unde $\varsigma = 1, 2, 3$. Prin urmare, concluzionăm că în acest caz $\phi = F \otimes \iota$ defineşte o subvarietate lagrangiană H-ombilicală a lui $\mathbb{H}^n$.

În [40], Lee şi colaboratorii săi au demonstrat unele inegalităţi optimale implicând curbura scalară normalizată şi curburile δ-Casorati normalizate ale subvarietăţilor într-o varietate statistică de curbură constantă, rezultate ce au fost ulterior generalizate de către Bansal şi alţi autori în [8] la cazul curburilor δ-Casorati generalizate normalizate. În Capitolul 2, **Inegalităţi de curbură pentru subvarietăţi statistice în varietăţi statistice**, al cărui conţinut se bazează pe [44], vom îmbunătăţi aceste inegalităţi, luând în considerare un tensor de curbură natural în context statistic, numit tensorul de curbură statistică, introdus de Opozda în [50]. Reamintim că o varietate statistică $(\overline{M}, \bar{g}, \overline{\nabla})$ este o varietate Riemann înzestrată cu o pereche de conexiuni afine fără torsiune $\bar{\nabla}$ şi $\bar{\nabla}^*$, astfel încât: $Z\bar{g}(X,Y) = \bar{g}(\overline{\nabla}_Z X, Y) + \bar{g}(X, \overline{\nabla}^*_Z Y)$, pentru orice $X, Y, Z \in \Gamma(T\overline{M})$.

Conexiunile $\overline{\nabla}$ şi $\overline{\nabla}^*$ sunt numite *conexiuni duale (conjugate)*. Dacă $\overline{\nabla}^\circ$ este conexiunea Levi-Civita a metricii $\bar{g}$, atunci conexiunea afină $\overline{\nabla}$ admite întotdeauna o conexiune duală $\overline{\nabla}^*$ ce satisface $\overline{\nabla} + \overline{\nabla}^* = 2\overline{\nabla}^\circ$. Fie $\overline{R}$ şi $\overline{R}^*$ tensorii de curbură pentru $\overline{\nabla}$, respectiv $\overline{\nabla}^*$. O structură statistică $(\overline{\nabla}, g)$ se spune că este de *curbură constantă* $c \in \mathbb{R}$ dacă

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\{\overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y\}, \forall X, Y, Z \in \Gamma(T\overline{M}).$$

Cu notaţiile precedente, definim *tensorul de curbură statistică* S prin [50]:

$$S(X,Y)Z = \frac{1}{2}\{R(X,Y)Z + R^*(X,Y)Z\}.$$

O varietate statistică $(\overline{M}, \bar{g}, \overline{\nabla})$ se numeşte formă spaţială statistică dacă S este dat prin:

$$S(X,Y)Z = c\{\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y\},$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y, Z pe $\overline{M}$, unde c este o constantă reală. Un astfel de spaţiu se notează prin $\overline{M}(c)$.

Pentru o subvarietate statistică M a unei varietăţi statistice $(\overline{M}, \bar{g}, \overline{\nabla})$, vom nota prin h şi h^* tensorii de scufundare statistică în raport cu conexiunile duale $\overline{\nabla}$ şi $\overline{\nabla}^*$, şi prin H şi H^* vectorii curbură medie corespunzători. Se verifică imediat că $2H^\circ = H + H^*$, unde H° este vectorul curbură medie pe M definit prin intermediul formei a doua fundamentale h° în raport cu conexiunea Levi-Civita ∇° pe M. Dacă $h^\circ = 0$, atunci M este total geodezică (în raport cu ∇°).

Am obţinut următoarea îmbunătăţire a inegalităţilor stabilite în [8] şi [40].

Teorema 4. [44] *Fie M^n o subvarietate statistică a unei forme spaţiale statistice $\overline{M}^m(c)$. Atunci:*

i. Curburile δ-Casorati normalizate $\delta_C(r, n-1)$ şi $\delta^*_C(r, n-1)$ satisfac

$$\rho \leq \frac{2\delta^\circ_C(r, n-1)}{n(n-1)} + \frac{C^0}{2(n-1)} - \frac{4n}{n-1}\|H^\circ\|^2 + \frac{2n}{n-1} g(H, H^*) + c, \tag{4}$$

unde $2\delta^0_C(r,n-1)=\delta_C(r,n-1)+\delta^*_C(r,n-1)$ *şi* $2C^0=\mathcal{C}+\mathcal{C}^*$.

ii.Curburile δ-Casorati normalizate $\hat{\delta}_C(r,n-1)$ şi $\hat{\delta}^*_C(r,n-1)$ satisfac

$$\rho\leq\frac{2\hat{\delta}^{\circ}_C(r,n-1)}{n(n-1)}+\frac{C^0}{2(n-1)}-\frac{4n}{n-1}\left\|H^{\circ}\right\|^2+\frac{2n}{n-1}g(H,H^*)+c, \tag{5}$$

unde $2\hat{\delta}^0_C(r,n-1)=\hat{\delta}_C(r,n-1)+\hat{\delta}^*_C(r,n-1)$.

Ca o consecinţă imediată a acestei teoreme, deducem următorul rezultat.

Corolarul 1. [44] *Fie M^n o subvarietate statistică a unei forme spaţiale statistice $\overline{M}^m(c)$. Atunci:*

i. Curburile δ-Casorati normalizate $\delta_C(n-1)$ şi $\delta^*_C(n-1)$ satisfac

$$\rho\leq 2\delta^{\circ}_C(n-1)+\frac{C^0}{2(n-1)}-\frac{4n}{n-1}\left\|H^{\circ}\right\|^2+\frac{2n}{n-1}g(H,H^*)+c. \tag{6}$$

unde $2\delta^0_C(n-1)=\delta_C(n-1)+\delta^*_C(n-1)$.

ii. Curburile δ-Casorati normalizate $\hat{\delta}_C(n-1)$ şi $\hat{\delta}^*_C(n-1)$ satisfac

$$\rho\leq 2\hat{\delta}^{\circ}_C(n-1)+\frac{C^0}{2(n-1)}-\frac{4n}{n-1}\left\|H^{\circ}\right\|^2+\frac{2n}{n-1}g(H,H^*)+c. \tag{7}$$

unde $2\hat{\delta}^0_C(n-1)=\hat{\delta}_C(n-1)+\hat{\delta}^*_C(n-1)$.

