

**Universitatea Națională de Știință și Tehnologie Politehnica
București**

**Facultatea de Ingineria Sistemelor Biotehnice
Departamentul de Mecanică “Radu P. Voinea”**

TEZA DE ABILITARE

**Formulări matriceale în studiul vibrațiilor mediilor
continue unidimensionale**

REZUMAT

Autor

Prof.dr.ing. Mihail BOIANGIU

BUCUREȘTI

2021

CUPRINS

Cuvânt înainte	3
Capitolul 3. Studiu, bazat pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile de încovoiere ale mediilor continue unidimensionale cu secțiune constantă	4
3.1. Prezentarea metodei	4
3.2. Aplicarea metodei în cazul unor sisteme de bare	10
3.3. Aplicarea metodei matricelor de transfer în cazul barelor curbe	18
3.4. Aplicarea metodei matricelor de transfer în cazul barelor drepte cu secțiune variabilă	21
3.5. Aplicarea metodei matricelor de transfer în studiul vibrațiilor unui arbore cotit fisurat	25
3.6. Aplicarea metodei matricelor de transfer în studiul vibrațiilor centrifugelor cu tamburul în consolă	29
3.7. Metoda matricelor de transfer aplicată în studiul vibrațiilor barelor drepte încărcate cu forțe axiale	35
Capitolul 4. Studiu, bazat pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile mediilor continue unidimensionale cu secțiune continuu variabilă	37
4.1. Vibrații de încovoiere	37
4.2. Vibrații longitudinale (axiale)	43
Bibliografie	49

Cuvânt înainte

Titlul tezei de abilitare, „**Formulări matriceale în studiul vibrațiilor mediilor continue unidimensionale**”, se referă la metode matriceale de studiu și nu la punerea sub formă matriceală a unor calcule sau rezultate. Am ales această temă deoarece acest domeniu, al metodelor matriceale de studiu, a fost bine reprezentat în activitatea de cercetare pe care am desfășurat-o.

Deși se consideră că Mecanica este un domeniu studiat încheiat, totuși există „insulițe” necunoscute în care apar legături interesante între diversele capitole ale acestei științe fundamentale a naturii. În domeniul dinamicii mașinilor și structurilor mecanice se înscriu studii referitoare la determinarea caracteristicilor dinamice (pulsării și moduri proprii de vibrație), determinarea răspunsului dinamic, pentru sisteme mecanice ca: bare cu secțiune variabilă, arbori cotiți, sisteme plane sau spațiale de bare, sau de conducte, centrifuge orizontale și verticale, sisteme liniare și multiliniare cu un grad de libertate și altele.

Dintre rezultatele activității de cercetare pot fi amintite:

- Stabilirea unei formule de calcul pentru momentele centrifugale pentru plăci plane. Această formulă înlocuiește calculul cu integrale cu calcule simple aritmetice;
- Stabilirea unei formule de calcul pentru momentele centrifugale pentru bare plane. Această formulă înlocuiește calculul cu integrale cu calcule simple aritmetice;
- Determinarea suportului rezultantei sistemului forțelor de inerție pentru plăci plane și bare plane aflate în mișcare de rotație în jurul unei axe din planul lor;
- Elaborarea unei metode de studiu, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile de încovoiere ale mediilor continue unidimensionale cu secțiune continuu variabilă;
- Elaborarea unei metode de studiu, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile axiale ale mediilor continue unidimensionale cu secțiune continuu variabilă;
- Punerea în evidență a unei proprietăți interesante a pulsației proprii fundamentale în cazul vibrațiilor de încovoiere ale barelor conice încastrate la un capăt și studiul factorilor care o influențează;
- Demonstrarea cuplării vibrațiilor axiale și vibrațiilor de încovoiere pentru centrifugele cu tamburul în consolă;
- Elaborarea unei metode de studiu, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile simultane ale sistemelor complexe plane sau spațiale de bare;
- Elaborarea unei metode de calcul numeric, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru studiul vibrațiilor simultane ale arborilor cotiți, ale arborilor drepți și cotiți cu fisuri;
- Stabilirea ecuației cu derivate parțiale pentru vibrațiile de torsiune ale barelor drepte cu secțiune dreptunghiulară;
- Studiul influenței forței axiale asupra pulsațiilor proprii pentru vibrațiile de încovoiere ale barelor drepte cu secțiune constantă;
- Elaborarea unei metode grafice de studiu a vibrațiilor sistemelor liniare și multiliniare cu un grad de libertate;
- Studiul influenței factorilor constructivi și funcționali asupra frecvențelor proprii ale vibrațiilor de încovoiere pentru centrifugele orizontale și verticale.

Formulări matriceale în studiul vibrațiilor mediilor continue unidimensionale

În această a doua parte sunt prezentate abordări matriceale și rezultate obținute în studiul vibrațiilor mediilor continue unidimensionale

În acest domeniu se înscriu studii referitoare la determinarea caracteristicilor dinamice (pulsatii și moduri proprii de vibrație), determinarea răspunsului dinamic, pentru sisteme mecanice ca: bare drepte, bare curbe, bare cu secțiune variabilă, arbori cotiți, sisteme plane sau spațiale de bare sau de conducte, centrifuge horizontale și verticale. Ca principale contribuții care se desprind din aceste lucrări amintesc:

- elaborarea unei metode de studiu, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile de încovoiere ale mediilor continue unidimensionale cu secțiune constantă;
- elaborarea unei metode de studiu, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile de încovoiere ale barelor curbe cu secțiune constantă sau variabilă;
- elaborarea unei metode de studiu, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile de încovoiere ale mediilor continue unidimensionale cu secțiune continuu variabilă;
- punerea în evidență a unei proprietăți interesante a pulsației proprii fundamentale în cazul barelor conice încastrate la un capăt și studiul factorilor care o influențează;
- demonstrarea cuplării vibrațiilor axiale și vibrațiilor de încovoiere pentru centrifugele cu tamburul în consolă;
- elaborarea unei metode de studiu, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile simultane ale sistemelor complexe plane sau spațiale de bare;
- elaborarea unei metode de calcul numeric, bazate pe metoda matricelor de transfer, pentru studiul vibrațiilor simultane ale arborilor drepți și cotiți cu fisuri;
- stabilirea ecuației cu derivate parțiale pentru vibrațiile de torsiune ale barelor drepte cu secțiune dreptunghiulară;
- studiul influenței forței axiale asupra pulsațiilor proprii pentru vibrațiile de încovoiere ale barelor drepte cu secțiune constantă;

Abordarea studiului sub formă matriceală nu este doar un mod de scriere concentrată ci o metoda de studiu.

3. Studiu, bazat pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile de încovoiere ale mediilor continue unidimensionale cu secțiune constantă

3.1. Prezentarea metodei

Se consideră că sistemul de bare, ca mediu continuu, este alcătuit din elemente (tronsoane) drepte, de secțiune constantă, care execută vibrații de încovoiere, vibrații longitudinale și vibrații de torsiune.

Fiecare element al său execută vibrații de încovoiere, în două plane perpendiculare, care conțin axa longitudinală a elementului.

Alegând pentru un element axele ca în figura 3.1.1, cu axa Oy axă longitudinală, vibrațiile de întindere compresiune se execută în lungul axei longitudinale și sunt cuplate cu vibrațiile de încovoiere în planul xOy .

Vibrațiile de torsiune se execută în jurul axei Oy și se cuplează cu vibrațiile de încovoiere în planul yOz .

Se urmărește construirea unei matrice de transfer care să țină seama de toate aceste tipuri de vibrații, o matrice de trecere pentru variații de secțiune (cu mai multe trepte), matrice de trecere pentru masa concentrată și pentru trecerea de la un element la altul, atunci când sistemul de coordonate este schimbat. Se pornește de la punctul terminal din partea stângă și se parcurge sistemul de la un element la altul până la punctul terminal din partea dreaptă a sistemului. În funcție de tipul de rezemare, se scriu condițiile limită și se obține un sistem algebric. Se pune condiția ca sistemul să admită o soluție nenulă și se obțin pulsațiile proprii.

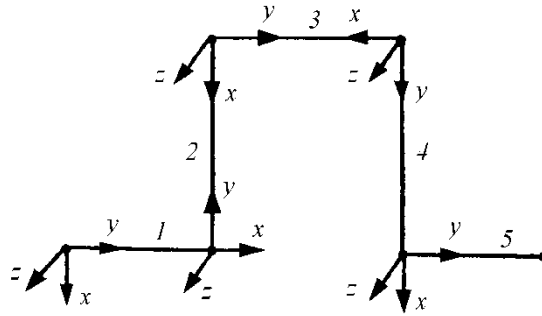


Figura 3.1.1. Sistem de bare drepte care execută vibrații de întindere-compresiune, vibrații de încovoiere și vibrații de torsiune

Matricea de transfer pentru un element al sistemului de bare

Așa cum se arată în debutul subcapitolului 3.1, s-a considerat că un element al sistemului de bare execută vibrații de încovoiere în două plane perpendiculare care conțin axa longitudinală a elementului, vibrații de întindere-compresiune și vibrații de torsiune în lungul și respectiv în jurul axei longitudinale.