Investigând cazurile de egalitate ale inegalităţilor anterioare, am stabilit următoarele rezultate.

Teorema 5. [44] *Fie M^n o subvarietate statistică a unei forme spaţiale statistice $\overline{M}^m(c)$. Atunci cazul de egalitate al oricăreia dintre inegualităţile (4) şi (5) are loc într-un punct $x\in M$ dacă şi numai dacă tensorii de scufundare statistică h şi h^* satisfac în punctul x relaţia $h^*=-h$.*

Corolarul 2. [44] *Fie M^n o subvarietate statistică a unei forme spaţiale statistice $\overline{M}^m(c)$. Atunci cazul de egalitate al oricăreia dintre inegualităţile (4) şi (5) are loc în orice punct $x\in M$ dacă şi numai dacă M este o subvarietate total geodezică a lui $\overline{M}^m(c)$ în raport cu conexiunea Levi-Civita.*

Pentru a ilustra rezultatele, am construit un exemplu, după cum urmează.

Exemplul 4. [44] Considerăm $\mathbb{H}^{m+1}=\{(x_1,...,x_{m+1})\in\mathbb{R}^{m+1}|x_{m+1}>0\}$ echipat cu metrica naturală $\bar{g}=\frac{1}{(x_{m+1})^2}\sum_{i=1}^{m+1}(dx_i)^2$. Considerăm de asemenea conexiunea afină $\bar{\nabla}$ definită prin

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}=0,\ 1\leq i\neq j\leq m,\ \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}=\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}}\frac{\partial}{\partial x_i}=0,\ 1\leq i\leq m,$$

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{2}{x_{m+1}} \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}, \ 1 \leq i \leq m, \ \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}} \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} = \frac{1}{x_{m+1}} \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}.$$

Se ştie că $(\bar{\nabla}, \bar{g})$ este o structură statistică de curbură constantă 0 pe $\mathbb{H}^{m+1}$ (conform [30]). Rezultă că $(\bar{\nabla}^*, \bar{g})$ este de asemenea o structură statistică de curbură constantă 0 pe $\mathbb{H}^{m+1}$. Astfel concluzionăm că $\mathbb{H}^{m+1}$ este o formă spaţială statistică de curbură constantă 0. Considerăm acum imersia $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{H}^{m+1}$ definită prin $\iota(x_1, ..., x_{n+1}) = (0, \ldots, 0, x_1, ..., x_{n+1})$, unde $n < m$. Atunci se verifică uşor că ι este o imersie total geodezică ce ne furnizează un exemplu natural de subvarietate statistică ce satisface cazurile de egalitate ale tuturor inegalităţilor stabilite anterior, şi anume (4), (5), (6) şi (7).

În Capitolul 3, **Varietăţi statistice mixt 3-Sasaki şi submersii statistice**, al cărui conţinut se bazează pe [45], investigăm influenţa existenţei structurilor paracuaternionice şi a 3-structurilor mixte asupra geometriei varietăţilor statistice. Noţiunea de structură cuaternionică de speţa a doua, întâlnită în literatura de specialitate mai ales sub denumirea de structură paracuaternionică, a fost introdusă de Libermann în [37]. Proprietăţile fundamentale ale varietăţilor înzestrate cu astfel de structuri au fost stabilite în [31]. 3-structurile mixte reprezintă pandantul în dimensiune impară al structurilor cuaternionice de speţa a doua. Conceptul de 3-structură mixtă a apărut în mod natural în studiul hipersuprafeţelor luminoase ale varietăţilor paracuaternionice [35].

Am dedus mai întâi proprietăţile de bază ale varietăţilor statistice echipate cu astfel de structuri, concentrându-ne pe cazul varietăţilor statistice mixt 3-Sasaki şi paracuaternionice Kähler.

Teorema 6. [45] *Dacă $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ este o varietate cu o 3-structură mixtă statistică, atunci pentru orice câmpuri vectoriale X, Y şi Z pe M avem:*

$$(\nabla_X \omega_\alpha)(Y, Z) = g(Y, \nabla^*_X \varphi_\alpha Z - \varphi_\alpha \nabla_X Z) \tag{8}$$

şi

$$\nabla_X \varphi_\alpha Y - \varphi_\alpha \nabla^*_X Y = (\nabla^\circ_X \varphi_\alpha) Y + K_X \varphi_\alpha Y + \varphi_\alpha K_X Y, \tag{9}$$

pentru $\alpha = 1, 2, 3$, unde $\omega_\alpha(Y, Z) = g(Y, \varphi_\alpha Z)$ şi $K_X Y = \nabla_X Y - \nabla^\circ_X Y$.

Teorema 7. [45] *(i) O varietate cu o 3-structură mixtă statistică $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ este mixt 3-Sasaki dacă şi numai dacă:*

$$\nabla_X \varphi_\alpha Y - \varphi_\alpha \nabla^*_X Y = \tau_\alpha [g(X, Y)\xi_\alpha - \varepsilon_\alpha \eta_\alpha(Y) X] \tag{10}$$

şi

$$\nabla_X \xi_\alpha = \varepsilon_\alpha [g(\nabla_X \xi_\alpha, \xi_\alpha)\xi_\alpha - \varphi_\alpha X] \tag{11}$$

sau, echivalent, dacă şi numai dacă

$$\nabla^*_X \varphi_\alpha Y - \varphi_\alpha \nabla_X Y = \tau_\alpha [g(X,Y)\xi_\alpha - \varepsilon_\alpha \eta_\alpha(Y)X] \tag{12}$$

şi

$$\nabla^*_X \xi_\alpha = \varepsilon_\alpha [g(\nabla^*_X \xi_\alpha, \xi_\alpha]\xi_\alpha - \varphi_\alpha X), \tag{13}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X şi Y pe M.
(ii) O varietate cu o 3-structură mixtă statistică $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ este mixt 3-cosimplectică dacă şi numai dacă:

$$\nabla_X \varphi_\alpha Y = \varphi_\alpha \nabla^*_X Y \tag{14}$$

sau, echivalent, dacă şi numai dacă

$$\nabla^*_X \varphi_\alpha Y = \varphi_\alpha \nabla_X Y \tag{15}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X şi Y pe M.

Teorema 8. [45] *Fie (M, ∇, σ, g) o varietate statistică paracuaternionică de tip aproape Hermitian. Atunci (M, ∇, σ, g) este o varietate statistică de tip paracuaternionic Kähler dacă şi numai dacă $(M, \nabla^*, \sigma^*, g)$ este o varietate statistică de acelaşi tip.*

Teorema 9. [45] *Fie (M, ∇, σ, g) o varietate statistică paracuaternionică de tip aproape Hermitian. Atunci (M, ∇, σ, g) este o varietate statistică de tip parahiper-Kähler dacă şi numai dacă $(M, \nabla^*, \sigma^*, g)$ este o varietate statistică de tip parahiper-Kähler.*

Exemplul 5. [45] Fie (M, ∇, P, g) o varietate de tip aproape para-Hermitian (pentru exemple de astfel de varietăţi, a se vedea [64, Secţiunea 5]). În continuare vom arăta că fibratul tangent TM al lui M poate fi înzestrat cu o structură statistică paracuaternionică de tip aproape Hermitian. Mai întâi, remarcăm că TM poate fi echipat cu o metrică de tip Sasaki, definită prin: $G(A, B) = g(kA, kB) + g(\pi_* A, \pi_* B)$, unde A, B sunt câmpuri vectoriale pe TM, $\pi : TM \to M$ este proiecţia canonică, iar k este aplicaţia de conexiune asociată conexiunii Levi-Civita a metricii g. Notăm de asemenea că dacă $X \in \Gamma(TM)$, atunci există un unic câmp vectorial pe TM, notat X^h şi numit liftul orizontal al lui X, şi un unic câmp vectorial pe TM notat X^v şi numit liftul vertical al lui X, astfel încât pentru orice $U \in TM$ avem: $\pi_* X^h_U = X_{\pi(U)}$, $\pi_* X^v_U = 0_{\pi(U)}$, $kX^h_U = 0_{\pi(U)}$, $kX^v_U = X_{\pi(U)}$. Reamintim acum că, în conformitate cu Teorema 3.1 din [34], se poate defini o conexiune liniară fără torsiune ∇' pe TM compatibilă cu G. Prin urmare, rezultă că (TM, ∇', G)

este o varietate statistică. Utilizând acum structura aproape produs P pe M, putem defini trei câmpuri tensoriale $\{J_1, J_2, J_3\}$ pe TM astfel:

$$\begin{cases} J_3X^h = X^v \\ J_3X^v = -X^h \end{cases}, \quad \begin{cases} J_2X^h = (\varphi X)^v \\ J_2X^v = (\varphi X)^h \end{cases}, \quad \begin{cases} J_1X^h = -(\varphi X)^h \\ J_1X^v = (\varphi X)^v \end{cases}.$$

Prin calcul direct se verifică faptul că $H = (\{J_1, J_2, J_3\})$ este o structură aproape para-hipercomplexă pe TM. Mai mult, considerând 3-subfibratul σ generat de H, rezultă imediat că (TM, ∇', σ, G) este o varietate statistică paracuaternionică de tip aproape Hermitian. În plus, obţinem de asemenea că (TM, ∇', σ, G) este o varietate statistică de tip parahiper-Kähler, dacă (M, ∇, P, g) este o varietate statistică de tip para-Kähler plată.

Următoarea parte a capitolului investighează submersiile statistice având spaţiul total o varietate statistică mixt 3-Sasaki, respectiv o varietate statistică de tip paraquaternionic Kähler.

Definiţia 2. [58] *Dacă (M, ∇, g) şi (N, ∇^N, g_N) sunt varietăţi statistice, atunci o submersie semi-Riemann $\pi : M \to N$ se numeşte* submersie statistică *dacă $\pi_*(\nabla_X Y)_p = ({\nabla^N}_{X'} Y')_{\pi(p)}$ pentru toate câmpurile vectoriale bazice X, Y pe M care sunt π-corelate cu X' şi Y' pe N, pentru orice $p \in M$.*

Reamintim că vectorii tangenţi la fibrele unei submersii statistice $\pi : M \to N$ sunt numiţi *verticali*, iar vectorii normali la fibre se numesc *orizontali*. Vom nota prin $\mathcal{V}$ distribuţia verticală, prin $\mathcal{H}$ distribuţia orizontală, iar prin v şi h proiecţiile pe $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{H}$ (proiecţia verticală şi proiecţia orizontală). Un câmp vectorial orizontal X pe M este *bazic*, dacă X este π-corelat cu un câmp vectorial X' pe N. Este evident că orice câmp vectorial X' pe N admite un unic lift orizontal X pe M şi X este bazic.

Dacă $\pi : M \to N$ este o submersie statistică, atunci se ştie că orice fibră admite o structură statistică naturală [58]. Aşadar, orice fibră este o varietate statistică. Conexiunile afine induse pe fibre de către conexiunile duale ∇ and ∇^* de pe M sunt notate prin $\widehat{\nabla}$ şi $\widehat{\nabla}^*$. Remarcaăm că $\widehat{\nabla}$ şi $\widehat{\nabla}^*$ sunt conexiuni afine fără torsiune şi sunt duale în raport cu metrica indusă pe fibre.

Pentru o submersie statistică $\pi : M \to N$ este de asemenea posibil să definim ca în cazul submersiilor semi-Riemann, tensorii lui O'Neill T şi A prin

$$T(E, F) = T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF,\ \ A(E, F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF,$$

unde $E, F \in \Gamma(TM)$. În mod similar, putem considera tensorii lui O'Neill T^* şi A^* pe M punând ∇^* în locul lui ∇ în ecuaţiile precedente. Dacă $T_U V = 0$, pentru toate câmpurile vectoriale verticale U şi V pe M, atunci π se spune că are *fibre izometrice* [57].