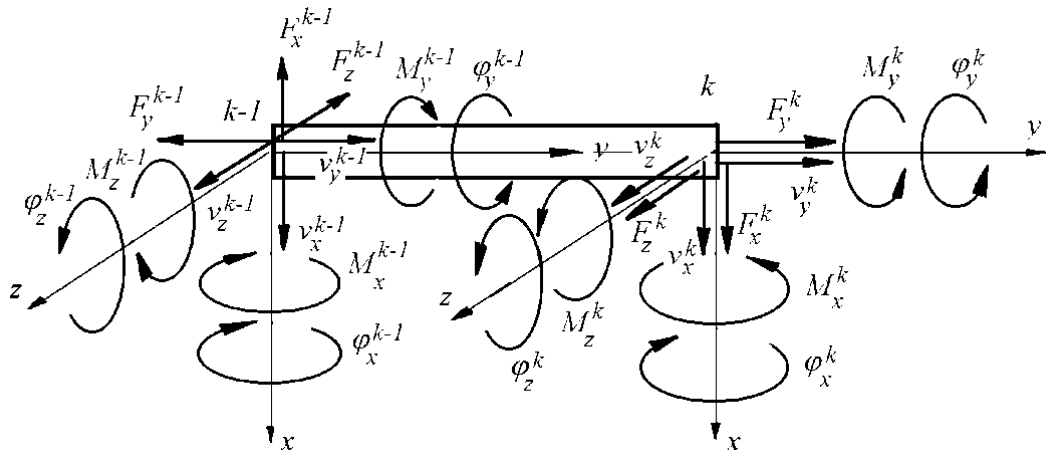


Figura 3.1.6. Sistem de bare care execută vibrații de încovoiere în două plane perpendiculare care conțin axa longitudinală a elementului, vibrații de întindere-compresiune și vibrații de torsiune în lungul și respectiv în jurul axei longitudinale

Cu notațiile din figura 3.1.6., se poate scrie relația matriceală (14), în care se folosesc următoarele notații:

- v_x -deplasarea în lungul axei Ox ;
- v_y -deplasarea în lungul axei Oy ;
- v_z -deplasarea în lungul axei Oz ;
- φ_x -unghiul de rotație în jurul axei Ox ;
- φ_y -unghiul de rotație în jurul axei Oy ;
- φ_z -unghiul de rotație în jurul axei Oz ;
- F_x -forța tăietoare pe axa Ox ;
- F_y -forța axială pe axa Oy ;
- F_z -forța tăietoare pe axa Oz ;
- M_x -momentul încovoietor pe axa Ox (încovoiere în planul yOz);
- M_y -momentul de torsiune pe axa Oy (torsiune în jurul axei Oy);
- M_z -momentul încovoietor pe axa Oz (încovoiere în planul xOz);
- A_{xz} - aria secțiunii transversale (din planul xOz);
- E - modulul de elasticitate longitudinal;
- G - modulul de elasticitate transversal;
- I_z -momentul de inerție față de axa Oz , al secțiunii din planul xOz ;

I_x - momentul de inerție față de axa Ox , al secțiunii din planul xOz ;

I_{pxz} - momentul de inerție polar al secțiunii din planul xOz ;

$$\alpha_{ix} = \sqrt{\omega_{ix}^4 \frac{\rho A_{xz}}{EI_z}}, \text{ unde: } \rho \text{ - este densitatea materialului;}$$

ω_{ix} - este pulsația proprie pentru vibrațiile de încovoiere din planul xOy (pe direcția Ox).

$$\alpha_{cy} = \omega_{cy} \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \text{ unde: } \omega_{cy} \text{ - este pulsația proprie pentru vibrațiile longitudinale (în lungul axei } Oy).$$

$$\alpha_{ry} = \omega_{ry} \sqrt{\frac{\rho}{G}}, \text{ unde: } \omega_{ry} \text{ - este pulsația proprie pentru vibrațiile de torsiune (în jurul axei } Oy).$$

$$\alpha_{iz} = \sqrt{\omega_{iz}^4 \frac{\rho A_{xz}}{EI_x}}, \text{ unde: } \omega_{iz} \text{ - este pulsația proprie pentru vibrațiile de încovoiere din planul } yOz$$

(pe direcția Oz).

S_x, T_x, U_x, V_x - sunt funcțiile Krilov-Rayleigh scrise în cazul vibrației de încovoiere în planul xOy (pe direcția Ox), adică:

$$S_x = (ch(\alpha_{ix} l_k) + \cos(\alpha_{ix} l_k))/2$$

$$T_x = (sh(\alpha_{ix} l_k) + \sin(\alpha_{ix} l_k))/2$$

$$U_x = (ch(\alpha_{ix} l_k) - \cos(\alpha_{ix} l_k))/2$$

$$V_x = (sh(\alpha_{ix} l_k) - \sin(\alpha_{ix} l_k))/2$$

unde l_k - reprezintă lungimea elementului k .

M, N - funcțiile trigonometrice cosinus și sinus scrise pentru vibrația de întindere-compresiune în lungul axei Oy :

$$M = \cos(\alpha_{cy} l_k)$$

$$N = \sin(\alpha_{cy} l_k).$$

R, P - funcțiile trigonometrice cosinus și sinus scrise pentru vibrația de torsiune în jurul axei Oy :

$$P = \cos(\alpha_{ry} l_k)$$

$$R = \sin(\alpha_{ry} l_k).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \\ -\frac{\varphi_z}{\alpha_{ix}} \\ \frac{M_z}{\alpha_{ix}^2 EI_z} \\ -\frac{F_x}{\alpha_{ix}^3 EI_z} \\ v_y \\ \frac{F_y}{\alpha_{cy} EA_{xz}} \\ \frac{\varphi_y}{M_y} \\ \frac{\alpha_{ry} GI_{pxz}}{v_z} \\ \frac{\varphi_x}{\alpha_{iz}} \\ \frac{M_x}{\alpha_{iz}^2 EI_x} \\ -\frac{F_z}{\alpha_{iz}^3 EI_x} \end{array} \right\}_k = \left[\begin{array}{cccccccccccc} S_x & T_x & U_x & V_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_x & S_x & T_x & U_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_x & V_x & S_x & T_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_x & U_x & V_x & S_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_z & T_z & U_z & V_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_z & S_z & T_z & U_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_z & V_z & S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_z & U_z & V_z & S_z \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{l} v_x \\ -\frac{\varphi_z}{\alpha_{ix}} \\ \frac{M_z}{\alpha_{ix}^2 EI_z} \\ -\frac{F_x}{\alpha_{ix}^3 EI_z} \\ v_y \\ \frac{F_y}{\alpha_{cy} EA_{xz}} \\ \frac{\varphi_y}{M_y} \\ \frac{\alpha_{ry} GI_{pxz}}{v_z} \\ \frac{\varphi_x}{\alpha_{iz}} \\ \frac{M_x}{\alpha_{iz}^2 EI_x} \\ -\frac{F_z}{\alpha_{iz}^3 EI_x} \end{array} \right\}_{k-1} \quad (14)$$

S_z, T_z, U_z, V_z - sunt funcțiile Krilov-Rayleigh scrise în cazul vibrației de încovoiere în planul yOz (pe direcția Oz), adică:

$$S_z = (ch(\alpha_{iz} l_k) + \cos(\alpha_{iz} l_k))/2$$

$$T_z = (sh(\alpha_{iz} l_k) + \sin(\alpha_{iz} l_k))/2$$

$$U_z = (ch(\alpha_{iz} l_k) - \cos(\alpha_{iz} l_k))/2$$

$$V_z = (sh(\alpha_{iz} l_k) - \sin(\alpha_{iz} l_k))/2.$$

Schimbările de semne care apar față de relația (2), la unele elemente ale vectorilor de stare pentru vibrațiile de încovoiere, se datorează utilizării unui sistem de referință unic pentru toate tipurile de vibrații.

Relația matriceală (14) pentru elementul k se poate scrie

$$\{q\}_k = [A]_k \{q\}_{k-1} \quad (15)$$

în care: $\{q\}_{k-1}$ și $\{q\}_k$ - reprezintă vectorii de stare pentru secțiunile $k-1$ și respectiv k ; $[A]_k$ - reprezintă matricea de transfer pentru elementul k .

Dacă se consideră că pentru o secțiune (nod) se poate vorbi de un vector de stare la stânga secțiunii (nodului), $\{q\}^l$, și un vector de stare la dreapta secțiunii (nodului), $\{q\}^r$, atunci pentru elementul k se poate scrie:

$$\{q\}_k^l = [A]_k \{q\}_{k-1}^r. \quad (16)$$

Matricea de transfer pentru un sistem de bare

Se consideră un element al sistemului care efectuează vibrații conform ipotezei de lucru enunțate mai sus, se alege sistemului de referință ca în figura 3.1.7, cu axa longitudinală Oy și axa Ox în planul desenului, rezultă că vibrațiile axiale și de torsiune vor fi în lungul și respectiv în jurul axei Oy . Deci, între vectorii de la capătul elementului k , $\{q\}_{k-1}^r$ and $\{q\}_k^l$, putem scrie relația matriceală (17)

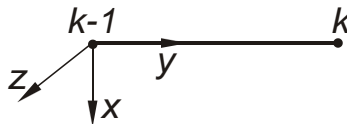


Fig. 3.1.7. Aplicarea metodei propuse în cazul unei bare drepte

$$\{q\}_k^l = [A]_k \{q\}_{k-1}^r \quad (17)$$

Este ușor de observat că elementele vectorilor de stare sunt cantități proporționale cu deplasările, rotațiile, momentele și forțele care acționează și depind de caracteristicile geometrice și mecanice ale barei. Indicii specifică pe ce axă are loc deformarea.

Matricea (12x12), notată $[A]_k$, este matricea de transfer pentru elementul k .

Matrice speciale

Matricea de trecere

Când se trece de la un element la altul și sistemul de coordonate se modifică, se introduce o matrice de trecere. Aceasta ține cont de schimbarea axei (de la sistemul $Ox_1y_1z_1$ la $Oxyz$) și de caracteristicile geometrice și mecanice ale noului element. Dacă într-un nod k sistemul de coordonate este schimbat (Figura 3.1.8), între caracteristicile mecanice din partea stângă și dreapta a nodului k , se poate scrie relația matriceală:

$$q_k^r = [u]_k \{q\}_k^l \quad (18)$$

unde

$$\{q\}_k^l = \{v_{x1} \quad \varphi_{z1} \quad M_{z1} \quad F_{x1} \quad v_{y1} \quad F_{y1} \quad \varphi_{y1} \quad M_{y1} \quad v_{z1} \quad \varphi_{x1} \quad M_{x1} \quad F_{z1}\}_k^{l,T}$$

$$\{q\}_k^r = \{v_x \quad \varphi_z \quad M_z \quad F_x \quad v_y \quad F_y \quad \varphi_y \quad M_y \quad v_z \quad \varphi_x \quad M_x \quad F_z\}_k^{r,T}$$