Definiţia 3. [45] *Fie* $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ *o varietate cu o 3-structură mixtă statistică şi* (N, ∇^N, g_N) *o varietate statistică. Atunci o submersie statistică* $\pi : M \to N$ *se numeşte*

(i) invariantă *dacă* $\varphi_\alpha(Ker\pi_*) \subset Ker\pi_*$*, pentru* $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

(ii) anti-invariantă *dacă* $\varphi_\alpha(Ker\pi_*) \subset (Ker\pi_*)^\perp$*, pentru* $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

Teorema 10. [45] *Fie* $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ *o varietate cu o 3-structură mixtă statistică şi* (N, ∇^N, g_N) *o varietate statistică. Dacă* $\pi : M \to N$ *este o submersie statistică anti-invariantă, atunci câmpurile vectoriale de structură* ξ_1, ξ_2 *şi* ξ_3 *nu pot fi toate verticale.*

Teorema 11. [45] *Fie* $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ *o varietate statistică mixt 3-Sasaki şi* (N, ∇^N, g_N) *o varietate statistică. Dacă* $\pi : M \to N$ *este o submersie statistică astfel încât câmpurile vectoriale de structură* ξ_1, ξ_2 *şi* ξ_3 *sunt toate orizontale, atunci* π *este anti-invariantă.*

Teorema 12. [45] *Fie* $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ *o varietate cu o 3-structură mixtă statistică şi* (N, ∇^N, g_N) *o varietate statistică. Dacă* $\pi : M \to N$ *este o submersie statistică invariantă, atunci câmpurile vectoriale de structură* ξ_1, ξ_2 *şi* ξ_3 *sunt toate fie verticale, fie orizontale.*

Teorema 13. [45] *Fie* $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ *o varietate statistică mixt 3-Sasaki (respectiv o varietate statistică mixt 3-cosimplectică) şi* (N, ∇^N, g_N) *o varietate statistică. Dacă* $\pi : M \to N$ *este o submersie statistică invariantă astfel încât câmpurile vectoriale de structură* ξ_1, ξ_2 *şi* ξ_3 *sunt verticale, atunci orice fibră a submersiei este o varietate statistică mixt 3-Sasaki (respectiv o varietate statistică mixt 3-cosimplectică)*

Teorema 14. [45] *Fie* $(M, \nabla, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ *o varietate statistică mixt 3-Sasaki sau mixt 3-cosimplectică şi* (N, ∇^N, g_N) *o varietate statistică. Dacă* $\pi : M \to N$ *este o submersie statistică invariantă astfel încât câmpurile vectoriale de structură* ξ_1, ξ_2 *şi* ξ_3 *sunt verticale, atunci* π *este o submersie statistică având fibrele izometrice.*

Teorema 15. [45] *Fie* $\pi : M \to M'$ *o submersie statistică de tip paracuaternionic Kähler. Atunci:*
(i) *Fibrele şi baza lui* π *sunt varietăţi statistice de tip paracuaternionic Kähler.*
(ii) π *este o submersie statistică având fibrele izometrice.*

Ca o consecinţă imediată a teoremei precedente, avem următorul rezultat.

Corolarul 3. [45] *Fie $\pi : M \to M'$ o submersie statistică de tip parahiper-Kähler. Atunci fibrele şi baza lui π sunt varietăţi statistice de tip parahiper-Kähler. În plus, π are fibrele izometrice.*

Capitolul se încheie cu un exemplu ilustrativ.

Exemplul 6. [45] Dacă (M, ∇, σ, g) este o varietate statistică paracuaternionică de tip aproape Hermitian, atunci se ştie că fibratul tangent TM echipat cu metrica Sasaki G poate fi înzestrat cu o conexiune liniară ∇', astfel încât (TM, ∇', G) este o varietate statistică (a se vedea [34]). Mai mult decât atât, putem defini pentru orice bază locală canonică $\{J_1, J_2, J_3\}$ a lui σ următoarele câmpuri tensoriale pe TM: $J'_\alpha X^h = (J_\alpha X)^h$, $J'_\alpha X^v = (J_\alpha X)^v$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Dacă $\sigma' = Span\{J'_1, J'_2, J'_3\}$, atunci se verifică uşor că $(TM, \nabla', \sigma', g')$ este o varietate statistică paracuaternionică de tip aproape Hermitian şi proiecţia canonică $\pi : TM \to M$ ne furnizează un exemplu netrivial de submersie statistică paracuaternionică de tip de tip aproape Hermitian. În plus, π este o submersie statistică de tip parahiper-Kähler cu fibre izometrice, dacă (M, ∇, σ, g) este plată.

În Capitolul 4, **Stabilitatea T-formelor spaţiale**, al cărui conţinut se bazează pe [46], vom investiga stabilitatea T-varietăţilor compacte de curbură ϕ-secţională constantă, adică T-formelor spaţiale compacte. În ciuda simplităţii funcţiei identitate, studiul stabilităţii acesteia este un subiect dificil şi intrigant, deoarece a doua variaţie a acestei aplicaţii este dificil de analizat şi, în general, necesită o interacţiune de tehnici (a se vedea [32, 55]).

În primul rezultat principal al capitolului, folosind a doua formulă de variaţie pentru funcţia identitate 1_M a unei T-forme spaţiale compacte M, găsim condiţia în care această funcţie este stabilă. Astfel, am demonstrat următorul rezultat.

Teorema 16. [46] *Orice T-formă spaţială compactă M de curbură ϕ-secţională constantă $c \geq 0$ este stabilă.*

Din Teorema 16 putem deduce ca şi corolarii că aplicaţia identitate a oricărei forme spaţiale complexe $M(c)$ este stabilă, precum şi aplicaţia identitate a oricărei forme spaţiale cosimplectice $M(c)$ este stabilă, în ipoteza că $c \geq 0$. Am dori să subliniem că aceste rezultate nu sunt la fel de generale ca cele cunoscute în literatură pentru varietăţile Kähler şi cosimplectice (aceste varietăţi fiind cunoscute a fi stabile în ipoteze de compacitate - a se vedea [10, 11]), dar ne arată că T-varietăţile reprezintă o familie mult mai interesantă din punctul de vedere al geometriei aplicaţiei identitate, deoarece există posibilitatea ca aceste varietăţi să fie instabile.