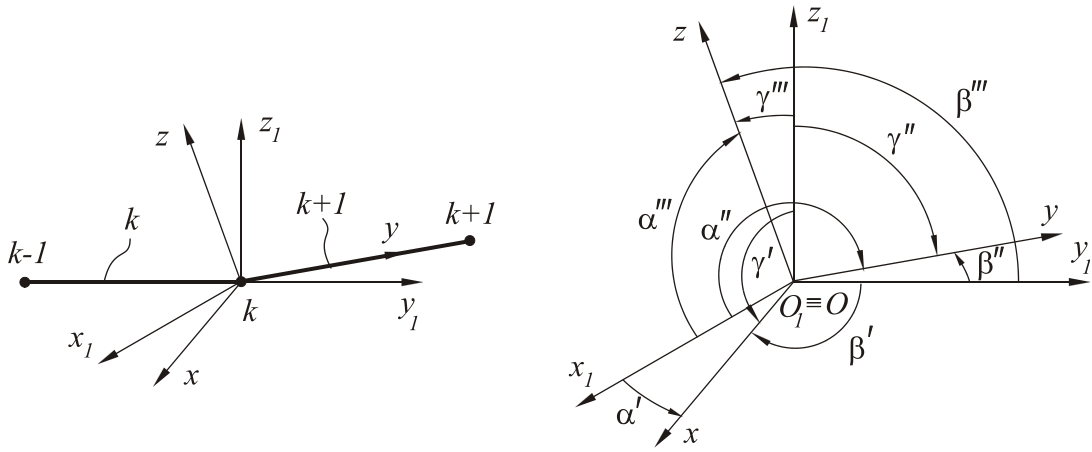


Fig. 3.1.8. Schimbarea coordonatelor sistemului

iar matricea $[u]_k$ este de forma

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha' & 0 & 0 & 0 & \cos \beta' & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma''' & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta''' & 0 & 0 & \cos \alpha''' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma''' & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta''' & 0 & 0 & \cos \alpha''' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha' & 0 & \cos \beta' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma' \\ \cos \alpha'' & 0 & 0 & 0 & \cos \beta'' & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha'' & 0 & \cos \beta'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma'' \\ 0 & \cos \gamma'' & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta'' & 0 & 0 & \cos \alpha'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma'' & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta'' & 0 & 0 & \cos \alpha'' & 0 \\ \cos \alpha''' & 0 & 0 & 0 & \cos \beta''' & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma''' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma' & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta' & 0 & 0 & \cos \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma' & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta' & 0 & 0 & \cos \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha''' & 0 & \cos \beta''' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma''' \end{bmatrix}_k$$

Se urmărește scrierea unei relații între vectorii de stare din nodul k . Deoarece elementele vectorilor de stare sunt cantități proporționale cu deplasările, rotațiile, momentele și forțele, matricea $[u]_k$ trebuie înlocuită cu o altă matrice $[C]_k$ similară ca formă cu $[u]_k$. Se poate scrie relația dintre vectorii de stare din partea stânga și partea dreaptă din nodul k :

$$\{q\}_k^r = [C]_k \{q\}_k^l \quad (19)$$

Matricea pătrată (12×12), numită $[C]_k$, reprezintă matricea de tranziție în nodul k . Este o matrice rară. Elementele matricei $[C]_k$ sunt elementele matricei $[u]_k$ fiecare cantitate ținând seama de caracteristicile geometrice ale elementelor conectate în nodul k .

Un element al matricei $[C]_k$, spre exemplu $C_{6,4}$, se poate scrie astfel:

$$C_{6,4} = -\frac{\alpha_{ix,k}^3 EI_{z,k}}{\alpha_{cy,k+1} EA_{xz,k+1}} \cos \alpha''$$

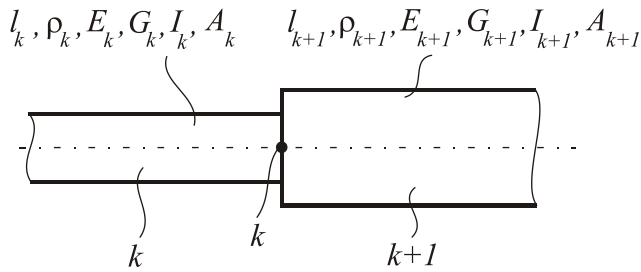


Figura 3.1.9. Saltul de secțiune

Matricea de salt

Pentru un sistem de bare cu secțiuni variabilă în mai multe trepte, în nodul k unde apare o trecere între secțiuni (Figura 3.1.9), între vectorii de stare din stânga și vectorii de stare din dreapta nodului k , $\{q\}_k^l$ și $\{q\}_k^r$, între care se poate scrie relația:

$$\{q\}_k^r = [B]_k \{q\}_k^l \quad (20)$$

Matricea notată $[B]_k$ este o matrice pătrată de tip (12×12) și, conform relației (20), este o matrice rară. Se numește matrice de trecere în secțiunea k . Pentru un sistem de bare omogene, elementele nenule ale acestei matrice sunt:

$$B_{1,1} = B_{5,5} = B_{7,7} = B_{9,9} = 1; \quad B_{2,2} = \frac{a_k}{b_{kx}}; \quad B_{3,3} = a_k^2 b_{kx}^2; \quad B_{4,4} = a_k^3 b_{kx}; \quad B_{6,6} = a_k^4;$$

$$B_{8,8} = d_k; \quad B_{10,10} = \frac{a_k}{b_{kz}}; \quad B_{11,11} = a_k^2 b_{kz}^2; \quad B_{12,12} = a_k^3 b_{kz}$$

unde: $a_k = \sqrt[4]{\frac{A_{xz,k}}{A_{xz,k+1}}}$; $b_{kx} = \sqrt[4]{\frac{I_{z,k}}{I_{z,k+1}}}$; $b_{kz} = \sqrt[4]{\frac{I_{x,k}}{I_{x,k+1}}}$; $d_k = \frac{I_{pxz,k}}{I_{pxz,k+1}}$ în cazul secțiunilor circulare și $d_k = \sqrt{\frac{I_{pxz,k} I_{d,k}}{I_{pxz,k+1} I_{d,k+1}}}$ în cazul secțiunilor dreptunghiulare.

Indicii suplimentari specifică de-a lungul cărei axe are loc deformarea.

Matrice de trecere peste o masă concentrată

Dacă într-un nod k există o masă concentrată m_k (Figura 3.1.10), când se trece prin nodul k , apare o forță suplimentară. Deci, între vectorul de stare din stânga, $\{q\}_k^l$ și vectorul de stare din dreapta, $\{q\}_k^r$ se poate scrie următoarea relație matriceală:

$$\{q\}_k^r = [D]_k \{q\}_k^l \quad (21)$$

unde, matricea pătrată (12×12) , notată $[D]_k$, este matricea de trecere peste masa concentrată în nodul k și este o matrice rară.

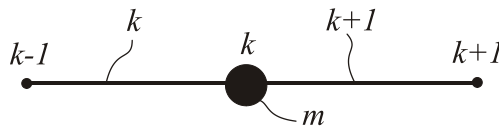


Figura 3.1.10. Masă concentrată în nodul k

Elementele nenule sunt:

$$D_{1,1} = D_{2,2} = D_{3,3} = D_{4,4} = D_{5,5} = D_{6,6} = D_{7,7} = D_{8,8} = D_{9,9} = 1;$$

$$D_{10,10} = D_{11,11} = D_{12,12} = 1; \quad D_{4,1} = \frac{m_k \alpha_{ix}}{\rho A_{xz}}; \quad D_{6,5} = -\frac{m_k \alpha_{cx}}{\rho A_{xz}}; \quad D_{12,9} = \frac{m_k \alpha_{iz}}{\rho A_{xz}}$$

Deoarece elementele vectorilor de stare depind de caracteristicile geometrice și mecanice ale unui element de sistem de bare, matricele speciale $[C]$, $[B]$, $[D]$ acționează și ca niște filtre. Aceste matrice

asigură trecerea printr-un nod, de la un element al sistemului de bare la altul, numai a deplasărilor, rotațiilor, momentelor și forțelor.

Determinarea pulsațiilor proprii

Se pornește dintr-un punct terminal din stânga, 0 , și se trece prin tot sistemul de bare, element cu element până la punctul final din dreapta, n . În funcție de configurația sistemului de bare, pe traseu, intervin matricea de transfer, $[A]$ și matricele $[C]$, $[B]$, $[D]$. Se obține relația matriceală dintre vectorii de stare de la sfârșitul elementului n , $\{q\}_n^l$, și primul nod (punctul inițial) $\{q\}_0^r$:

$$\{q\}_n^l = [A]_n \cdots [D]_k \cdots [B]_j \cdots [C]_i \cdots [A]_1 \{q\}_0^r = [Q] \{q\}_0^r. \quad (22)$$

Matricea pătratică de forma (12×12) , notată $[Q]$, din relația (22) se numește matrice de transfer pentru sistem. Indicii indică elementele (pentru matricea de transfer) sau nodurile. În funcție de tipul de rezemare, se scriu condițiile limită și se obține un sistem algebric liniar și omogen. Se pune condiția ca sistemul să admită o soluție nenulă. Se obține astfel ecuația pulsațiilor proprii (care de obicei este o ecuație transcendentă) care se rezolvă numeric.

3.2. Aplicarea metodei în cazul unor sisteme de bare

Pentru verificare, metoda prezentată a fost aplicată în cazul concret al unui cadru de oțel în formă de „U” cu laturi inegale și puncte terminale fixe rigide (Figura 3.2.1). Cadrul din oțel a fost împărțit în 3 elemente. Au fost obținute 4 puncte, numite noduri, care leagă 3 elemente.

Deoarece sistemul de bare (cadru) este dispus în același plan (xOy), vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale sunt separate de vibrațiile de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile de torsiune. În felul acesta sunt separat, pentru fiecare element, 2 matrice de transfer și 2 matrice pentru fiecare matrice specială. Sunt de asemenea câte 2 vectori de stare pentru fiecare vector de stare din (14).

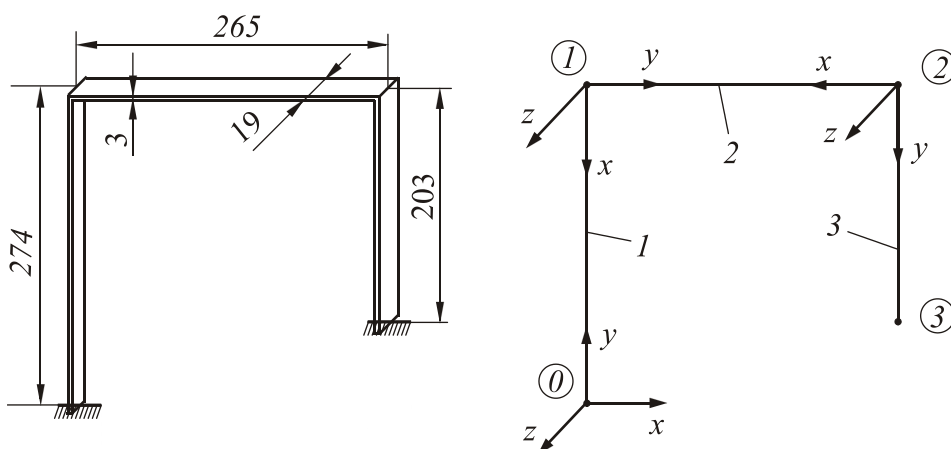


Figura 3.2.1. Aplicarea metodei propuse pe sistemul de bare testat

Astfel, rezultă 2 matrice de transfer $[Q]$ pentru sistemul de bare: una pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale și alta pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile de torsiune.