În cel de-al doilea rezultat principal al acestui capitol, folosind formula Weitzenböck, demonstrăm că o T-formă spaţială compactă $(2n+s)$-dimensională, de curbură ϕ-secţională constantă $c \leq 0$, este instabilă, dacă prima valoare proprie a operatorului Laplace-Beltrami are o limită superioară în funcţie de n şi c, după cum urmează.

Teorema 17. [46] *Fie M o T-formă spaţială compactă $(2n+s)$-dimensională având curbură ϕ-secţională constantă $c \leq 0$. Dacă prima valoare proprie λ_1 a operatorului Laplace-Beltrami satisface $\lambda_1 < -c(n+1)$, atunci 1_M este instabilă.*

În Capitolul 5, intitulat **Asupra minimalităţii izocuantelor hipersuprafeţelor de producţie**, şi al cărui conţinut se bazează pe [47], este investigată geometria izocuantelor unei funcţii de producţie f cu un număr arbitrar de factori de producţie n, acestea fiind un concept cheie folosit în luarea celei mai bune decizii pentru optimizarea costurilor de producţie. O *izocuantă* reprezintă mulţimea tuturor combinaţiilor posibile de inputuri $(x_1, ..., x_n)$ utilizate într-un proces de producţie ce conduc la un nivel specificat al outputului f^*. O astfel de izocuantă se notează prin $\mathcal{H}_{f^*}$ şi se mai numeşte *mulţimea de nivel* f^* a funcţiei de producţie f. Se ştie că orice funcţie de producţie f cu n inputuri poate fi identificată cu o hipersuprafaţa $\mathcal{H}$ a spaţiului euclidian $(n+1)$-dimensional $\mathbb{E}^{n+1}$, ce este definită prin [62]

$$\mathcal{H} = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D\}. \tag{16}$$

Prin această identificare, proprietăţile modelelor de producţie pot fi reinterpretate în funcţie de geometria hipersuprafeţelor grafice asociate (numite *hipersuprafeţe de producţie*) [19, 62]. Studiul întreprins în acest capitol este axat pe izocuantele hipersuprafeţelor corespunzătoare modelelor de producţie de tip cvasi-produs cu n inputuri. Reamintim că o funcţie de producţie f se numeşte *cvasi-produs* dacă este exprimată ca [1]

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right), \tag{17}$$

unde g_i $(i = 1, \ldots, n)$ şi F sunt funcţii continue, pozitive şi strict monotone. În cazul particular în care F este aplicaţia identitate, funcţia de producţie f dată anterior se spune că este o *funcţie de producţie produs* sau o *funcţie de producţie factorizabilă*. Ca exemple particulare importante de astfel de modele de producţie, avem celebrele funcţii de producţie Cobb-Douglas, CES, transcendental şi Mitscherlich-Spillman (a se vedea [1, 28, 42] pentru detalii).

În rezultatul principal al acestui capitol, obţinem clasificarea completă a funcţiilor de producţie cvasi-produs ale căror izocuante sunt minimale, arătând că există exact 9 modele de producţie cu o astfel de proprietate, după cum urmează.

Teorema 18. [47] *Presupunem că* $D \subset \mathbb{R}^n$ *este un domeniu deschis şi fie* $f : D \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de producţie de tip quasi-produs dată prin* (17)*, unde* $F, g_1, \ldots, g_n$ *sunt funcţii de două ori diferenţiabile. Atunci* f *are izocuante minimale dacă şi numai dacă, modulo o translaţie,* f *se reduce la una din următoarele funcţii:*

(*a*)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (\beta_i x_i + \gamma_i) g_n(x_n) + \beta,$$

unde $\alpha, \beta, \beta_i, \gamma_i$ *sunt constante reale cu* $\alpha \neq 0$ *şi* $\beta_i \neq 0$ *pentru* $i = 1, \ldots, n$*, astfel încât* $f > 0$ *pe* D*.*

(*b*)

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \alpha \prod_{i=1}^{j} \left(C_{1i} e^{x_i \sqrt{A_i}} + C_{2i} e^{-x_i \sqrt{A_i}} \right) \\ &\times \prod_{i=j+1}^{n-1} \left[C_{1i} \cos\left(x_i \sqrt{-A_i} \right) + C_{2i} \sin\left(x_i \sqrt{-A_i} \right) \right] \\ &\times g_n(x_n) + \beta, \end{aligned}$$

unde j *este orice număr din mulţimea* $\{1, \ldots, n-2\}$*,* $\alpha, \beta, A_i, C_{1i}, C_{2i}$ *sunt constante reale cu* $A_1, \ldots, A_j > 0$*,* $A_{j+1}, \ldots, A_{n-1} < 0$ *şi* $\sum_{i=1}^{n-1} A_i = 0$*, astfel încât* $f > 0$ *pe* D*.*

(*c*)

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \alpha \prod_{i=1}^{r} (\beta_i x_i + \gamma_i) \prod_{i=r+1}^{s} \left(C_{1i} e^{x_i \sqrt{A_i}} + C_{2i} e^{-x_i \sqrt{A_i}} \right) \\ &\times \prod_{i=s+1}^{n-1} \left[C_{1i} \cos\left(x_i \sqrt{-A_i} \right) + C_{2i} \sin\left(x_i \sqrt{-A_i} \right) \right] \\ &\times g_n(x_n) + \beta, \end{aligned}$$

unde r *este orice număr din mulţimea* $\{1, \ldots, n-3\}$*,* s *este orice număr din mulţimea* $\{r+1, \ldots, n-2\}$*, în timp ce* $\alpha, \beta, \beta_i, \gamma_i, A_i, C_{1i}, C_{2i}$ *sunt constante reale cu* $A_{r+1}, \ldots, A_s > 0$*,* $A_{s+1}, \ldots, A_{n-1} < 0$ *şi* $\sum_{i=r+1}^{n-1} A_i = 0$*, astfel încât* $f > 0$ *pe* D*.*

(*d*)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = b \ln \left[A \prod_{i=1}^{n-1} e^{A x_i^2/2 + \alpha_i x_i} g_n(x_n) \right] + a,$$

unde a, b, A, α_i *sunt constante reale cu* $A \neq 0$*,* $b \neq 0$ *şi* $\sum_{i=1}^{n-1} A_i = 0$*, astfel încât* f *este bine definită şi strict pozitivă pe* D*.*

(e)

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{A}{\alpha+1}\prod_{i=1}^{n-1}\big[(1+\alpha)x_i-\alpha_i\big]\times[g_n(x_n)]^{\alpha+1}+a,$$

unde A,α,a,α_i *sunt constante reale cu* $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq -1$ *şi* $A\neq 0$ *astfel încât* $f>0$ *pe* D.

(f)

$$\begin{aligned}f(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{A}{\alpha+1}\prod_{i=1}^{j}\left[\left(\alpha_i^{2\sqrt{\frac{A_i}{1+\alpha}}}e^{-2\sqrt{A_i(1+\alpha)}x_i}-1\right)e^{\sqrt{A_i(1+\alpha)}x_i}\right]\\ &\quad\times\prod_{i=j+1}^{n-1}\cos\left(\sqrt{-\frac{A_i}{1+\alpha}}[-(1+\alpha)x_i+\beta_i]\right)\times[g_n(x_n)]^{\alpha+1}+a,\end{aligned}$$

unde A,α,a,β_i,A_i *sunt constante reale cu* $\alpha\neq 0$, $\alpha>-1$, $A\neq 0$, $A_i>0$ *pentru* $i=1,\ldots,j$, $A_i<0$ *pentru* $i=j+1,\ldots,n-1$ *şi* $\sum_{i=1}^{n-1}A_i=0$, *astfel încât* $f>0$ *pe* D.

(g)

$$\begin{aligned}f(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{A}{\alpha+1}\prod_{i=1}^{j}\frac{e^{\sqrt{A_i(1+\alpha)}x_i}}{\alpha_i^{2\sqrt{\frac{A_i}{1+\alpha}}}e^{-2\sqrt{A_i(1+\alpha)}x_i}-1}\\ &\quad\times\prod_{i=j+1}^{n-1}\cos\left(\sqrt{-\frac{A_i}{1+\alpha}}[-(1+\alpha)x_i+\beta_i]\right)\times[g_n(x_n)]^{\alpha+1}+a,\end{aligned}$$

unde A,α,a,β_i,A_i *sunt constante reale cu* $\alpha<-1$, $A\neq 0$, $A_i<0$ *pentru* $i=1,\ldots,j$, $A_i>0$ *pentru* $i=j+1,\ldots,n-1$ *şi* $\sum_{i=1}^{n-1}A_i=0$, *astfel încât* $f>0$ *on* D.

(h)

$$\begin{aligned}f(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{A}{\alpha+1}\prod_{i=1}^{j}\big[(1+\alpha)x_i-\alpha_i\big]\\ &\quad\times\prod_{i=j+1}^{r}\left[\left(\alpha_i^{2\sqrt{\frac{A_i}{1+\alpha}}}e^{-2\sqrt{A_i(1+\alpha)}x_i}-1\right)e^{\sqrt{A_i(1+\alpha)}x_i}\right]\\ &\quad\times\prod_{i=r+1}^{n-1}\cos\left(\sqrt{-\frac{A_i}{1+\alpha}}[-(1+\alpha)x_i+\beta_i]\right)\times[g_n(x_n)]^{\alpha+1}+b,\end{aligned}$$

unde $A,\alpha,a,\alpha_i,\beta_i,A_i$ *sunt constante reale cu* $\alpha\neq 0$, $\alpha>-1$, $A\neq 0$, $A_i>0$ *pentru* $i=j+1,\ldots,r$, $A_i<0$ *pentru* $i=r+1,\ldots,n-1$ *şi* $\sum_{i=j+1}^{n-1}A_i=0$, *astfel încât* $f>0$ *pe* D.

(i)

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{A}{\alpha+1}\prod_{i=1}^{j}\left[(1+\alpha)x_i-\alpha_i\right]\times\prod_{i=j+1}^{r}\frac{e^{\sqrt{A_i(1+\alpha)}x_i}}{\alpha_i^{2\sqrt{\frac{A_i}{1+\alpha}}}e^{-2\sqrt{A_i(1+\alpha)}x_i}-1}\\
&\quad\times\prod_{i=r+1}^{n-1}\cos\left(\sqrt{-\frac{A_i}{1+\alpha}}[-(1+\alpha)x_i+\beta_i]\right)\times[g_n(x_n)]^{\alpha+1}+b,
\end{aligned}
$$

unde $A,\alpha,a,\alpha_i,\beta_i,A_i$ sunt constante reale cu $\alpha<-1$, $A\neq 0$, $A_i<0$ pentru $i=j+1,\ldots,r$, $A_i>0$ pentru $i=r+1,\ldots,n-1$ şi $\sum_{i=j+1}^{n-1}A_i=0$, astfel încât $f>0$ pe D.

Aplicând Teorema 18 pentru funcţii de producţie produs, găsim următorul rezultat.

Corolarul 4. [47] *Fie $D\subset\mathbb{R}^n$ un domeniu deschis şi fie $f:D\to\mathbb{R}_+$ o funcţie de producţie produs dată prin $f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}g_i(x_i)$, unde $g_1,\ldots,g_n$ sunt funcţii de două ori diferenţiabile. Atunci f are izocuante minimale dacă şi numai dacă, modulo o translaţie, f se reduce la una din următoarele funcţii:*

(a)

$$
f(x_1,\ldots,x_n)=\alpha\prod_{i=1}^{n-1}(\beta_i x_i+\gamma_i)g_n(x_n),
$$

unde $\alpha,\beta_i,\gamma_i\in\mathbb{R}$ cu $\alpha\neq 0$ şi $\beta_i\neq 0$ pentru $i=1,\ldots,n$, astfel încât $f>0$ pe D.