Condițiile la limită în nodurile 0 și 3 sunt:
pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy
cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ \varphi_z = 0 \\ v_y = 0 \end{cases},$$

pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz
cuplate cu vibrațiile torsionale

$$\begin{cases} \varphi_y = 0 \\ v_z = 0 \\ \varphi_x = 0 \end{cases}.$$

The equation (22) will be:

- pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{M_z}{\alpha_{Iz}^2 EI_z} \\ -\frac{F_x}{\alpha_{Iz}^3 EI_z} \\ 0 \\ \frac{F_y}{\alpha_{cy} EA_{xz}} \end{pmatrix}_3^l = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} & Q_{1,6} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} & Q_{2,5} & Q_{2,6} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} & Q_{3,5} & Q_{3,6} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} & Q_{4,5} & Q_{4,6} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} & Q_{5,5} & Q_{5,6} \\ Q_{6,1} & Q_{6,2} & Q_{6,3} & Q_{6,4} & Q_{6,5} & Q_{6,6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{M_z}{\alpha_{Iz}^2 EI_z} \\ -\frac{F_x}{\alpha_{Iz}^3 EI_z} \\ 0 \\ \frac{F_y}{\alpha_{cy} EA_{xz}} \end{pmatrix}_0^r, \quad (23)$$

- pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile torsionale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{M_y}{\alpha_{ry} GI_{pxz}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M_x}{\alpha_{Iz}^2 EI_x} \\ -\frac{F_z}{\alpha_{Iz}^3 EI_x} \end{pmatrix}_3^l = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} & Q_{1,6} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} & Q_{2,5} & Q_{2,6} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} & Q_{3,5} & Q_{3,6} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} & Q_{4,5} & Q_{4,6} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} & Q_{5,5} & Q_{5,6} \\ Q_{6,1} & Q_{6,2} & Q_{6,3} & Q_{6,4} & Q_{6,5} & Q_{6,6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{M_y}{\alpha_{ry} GI_{pxz}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M_x}{\alpha_{Iz}^2 EI_x} \\ -\frac{F_z}{\alpha_{Iz}^3 EI_x} \end{pmatrix}_0^r, \quad (25)$$

Din condiția ca sistemul să admită soluție diferită de zero

- pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\det \begin{bmatrix} Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,6} \\ Q_{2,3} & Q_{2,4} & Q_{2,6} \\ Q_{5,3} & Q_{5,4} & Q_{5,6} \end{bmatrix} = 0, \quad (27)$$

- pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile torsionale

$$\det \begin{bmatrix} Q_{1,2} & Q_{1,5} & Q_{1,6} \\ Q_{3,2} & Q_{3,5} & Q_{3,6} \\ Q_{4,2} & Q_{4,5} & Q_{4,6} \end{bmatrix} = 0, \quad (28)$$

se obțin pulsațiile proprii.

Au fost efectuate experimente pe același cadru de oțel. Cadrul din oțel a fost excitat în mai multe puncte. De asemenea, răspunsul sistemului a fost măsurat în mai multe puncte.

Au fost comparate frecvențele proprii obținute prin metoda teoretică prezentată mai sus (metoda matricelor de transfer-MMT) cu cele obținute printr-o metodă aproximativă (metoda elementului finit-MEF) și cu rezultatele obținute prin experimente. După cum se arată în Tabelul 1, rezultatele teoretice obținute cu metoda matricelor de transfer corespund aproximativ cu rezultatele obținute cu metoda elementului finit și cu rezultatele experimentale. Rezultatele obținute cu metoda matricelor de transfer sunt mai apropiate de valorile obținute pe cale experimentală.

Tabelul 1. Primele șase frecvențe proprii

Număr mod propriu	Rezultate teoretice Metoda matricelor de transfer (MMT) (Hz)	Rezultate teoretice Metoda elementului finit (MEF) (Hz)	Rezultate experimentale (Hz)	Observații
Mod 1	40.86	42,36	39.2	În planul cadrului
Mod 2	137.62	137,21	132	Perpendicular pe cadru
Mod 3	139.14	141,18	138	În planul cadrului
Mod 4	212.21	219,69	230	În planul cadrului
Mod 5	252.54	253,85	253	Perpendicular pe cadru
Mod 6	339,79	350,74	345	În planul cadrului

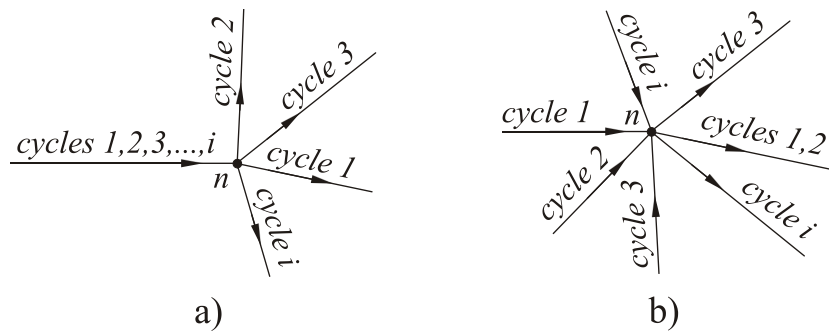


Figura 3.2.3. Tipuri de noduri

În cazul unui sistem de bare static nedeterminat, se împarte sistemul în mai multe cicluri și se introduc matrice și ecuații speciale în punctele de ramificare. Toate ciclurile trebuie să înceapă de la același nod (punct), scris „0”. Punctele de început și de sfârșit ale ciclurilor trebuie să fie în punctele de legătură ale sistemului cu exteriorul sau în punctele de capăt libere ale barelor. Se pot identifica două tipuri de noduri: noduri cu o singură intrare și mai multe ieșiri, numite noduri de ramificare, (Figura 3.2.3.a) și noduri cu mai multe intrări și mai multe ieșiri, numite noduri de întâlnire (Figura 3.2.3.b).

Într-un nod se consideră un ciclu principal, de exemplu ciclul numărul 1. Celelalte cicluri sunt cicluri secundare.

Într-un nod de ramificare se păstrează barele din ciclurile principale și se înlocuiesc barele din ciclurile secundare cu forțele și momentele de la capete din acest nod. Forțele și momentele de la capetele barelor din ciclurile secundare într-un nod de ramificare sunt necunoscute.

Din acest motiv, în toți vectorii de stare se introduc linii noi corespunzătoare forțelor și momentelor de la capetele barelor din ciclurile secundare în nodurile de ramificare. Numărul acestor noi linii este egal cu numărul total al necunoscutelor din ciclurile secundare din nodurile de ramificare. De asemenea, în toate matricele de transfer și matricele de trecere se introduc linii și coloane noi. Elementele nenule sunt egale cu unitatea și sunt situate pe diagonala principală. Numărul acestor linii și coloane noi este egal cu numărul total de necunoscute din ciclurile secundare din nodurile de ramificare.

În aceste noduri se introduce o matrice specială numită matrice de ramificare și notată $[R]_2$.

Se consideră, de exemplu, un sistem de bare plane ca în figura 3.2.4. Nodul 2 este un nod de ramificare. Se împarte sistemul de bare în 2 cicluri. Ciclul 1 (0-1-2-4-5) și ciclul 2 (0-1-2-3). Nodul 2 este un nod de ramificare. În acest nod ciclul 1 este principal.

Nodul de ramificare introduce 6 necunoscute: F_{2x}^2 , F_{2y}^2 , F_{2z}^2 , M_{2x}^2 , M_{2y}^2 , M_{2z}^2 (Figura 3.2.5). Deci trebuie să fie introduse în vectorii de stare 6 linii noi. Numerele de la indicii superiori și inferiori arată ciclul secundar și respectiv nodul de ramificare.