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n) &= \alpha\prod_{i=1}^{j}\left(C_{1i}e^{x_i\sqrt{A_i}}+C_{2i}e^{-x_i\sqrt{A_i}}\right)\\
&\quad\times\prod_{i=j+1}^{n-1}\left[C_{1i}\cos\left(x_i\sqrt{-A_i}\right)+C_{2i}\sin\left(x_i\sqrt{-A_i}\right)\right]\times g_n(x_n),
\end{aligned}
$$

unde j este orice număr din mulţimea $\{1,\ldots,n-2\}$, unde $\alpha,A_i,C_{1i},C_{2i}\in\mathbb{R}$ cu $A_1,\ldots,A_j>0$, $A_{j+1},\ldots,A_{n-1}<0$ şi $\sum_{i=1}^{n-1}A_i=0$, astfel încât $f>0$ pe D.

(c)

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n) &= \alpha\prod_{i=1}^{r}(\beta_i x_i+\gamma_i)\times\prod_{i=r+1}^{s}\left(C_{1i}e^{x_i\sqrt{A_i}}+C_{2i}e^{-x_i\sqrt{A_i}}\right)\\
&\quad\times\prod_{i=s+1}^{n-1}\left[C_{1i}\cos\left(x_i\sqrt{-A_i}\right)+C_{2i}\sin\left(x_i\sqrt{-A_i}\right)\right]\times g_n(x_n),
\end{aligned}
$$

unde r este orice număr din mulţimea $\{1,\ldots,n-3\}$, s este orice număr din mulţimea $\{r+1,\ldots,n-2\}$, în timp ce $\alpha,\beta_i,\gamma_i,A_i,C_{1i},C_{2i}\in\mathbb{R}$ cu $A_{r+1},\ldots,A_s>0$, $A_{s+1},\ldots,A_{n-1}<0$ şi $\sum_{i=r+1}^{n-1}A_i=0$, astfel încât $f>0$ pe D.

Bibliografie

1. H. Alodan, B.-Y. Chen, S. Deshmukh and G.-E. Vîlcu, On some geometric properties of quasi-product production models, J. Math. Anal. Appl. 474(1)(2019), 693-711.

2. H. Alodan, B.-Y. Chen, S. Deshmukh and G.-E. Vîlcu, Solution of the system of nonlinear PDEs characterizing CES property under quasi-homogeneity conditions, Adv. Differ. Equ. (2021), 257.

3. S. Amari, Differential-Geometrical Methods in Statistics, Springer, New-York, 1985.

4. M. Aquib, J. W. Lee, G.-E. Vîlcu and D. W. Yoon, Classification of Casorati ideal Lagrangian submanifolds in complex space forms, Differ. Geom. Appl., 63(2019), 30-49.

5. M. Aquib, M.S. Lone, **C.D. Neacşu** and G.-E. Vîlcu, On δ-Casorati curvature invariants of Lagrangian submanifolds in quaternionic Kähler manifolds of constant q-sectional curvature, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat., 117 (2023), 107.

6. M.E. Aydin and M. Ergüt, Composite functions with Allen determinants and their applications to production models in economics, Tamkang J. Math. 45(4)(2014), 427-435.

7. M.E. Aydin and A. Mihai, Classification of quasi-sum production functions with Allen determinants, Filomat 29(6)(2015), 1351-1359.

8. P. Bansal, M. H. Shahid and M. A. Lone, Geometric bounds for δ–Casorati curvature in statistical submanifolds of statistical space forms, Balk. J. Geom. Appl., No. 1, 24(2019), 1-11.

9. D.E. Blair, Geometry of manifolds with structural group $U(n)\times O(s)$, J. Differential Geometry 4(1970), 155–167.

10. E. Boeckx and C. Gherghe, Harmonic maps and cosymplectic manifolds, J. Aust. Math. Soc., No.1, 76(2004), 75–92.

11. D. Burns, F. Burstall, P. De Bartolomeis and J. Rawnsley, Stability of harmonic maps of Kähler manifolds, J. Differential Geom., No. 2, 30(1989), 579–594.

12. A. Caldarella, On paraquaternionic submersions between paraquaternionic Kähler manifolds, Acta Appl. Math. 112(1)(2010), 1-14.

13. A. Caldarella and A.M. Pastore, Mixed 3-Sasakian structures and curvature, Ann. Polon. Math. 96(2009), 107-125.

14. G. Calvaruso and D. Perrone, Metrics of Kaluza-Klein type on the anti-de Sitter space $\mathbb{H}_1^3$, Math. Nachr. 287(8-9)(2014), 885-902.

15. F. Casorati, Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune, Acta Math. 14, 1(1890), 95.

16. B.-Y. Chen, Totally umbilical submanifolds of quaternion-space-forms, J. Aust. Math. Soc. 26, 2(1978), 154–162.

17. B.-Y. Chen, Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds, Arch. Math. 60, 6(1993), 568–578.

18. B.-Y. Chen, Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications, World Scientific, Hackensack, NJ(2011).

19. B.-Y. Chen, Solutions to homogeneous Monge-Ampère equations of homothetic functions and their applications to production models in economics, J. Math. Anal. Appl. 411(2014), 223-229.

20. B.-Y. Chen, On some geometric properties of quasi-sum production models, J. Math. Anal. Appl. 392(2)(2012), 192-199.

21. B.-Y. Chen, Recent developments in δ-Casorati curvature invariants, Turk. J. Math. 45(2021), 1-46.

22. B.-Y. Chen and G.-E. Vîlcu, Geometric classifications of homogeneous production functions, Appl. Math. Comput. 225(2013), 345-351.

23. S. Decu, S. Haesen and L. Verstraelen, Optimal inequalities involving Casorati curvatures, Bull. Transilv. Univ. Brasov Ser. B (NS) 14, 49(2007), 85–93.

24. S. Decu, S. Haesen and L. Verstraelen, Optimal inequalities characterising quasi-umbilical submanifolds, J. Inequal. Pure Appl. Math 9, 3(2008), 79.

25. M. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1976).

26. Y. Du, Y. Fu and X. Wang, On the minimality of quasi-sum production models in microeconomics, Math. Met. Appl. Sc. 46(12)(2022), 7607-7630.