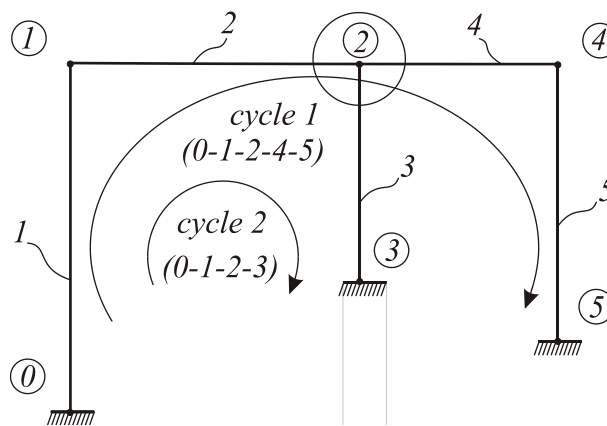


Figura 3.2.4. Sistem plan de bare care conține un nod de ramificare

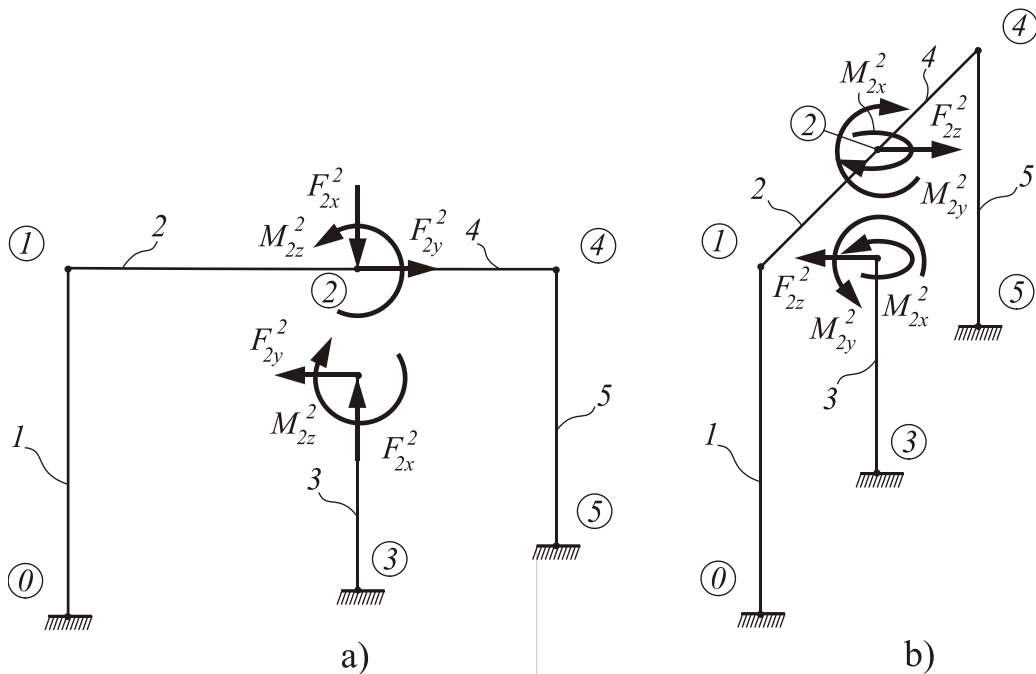


Figura 3.2.5. Necunoscute introduse de nodul de ramificare

Vibrațiile de încovoiere în planul xOy se cuplează cu vibrațiile longitudinale și pot fi separate de vibrațiile de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile de torsiune, deoarece sistemul de bare este dispus în același plan (xOy). În acest fel sunt, separat pentru fiecare element, 2 matrice de transfer și 2 matrice pentru fiecare matrice specială. În fiecare matrice se introduc 3 linii și 3 coloane noi. Sunt, de asemenea, 2 vectori de stare pentru fiecare vector de stare din relația (17).

De exemplu, matricele de transfer vor fi:

pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy
cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$[A]_k = \begin{bmatrix} S_x & T_x & U_x & V_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_x & S_x & T_x & U_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_x & V_x & S_x & T_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_x & U_x & V_x & S_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k$$

pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz
cuplate cu vibrațiile torsionale

$$[A]_k = \begin{bmatrix} P & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R & P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & T_z & U_z & V_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_z & S_z & T_z & U_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_z & V_z & S_z & T_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_z & U_z & V_z & S_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k$$

Se introduc, de asemenea, 3 linii noi în vectorii de stare.

- pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale:

$$\left\{ v_x - \frac{\varphi_z}{\alpha_{ix}} - \frac{M_z}{\alpha_{ix}^2 EI_z} - \frac{F_x}{\alpha_{ix}^3 EI_z} \quad v_y \frac{F_y}{\alpha_{cy} EA_{xz}} - \frac{M_{2z}^2}{\alpha_{ix,1}^2 EI_{z,1}} - \frac{F_{2x}^2}{\alpha_{ix,1}^3 EI_{z,1}} - \frac{F_{2y}^2}{\alpha_{cy,1} EA_{xz,1}} \right\}_k^T$$

- pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile torsionale:

$$\left\{ \varphi_y \frac{M_y}{\alpha_{ry} GI_{pxz}} \quad v_z \frac{\varphi_x}{\alpha_{iz}} \frac{M_x}{\alpha_{iz}^2 EI_x} - \frac{F_z}{\alpha_{iz}^3 EI_x} \frac{M_{2y}^2}{\alpha_{ry,1} GI_{pxz,1}} \frac{M_{2x}^2}{\alpha_{iz,1}^2 EI_{x,1}} - \frac{F_{2z}^2}{\alpha_{iz,1}^3 EI_{x,1}} \right\}_k^T$$

Pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale se introduce matricea de ramificare $[R]_2$. Este o matrice rară. Elementele nenule sunt:

-pentru ciclul 1: $R_{1,1}^1 = R_{2,2}^1 = R_{3,3}^1 = R_{4,4}^1 = R_{5,5}^1 = R_{6,6}^1 = R_{7,7}^1 = R_{8,8}^1 = R_{9,9}^1 = 1;$

$$R_{3,7}^1 = \frac{\alpha_{ix,1}^2 EI_{z,1}}{\alpha_{ix}^2 EI_z}; \quad R_{4,8}^1 = \frac{\alpha_{ix,1}^3 EI_{z,1}}{\alpha_{ix}^3 EI_z}; \quad R_{6,9}^1 = -\frac{\alpha_{cy,1} EA_{xz,1}}{\alpha_{cy} EA_{xz}}$$

-pentru ciclul 2: $R_{1,1}^2 = R_{2,2}^2 = R_{5,5}^2 = R_{7,7}^2 = R_{8,8}^2 = R_{9,9}^2 = 1$; $R_{3,7}^2 = R_{4,8}^2 = R_{6,9}^2 = -1$.

Pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile torsionale se introduce, de asemenea, matricea de ramificare $[R]_2$. Este o matrice rară. Elementele nenule sunt:

-pentru ciclul 1: $R_{1,1}^1 = R_{2,2}^1 = R_{3,3}^1 = R_{4,4}^1 = R_{5,5}^1 = R_{6,6}^1 = R_{7,7}^1 = R_{8,8}^1 = R_{9,9}^1 = 1$;

$$R_{2,7}^1 = -\frac{\alpha_{ry,1}GI_{pxz,1}}{\alpha_{ry}GI_{pxz}}; R_{5,8}^1 = -\frac{\alpha_{iz,1}^2EI_{x,1}}{\alpha_{iz}^2EI_x}; R_{6,9}^1 = \frac{\alpha_{iz,1}^3EI_{x,1}}{\alpha_{iz}^3EI_x}.$$

- pentru ciclul 2: $R_{1,1}^2 = R_{3,3}^2 = R_{4,4}^2 = R_{7,7}^2 = R_{8,8}^2 = R_{9,9}^2 = 1$; $R_{2,7}^2 = R_{5,8}^2 = R_{6,9}^2 = -1$.

Pentru ciclul 2, în nodul de ramificare 2, intervine, de asemenea, matricea de trecere $[C]_2^2$.

Pulsațiile proprii se obțin ca în cazul sistemului de bare static determinat.

Se obține pentru ciclul 1 relația matriceală:

$$\{q\}_5^l = [A]_5[C]_4[A]_4[R]_2^1[A]_2[C]_1[A]_1\{q\}_0^r = [Q]^1\{q\}_0^r. \quad (29)$$

unde $[Q]^1$ este matricea de transfer pentru ciclul 1. Indicele superior arată ciclul.

Pentru ciclul 2 se obține relația matriceală::

$$\{q\}_3^l = [A]_3[C]_2^2[R]_2^2[A]_2[C]_1[A]_1\{q\}_0^r = [Q]^2\{q\}_0^r. \quad (30)$$

unde $[Q]^2$ este matricea de transfer pentru ciclul 2. Indicele superior indică ciclul.

Din relațiile (29) și (30) se obține sistemul algebric sub formă matriceală:

$$\begin{Bmatrix} \{q\}_5^l \\ \{q\}_3^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [Q]^1 \\ [Q]^2 \end{bmatrix} \{q\}_0^r. \quad (31)$$

În funcție de tipul rezemării se scriu condițiile la limită și se obține un sistem algebric liniar și omogen. Se pune condiția ca sistemul să admită soluție diferită de zero și se obțin pulsațiile proprii.

Pentru exemplul din figura 3.2.4, condițiile de rezemare în nodurile 0, 3 și 5 sunt aceleași:

$$v_x = 0; \quad \varphi_z = 0; \quad v_y = 0; \quad \varphi_y = 0; \quad v_z = 0; \quad \varphi_x = 0.$$

Ținând cont de aceste condiții, relația (31) conduce la un sistem algebric liniar și omogen (în formă matriceală):

- în cazul vibrațiilor de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1,3}^1 & Q_{1,4}^1 & Q_{1,6}^1 & Q_{1,7}^1 & Q_{1,8}^1 & Q_{1,9}^1 \\ Q_{2,3}^1 & Q_{2,4}^1 & Q_{2,6}^1 & Q_{2,7}^1 & Q_{2,8}^1 & Q_{2,9}^1 \\ Q_{5,3}^1 & Q_{5,4}^1 & Q_{5,6}^1 & Q_{5,7}^1 & Q_{5,8}^1 & Q_{5,9}^1 \\ Q_{1,3}^2 & Q_{1,4}^2 & Q_{1,6}^2 & Q_{1,7}^2 & Q_{1,8}^2 & Q_{1,9}^2 \\ Q_{2,3}^2 & Q_{2,4}^2 & Q_{2,6}^2 & Q_{2,7}^2 & Q_{2,8}^2 & Q_{2,9}^2 \\ Q_{5,3}^2 & Q_{5,4}^2 & Q_{5,6}^2 & Q_{5,7}^2 & Q_{5,8}^2 & Q_{5,9}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{M_z}{\alpha_{ix}^2EI_z} \\ F_x \\ -\frac{F_x}{\alpha_{ix}^3EI_z} \\ F_y \\ \alpha_{cy}EA_{xz} \\ -\frac{M_{zz}^2}{\alpha_{ix,1}^2EI_{z,1}} \\ -\frac{F_{2x}^2}{\alpha_{ix,1}^3EI_{z,1}} \\ F_{2y}^2 \\ \alpha_{cy,1}EA_{xz,1} \end{Bmatrix}^r; \quad (32)$$

- în cazul vibrațiilor de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile torsionale

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1,2}^1 & Q_{1,5}^1 & Q_{1,6}^1 & Q_{1,7}^1 & Q_{1,8}^1 & Q_{1,9}^1 \\ Q_{3,2}^1 & Q_{3,5}^1 & Q_{3,6}^1 & Q_{3,7}^1 & Q_{3,8}^1 & Q_{3,9}^1 \\ Q_{4,2}^1 & Q_{4,5}^1 & Q_{4,6}^1 & Q_{4,7}^1 & Q_{4,8}^1 & Q_{4,9}^1 \\ Q_{1,2}^2 & Q_{1,5}^2 & Q_{1,6}^2 & Q_{1,7}^2 & Q_{1,8}^2 & Q_{1,9}^2 \\ Q_{3,2}^2 & Q_{3,5}^2 & Q_{3,6}^2 & Q_{3,7}^2 & Q_{3,8}^2 & Q_{3,9}^2 \\ Q_{4,2}^2 & Q_{4,5}^2 & Q_{4,6}^2 & Q_{4,7}^2 & Q_{4,8}^2 & Q_{4,9}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{M_y}{\alpha_{ry} G I_{pxz}} \\ \frac{M_x}{\alpha_{iz}^2 E I_x} \\ -\frac{F_z}{\alpha_{iz}^3 E I_x} \\ \frac{M_{2y}^2}{\alpha_{ry,1} G I_{pxz,1}} \\ \frac{M_{2x}^2}{\alpha_{iz,1}^2 E I_{x,1}} \\ -\frac{F_{2z}^2}{\alpha_{iz,1}^3 E I_{x,1}} \end{Bmatrix}_r \quad (33)$$

Din condiția ca sistemele să admită soluții diferite de zero se obțin pulsațiile proprii.

Într-un nod de întâlnire se păstrează și barele din ciclurile principale. Se înlocuiesc barele din ciclurile secundare, cu forțele și momentele de la capete din acest nod, dar numai pentru barele care părăsesc nodul. Aceste forțe și momente sunt necunoscute. Barele din ciclurile secundare care vin în nod sunt înlocuite cu forțele și momentele din capul ciclului în acest nod. Dacă ieșirea este comună pentru un ciclu principal și un ciclu secundar, se păstrează doar ieșirea pentru ciclul principal. Într-un nod de întâlnire sunt scrise ecuații speciale.

De exemplu, se consideră un sistem de bare plane ca în figura 3.2.6. Nodul 1 este un nod de ramificare, iar nodul 4 este un nod de întâlnire. Se împarte sistemul de bare în 2 cicluri. Ciclul 1 (0-1-2-3-4-5) și ciclul 2 (0-1-4-5). Ciclul 1 este principal.

Nodul de ramificare 1 introduce 6 necunoscute: $F_{1x}^2, F_{1y}^2, F_{1z}^2, M_{1x}^2, M_{1y}^2, M_{1z}^2$ (Figura 3.2.7). Trebuie să fie introduse în vectorii de stare 6 linii noi. Indicele superior și indicele inferior arată ciclul secundar și respectiv nodul de ramificare.

Vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale ar putea fi separate de vibrațiile de încovoiere în planul yOz cuplate cu vibrațiile de torsiune, ca în exemplul anterior. Ca și în exemplul anterior vor fi, separat pentru fiecare element, 2 matrice de transfer și 2 matrice pentru fiecare matrice specială. În fiecare matrice se introduc 3 linii și coloane noi ca în exemplul anterior. De asemenea, ca și în exemplul anterior, sunt 2 vectori de stare. Se introduc, de asemenea, în toți vectorii de stare 3 linii noi. În nodul 1 se introduce matricea de ramificare $[R]_1$, ca în exemplul anterior. În nodul 4 se introduce o matrice de întâlnire specială $[R^{F,M}]_4$ scrisă numai pentru forțe și momente. Se poate scrie în nodul 4:

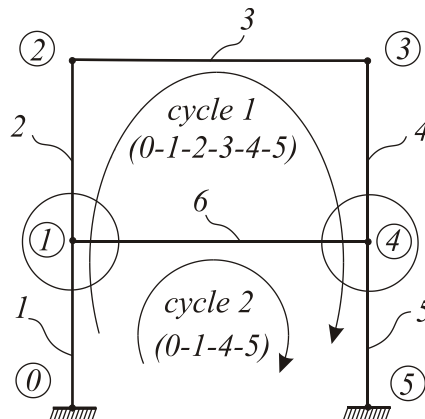


Figura 3.2.6 Sistem de bare plane care conține ramificații și noduri de întâlnire

$$\{q\}_4^r = \{q\}_4^{1,l} - [R^{F,M}]_4^2 \{q\}_4^{2,l} = [Q]_{0-4}^1 \{q\}_0^r - [R^{F,M}]_4^2 [Q]_{0-4}^2 \{q\}_0^r =$$

$$= ([Q]_{0-4}^1 - [R^{F,M}]_4^2 [Q]_{0-4}^2) \{q\}_0^r \quad (34)$$

Ținând cont de elementul 5 se poate scrie:

$$\{q\}_5^l = [A]_5 \{q\}_4^r = [A]_5 ([Q]_{0-4}^1 - [R^{F,M}]_2^2 [Q]_{0-4}^2) \{q\}_0^r = [Q]^1 \{q\}_0^r \quad (35)$$

unde, matricea pătrată $[Q]^1$ se numește matrice de transfer pentru sistem pentru ciclul principal (ciclul 1). Numărul de la indicele superior arată ciclul.

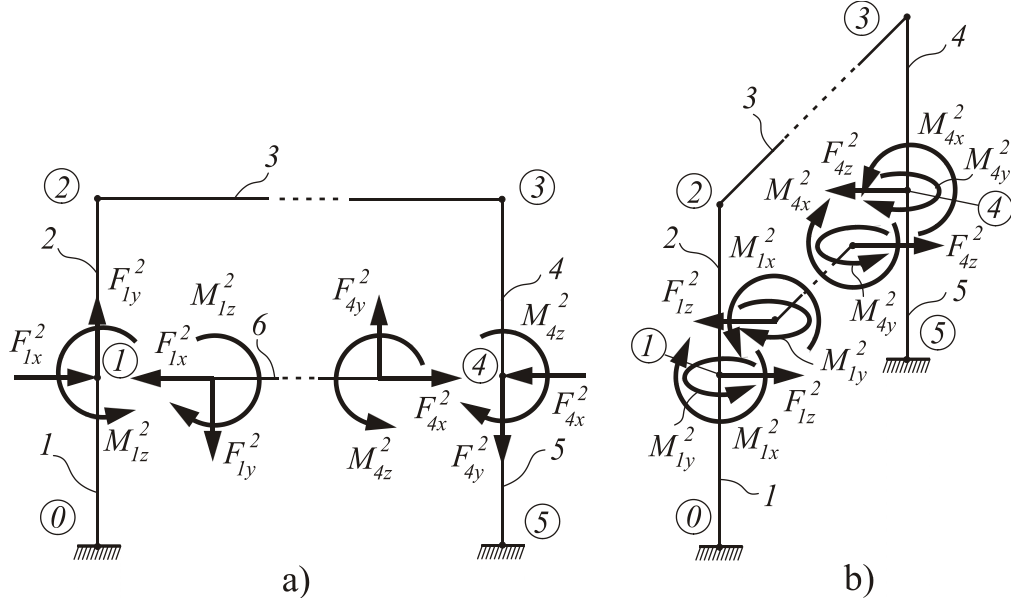


Figura 3.2.7. Necunoscute introduse de nodul de ramificare și de nodul de întâlnire

Matricea $[R^{F,M}]_4^2$ poate fi obținută din matricea de trecere $[C]_k$:

$$[R^{F,M}]_4^2 = [C]_4^2 [1^{F,M}], \quad (36)$$

Unde, numărul de la indicele superior arată ciclul și $[1^{F,M}]$ este matricea unitate dar numai pentru forțe și momente. Matricele $[1^{F,M}]$ vor fi:

pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy
cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz
cuplate cu vibrațiile torsionale

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricele $[C]_4^2$ vor fi:

pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy
cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & 0 & 0 & 0 & C_{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{4,4} & 0 & C_{4,6} & 0 & 0 & 0 \\ C_{5,1} & 0 & 0 & 0 & C_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{6,4} & 0 & C_{6,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_4$$

pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz
cuplate cu vibrațiile torsionale

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & 0 & 0 & C_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2} & 0 & 0 & C_{2,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{4,1} & 0 & 0 & C_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{5,2} & 0 & 0 & C_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{6,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_4$$

În nodul 4 deplasările pe ciclul 1 sunt egale cu deplasările pe ciclul 2. În acest caz se introduce, pentru ciclul secundar (ciclul 2), o matrice de întâlnire specială $[R^D]_4^2$ scrisă doar pentru deplasări (deplasări, rotații).

Matricea $[R^D]_4^2$ poate fi obținută din matricea de trecere $[C]_k$:

$$[R^D]_4^2 = [C]_4^2[1^D], \quad (37)$$

unde, numărul indicelui superior arată ciclul, numărul indicelui inferior arată nodul și $[1^D]$ este matricea unitate, dar numai pentru deplasări.

Matricele $[1^D]$ vor fi:

pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy
cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz
cuplate cu vibrațiile torsionale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Plecând de la relația

$$[R^D]_4^2\{q\}_4^{2-l} = [1^D]\{q\}_4^{1-l}$$

se poate scrie

$$[R^D]_4^2[Q]_{0-4}^2\{q\}_0^r = [1^D][Q]_{0-4}^1\{q\}_0^r$$

sau

$$\{0\} = ([R^D]_4^1[Q]_{0-4}^1 - [1^D][Q]_{0-4}^2)\{q\}_0^r = [R^D]_4\{q\}_0^r. \quad (38)$$

$[R^D]_4$ este matricea de întâlnire pentru deplasări în nodul 4. Numărul de la indicele superior arată ciclul.

Din relațiile (35) și (38) se obține sistemul algebric sub formă matriceală:

$$\begin{Bmatrix} \{q\}_5^l \\ \{0\} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} [Q]_5^1 \\ [R^D]_4 \end{bmatrix} \{q\}_0^r. \quad (39)$$

În funcție de tipul de rezemare se scriu condițiile la limită și se obține un sistem algebric. Se pune condiția ca sistemul să admită soluție diferită de zero și se obțin pulsațiile proprii.