27. T. Fei and J. Zhang, Interaction of Codazzi couplings with (para-)Kähler geometry, Results Math, 72(2017), 2037–2056.

28. Y. Fu and W.G. Wang, Geometric characterizations of quasi-product production models in economics, Filomat 31(6)(2017), 1601-1609.

29. S. Funabashi, Totally complex submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifold, Kodai Math. J. 2, 3(1979), 314–336.

30. H. Furuhata, Hypersurfaces in Statistical Manifolds, Differential Geom. Appl. 27(2009), 420–429.

31. E. Garcia-Rio, Y. Matsushita and R. Vazquez-Lorenzo, Paraquaternionic Kähler manifolds, Rocky Mt. J. Math. 31(1)(2001), 237-260.

32. C. Gherghe, S. Ianus and A.M. Pastore, CR-manifolds, harmonic maps and stability, J. Geom., No. 1–2, 71(2001), 42–53.

33. C. Gherghe and G.-E. Vîlcu, Harmonic maps on locally conformal almost cosymplectic manifolds, Commun. Contemp. Math. (2023), in press; DOI: 10.1142/S0219199723500529.

34. L. Ianuş, Statistical manifolds and tangent bundles, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. D Mech. Engrg. 56-57(1-4)(1994 -95), 29-33.

35. S. Ianuş, R. Mazzocco and G.-E. Vîlcu, Real lightlike hypersurfaces of paraquaternionic Kähler manifolds, Mediterr. J. Math. 3(2006), 581-592.

36. S. Ianuş, L. Ornea and G.-E. Vîlcu, Submanifolds in manifolds with metric mixed 3-structures, Mediterr. J. Math. 9(1)(2012), 105-128.

37. P. Libermann, Sur les structures presque quaternioniennes de deuxième espéce, C.R. Acad. Sc. Paris 234(1952), 1030-1032.

38. J.W. Lee, C.W. Lee and G.-E. Vîlcu, Classification of Casorati ideal Legendrian submanifolds in Sasakian space forms, J. Geom. Phys. 155(2020), 103768.

39. J.W. Lee, C.W. Lee and G.-E. Vîlcu, Classification of Casorati ideal Legendrian submanifolds in Sasakian space forms II, J. Geom. Phys. 171(2021), 104410.

40. C.W. Lee, D.W. Yoon and J.W. Lee, A pinching theorem for statistical manifolds with Casorati curvatures, J. Nonlin. Sc. Appl., 10(2017), 4908–4914.

41. P. Lloyd, The discovery of the isoquant, Hist. Political Econ. 44(4)(2012), 643-661.

42. Y. Luo and X. Wang, Some extrinsic geometric characterizations of quasi-product production functions in microeconomics, J. Math. Anal. Appl. 530(1)(2024), 127675.

43. S. Marchiafava, Submanifolds of (para)-quaternionic Kähler manifolds, Note Mat. 28, suppl. 1(2008), 295-316.

44. **C.D. Neacşu**, On some optimal inequalities for statistical submanifolds of statistical space forms. Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. 85(2023), 107-118.

45. **C.D. Neacşu**, Mixed 3-Sasakian statistical manifolds and statistical submersions. In: Rovenski, V., Walczak, P., Wolak, R. (eds) Differential Geometric Structures and Applications. IWDG 2023. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 440, Chapter 5, 89-115, Springer, Cham (2024).

46. **C.D. Neacşu**, On the stability of T-space forms, J. Geom. Phys. 199 (2024), 105162.

47. **C.D. Neacşu**, N.B. Turki and G.-E. Vîlcu, Classification of quasi-product production models with minimal isoquants, Math. Methods Appl. Sci. (2024); https://doi.org/10.1002/mma.9988.

48. T. Noda, Symplectic structures on statistical manifolds, J. Aust. Math. Soc. 90 (2011), 371-384.

49. Y. M. Oh and J. H. Kang, Lagrangian H-umbilical submanifolds in quaternion Euclidean spaces, Tsukuba J. Math. 29, 1(2005), 233–245.

50. B. Opozda, Bochner's technique for statistical manifolds, Ann. Glob. Anal. Geom., 48(2015), 357-395.

51. D. Perrone and L. Vergori, Stability of contact metric manifolds and unit vector fields of minimum energy, Bull. Austral. Math. Soc., No. 2, 76(2007), 269–283.

52. N.A. Rehman, Stability on generalized Sasakian space forms, Math. Rep., No.1, 17(67)(2015), 57–64.

53. R. Schimming and T. Hirschmann, Harmonic maps from spacetimes and their coupling to gravitation, Astron. Nachr., No. 5, 309(1998), 311–321.

54. R.W. Shepard, Theory of cost and production functions, Princeton University Press (1970).

55. R.T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 47(1975), 229–236.

56. B. Şahin, Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry, and their applications, Elsevier/Academic Press, London (2017).

57. K. Takano, Statistical manifolds with almost complex structures and its statistical submersions, Tensor, N.S. 65(2004), 128-142.

58. K. Takano, Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions, J. Geom. 85(2006), 171–187.

59. M. Tekkoyun, Mechanical Systems on Manifolds, Differential Geometry - Dynamical Systems Monographs, Geometry Balkan Press, Vol. 11, (2014).

60. A.-D. Vîlcu and G.-E. Vîlcu, On some geometric properties of the generalized CES production functions, Appl. Math. Comput. 218(1)(2011), 124-129.

61. A.-D. Vîlcu and G.-E. Vîlcu, Some characterizations of the quasi-sum production models with proportional marginal rate of substitution, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 353(2015), 1129-1133.

62. G.-E. Vîlcu, A geometric perspective on the generalized Cobb-Douglas production functions, Appl. Math. Lett. 24(5)(2011), 777-783.

63. G.-E. Vîlcu, An optimal inequality for Lagrangian submanifolds in complex space forms involving Casorati curvature, J. Math. Anal. Appl. 465, 2(2018), 1209–1222.

64. G.-E. Vîlcu, Almost product structures on statistical manifolds and para-Kähler-like statistical submersions, Bull. Sci. Math. 171(2021), 1-21.