Pentru exemplul din figura 3.2.6, condițiile la limită în nodurile 0 și 5 sunt aceleași: $v_x = 0$; $\varphi_z = 0$; $v_y = 0$; $\varphi_y = 0$; $v_z = 0$; $\varphi_x = 0$. Deci, relația (39) conduce la un sistem algebric liniar și omogen (în formă matriceală)

Pulsațiile proprii se obțin din condiția ca sistemul să admită soluții diferite de zero:

pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy
cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\det \begin{bmatrix} Q_{1,3}^1 & Q_{1,4}^1 & Q_{1,6}^1 & Q_{1,7}^1 & Q_{1,8}^1 & Q_{1,9}^1 \\ Q_{2,3}^1 & Q_{2,4}^1 & Q_{2,6}^1 & Q_{2,7}^1 & Q_{2,8}^1 & Q_{2,9}^1 \\ Q_{5,3}^1 & Q_{5,4}^1 & Q_{5,6}^1 & Q_{5,7}^1 & Q_{5,8}^1 & Q_{5,9}^1 \\ R_{1,3}^D & R_{1,4}^D & R_{1,6}^D & R_{1,7}^D & R_{1,8}^D & R_{1,9}^D \\ R_{2,3}^D & R_{2,4}^D & R_{2,6}^D & R_{2,7}^D & R_{2,8}^D & R_{2,9}^D \\ R_{5,3}^D & R_{5,4}^D & R_{5,6}^D & R_{5,7}^D & R_{5,8}^D & R_{5,9}^D \end{bmatrix} = 0;$$

pentru vibrațiile de încovoiere în planul yOz
cuplate cu vibrațiile torsionale

$$\det \begin{bmatrix} Q_{1,2}^1 & Q_{1,5}^1 & Q_{1,6}^1 & Q_{1,7}^1 & Q_{1,8}^1 & Q_{1,9}^1 \\ Q_{3,2}^1 & Q_{3,5}^1 & Q_{3,6}^1 & Q_{3,7}^1 & Q_{3,8}^1 & Q_{3,9}^1 \\ Q_{4,2}^1 & Q_{4,5}^1 & Q_{4,6}^1 & Q_{4,7}^1 & Q_{4,8}^1 & Q_{4,9}^1 \\ R_{1,2}^D & R_{1,5}^D & R_{1,6}^D & R_{1,7}^D & R_{1,8}^D & R_{1,9}^D \\ R_{3,2}^D & R_{3,5}^D & R_{3,6}^D & R_{3,7}^D & R_{3,8}^D & R_{3,9}^D \\ R_{4,2}^D & R_{4,5}^D & R_{4,6}^D & R_{4,7}^D & R_{4,8}^D & R_{4,9}^D \end{bmatrix} = 0.$$

Metoda propusă mai sus dă rezultate bune, este flexibilă și poate fi aplicată cu ușurință pe diferite tipuri de sisteme de bare plane sau sisteme de țevi.

Această metodă este indicată pentru a fi utilizată în inginerie computațională, în special pentru sistemele complicate de bare.

Următorul pas va fi aplicarea metodei pentru sistemele de bare spațiale.

Pentru sistemele complexe de bare plane și spațiale, în viitor, această metodă va fi aplicată asociată cu teoria grafurilor, deoarece este dificil de identificat ciclurile și tipurile de noduri.

3.3. Aplicarea metodei matricelor de transfer în cazul barelor curbe

Metoda matricelor de transfer pentru sisteme de bare drepte de secțiune constantă poate fi aplicată și în cazul studiului vibrațiilor barelor curbe. Acestea pot fi approximate printr-o înlanțuire a unui număr mare de bare drepte (coarde). Evident că, pentru o bună aproximare, numărul de bare drepte (coarde) trebuie să fie suficient de mare.

Metoda a fost aplicată, pentru verificare, în cazul unei bare curbe plane în formă de semicerc, cu diametrul de 500 mm și grosimea barei de 10 mm (Figura 3.3.1)

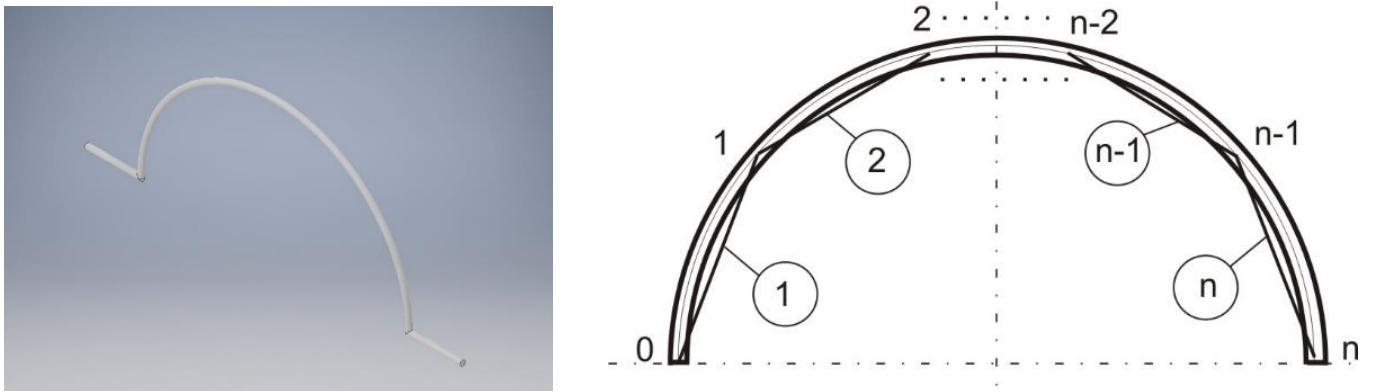


Figura 3.3.1. Cadrul semicircular aproximat cu un sistem de bare drepte.

S-a considerat că acest cadru semicircular este încastrat la capete. Așa cum s-a considerat la metoda matricelor de transfer axa longitudinală a barelor drepte este axa Oy , iar barele sunt conținute în planul xOy . Axa Oz este perpendicular pe planul cadrului.

Fiind un sistem de bare plan, vibrațiile de încovoiere în planul cadrului semicircular (adică pe direcția Ox) se vor cupla cu vibrațiile axiale (în lungul axei Oy) și se separă de vibrațiile de încovoiere perpendicular pe planul cadrului (adică pe direcția Oz) care se vor cupla cu vibrațiile torsionale (în jurul axei Oy). Aceste vibrații se vor studia separat. Dintre matricele speciale de trecere în calcule intervine matricea de schimbare a direcției de parcurgere, în punctele de conexiune a două bare drepte.

Aplicând metoda matricelor de transfer pentru vibrațiile de încovoiere în planul cadrului semicircular cuplate cu vibrațiile axiale, scriind condițiile la limită, se obține relația matriceală între vectorii de stare de la capete

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{M_z}{\alpha_{ix}^2 EI_z} \\ \frac{F_x}{\alpha_{ix}^3 EI_z} \\ 0 \\ \frac{F_y}{\alpha_{cy} EA_{xz}} \end{Bmatrix}_3^l = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} & Q_{1,6} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} & Q_{2,5} & Q_{2,6} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} & Q_{3,5} & Q_{3,6} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} & Q_{4,5} & Q_{4,6} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} & Q_{5,5} & Q_{5,6} \\ Q_{6,1} & Q_{6,2} & Q_{6,3} & Q_{6,4} & Q_{6,5} & Q_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{M_z}{\alpha_{ix}^2 EI_z} \\ \frac{F_x}{\alpha_{ix}^3 EI_z} \\ 0 \\ \frac{F_y}{\alpha_{cy} EA_{xz}} \end{Bmatrix}_0^r$$

Procedând analog și aplicând metoda matricelor de transfer pentru vibrațiile de încovoiere perpendicular pe planul cadrului cuplate cu vibrațiile torsionale, scriind condițiile la limită, se obține relația matriceală între vectorii de stare de la capete

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_y}{\alpha_{ry}GI_{pxz}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M_x}{\alpha_{iz}^2EI_x} \\ \frac{F_z}{-\alpha_{iz}^3EI_x} \end{Bmatrix}_3^l = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} & Q_{1,6} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} & Q_{2,5} & Q_{2,6} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} & Q_{3,5} & Q_{3,6} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} & Q_{4,5} & Q_{4,6} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} & Q_{5,5} & Q_{5,6} \\ Q_{6,1} & Q_{6,2} & Q_{6,3} & Q_{6,4} & Q_{6,5} & Q_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_y}{\alpha_{ry}GI_{pxz}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M_x}{\alpha_{iz}^2EI_x} \\ -\frac{F_z}{\alpha_{iz}^3EI_x} \end{Bmatrix}_0^r, ..$$

Condițiile ca sistemele să admită soluții nenule sunt

- pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale

$$\det \begin{bmatrix} Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,6} \\ Q_{2,3} & Q_{2,4} & Q_{2,6} \\ Q_{5,3} & Q_{5,4} & Q_{5,6} \end{bmatrix} = 0,$$

- pentru vibrațiile de încovoiere din planul yOz cuplate cu vibrațiile de torsiune

$$\det \begin{bmatrix} Q_{1,2} & Q_{1,5} & Q_{1,6} \\ Q_{3,2} & Q_{3,5} & Q_{3,6} \\ Q_{4,2} & Q_{4,5} & Q_{4,6} \end{bmatrix} = 0,$$

S-au obținut astfel frecvențele proprii ale vibrațiilor. Numărul de bare drepte, care alcătuiesc sistemul ce aproximează bara semicirculară, a fost variat de la 2 la 100. Cu cât numărul de bare drepte din sistemul echivalent era mai mare cu atât valorile frecvențelor proprii erau mai apropiate de o valoare fixă.

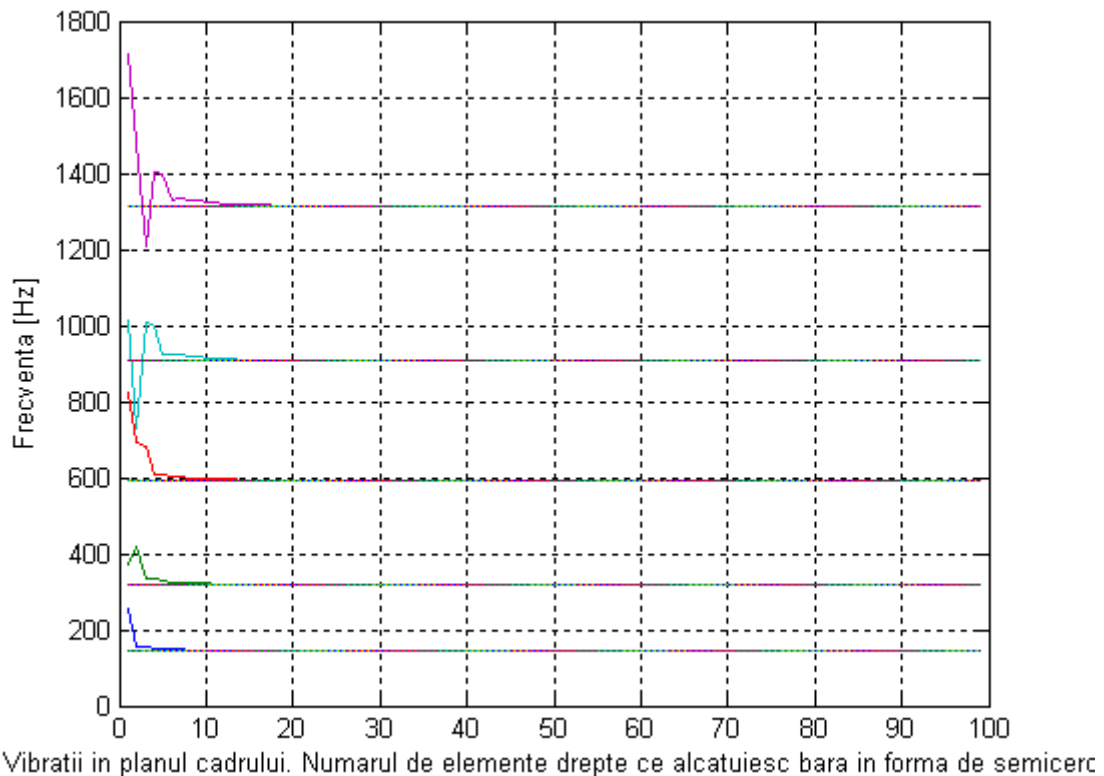


Figura 3.3.7. Comparație între variațiile primelor 5 frecvențe proprii cu numărul de elemente drepte

Pentru exemplificare a fost studiată variația frecvențelor proprii în funcție de numărul de elemente din sistemul echivalent.

Se poate vedea că, pentru o bună precizie, numărul de bare drepte care aproximează bara în formă de semicerc trebuie să fie mai mare de 30. Dacă numărul de bare drepte este mic (de exemplu sub 10) erorile de calcul sunt foarte mari.

Pentru a verifica precizia rezultatelor obținute aproximând o bară semicirculară cu un sistem echivalent de bare drepte prin aplicarea metodei matricelor de transfer, rezultatele obținute au fost comparate cu rezultatele obținute prin aplicarea altei metode aproximative și anume metoda elementului finit.

Au fost studiate vibrațiile unei bare plane semicirculare care are la ambele capete câte o bară dreaptă de aceeași grosime cu cadrul semicircular și orientată pe direcția diametrului. Diametrul semicercului este 500 mm, lungimea fiecărei bare din capete este 100 mm. Grosimea barei este 10 mm, ca în figură. Cadrul este încastrat la capete. S-a considerat că sistemul de bare drepte echivalent are 100 de elemente. În total cadrul are deci 102 elemente.

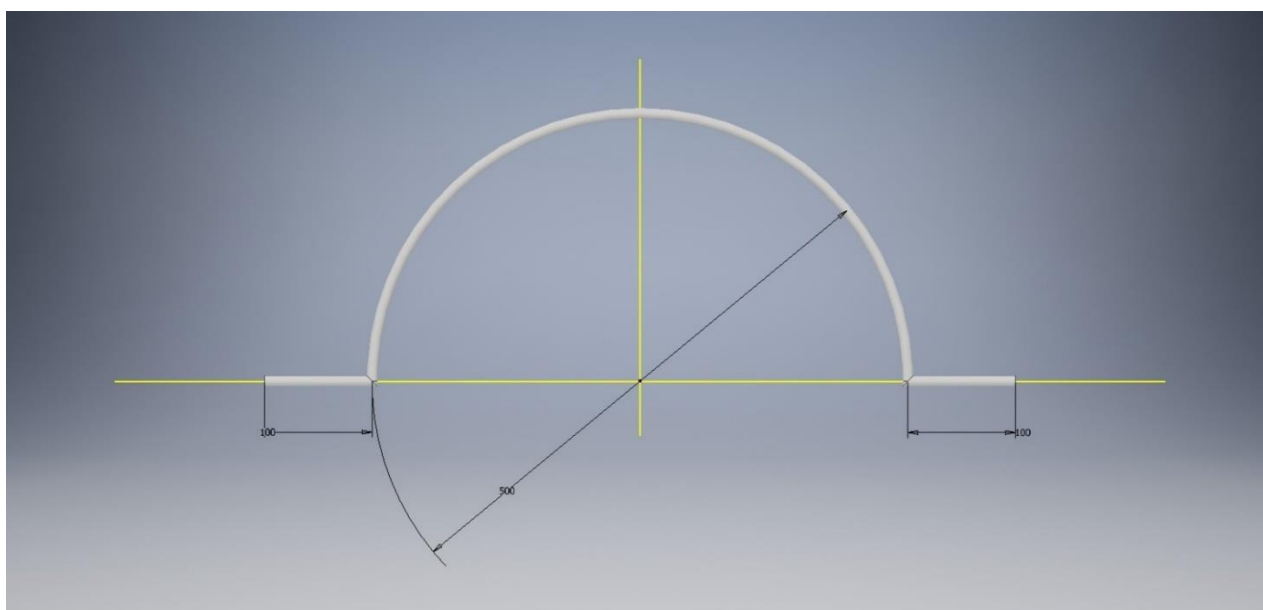


Figura 3.3.8. Cadrul pentru verificarea rezultatelor obținute aproximând cadrul circular cu un sistem de bare drepte.

Tabelul 2. Primele cinci frecvențe proprii pentru bara curbă

Nr. mod	Vibrații de încovoiere în planul cadrului cuplate cu vibrațiile axiale			Vibrații de încovoiere perpendicular pe planul cadrului cuplate cu vibrațiile de torsiune		
	Metoda matricelor de transfer (MMT) (Hz)	Metoda elementului finit (MEF) (Hz)	Eroarea [%]	Metoda matricelor de transfer (MMT) (Hz)	Metoda elementului finit (MEF) (Hz)	Eroarea [%]
1	110,21	109,79	0,38	38,55	39,09	3,93
2	256,17	265,00	3,33	123,01	116,45	5,63
3	287,77	291,50	1,28	264,72	256,29	3,29
4	305,86	321,50	4,86	411,79	403,24	2,12
5	539,07	529,84	1,74	522,04	520,24	0,34

După cum se poate observa valorile frecvențelor proprii obținute aplicând metoda matricelor de transfer pentru un sistem de bare drepte echivalent conduce la rezultate apropiate de cele obținute prin aplicarea metodei elementului finit. Eroarea este sub 5%, la unele moduri proprii eroarea este sub 1%.

Metoda matricelor de transfer oferă rezultate bune, este flexibilă și poate fi aplicată cu ușurință pe diferite tipuri de sisteme de bare plane sau sisteme de conducte. Această metodă este indicată pentru a fi utilizată în ingineria computațională, în special pentru sistemele complicate de bare.

3.4. Aplicarea metodei matricelor de transfer în cazul barelor drepte cu secțiune variabilă

Barele cu secțiune transversală variabilă apar în multe probleme curente din construcția de mașini și construcții industriale.

Cu ajutorul metodelor aproximative poate fi abordată problema determinării frecvențelor proprii și a modurilor proprii de vibrații de încovoiere (transversale) pentru o bară privită ca mediu continuu, cu secțiune plină, variabilă liniar.

Aproximarea barei cu secțiune continuu variabilă cu o bară cu secțiune variabilă în trepte și aplicarea metodei matricelor de transfer este una dintre metodele aproximative în studiul vibrațiilor de încovoiere.

Pentru metoda aproximativă propusă se pot utiliza programe de calcul încât să se obțină valorile numărului dorit de pulsații proprii și modurile proprii de vibrație corespunzătoare pulsațiilor dorite. Metoda propusă va fi aplicată în cazul concret al unei bare cu secțiune transversală continuu variabilă.

Rezultatele obținute prin metoda aproximativă propusă sunt comparate cu rezultatele obținute prin altă metodă aproximativă și anume metoda elementului finit.

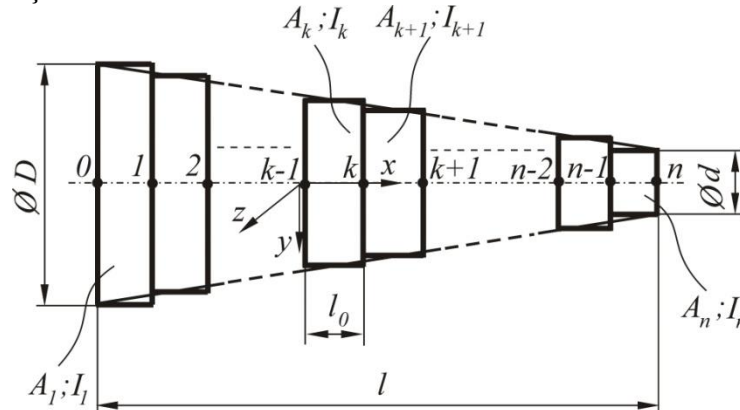


Figura 3.4.1. Aproximarea barei drepte cu secțiune continuu variabilă cu o bară dreaptă cu secțiune variabilă în trepte

Metoda de față constă în aproximarea barei drepte cu secțiune continuu variabilă cu o bară dreaptă cu secțiune variabilă în trepte. Bara dreaptă conică se împarte în bare (elemente) cilindrice cu secțiune constantă. Numărul de elemente cu secțiune constantă care înlocuiesc bara tronconică depinde de utilizator. Influența numărului de elemente cu secțiune constantă, în care se discretizează bara tronconică, asupra rezultatelor calculului va fi studiată mai jos.

Punctele de pe fibra medie, care separă două elemente se numesc noduri. Nodurile se numerează plecând de la numărul 0 de la extremitatea din stânga. Numărătoarea elementelor începe cu numărul 1 din partea stângă.

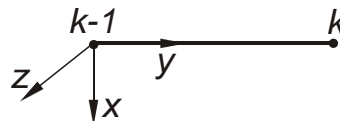


Figura 3.4.2. Alegerea axelor

Pentru un element al barei, de secțiune circulară constantă, care execută vibrații de încovoiere, cu axele alese ca în figura 3.4.2, între vectorii de stare de la capetele elementului k , $\{q\}_k^l$ la stânga și $\{q\}_{k-1}^r$ la dreapta, se poate scrie relația matriceală

$$\{q\}_k^l = [A]_k \{q\}_{k-1}^r.$$

S-au folosit notațiile (cunoscute deja din paragrafele anterioare):

Saltul de secțiune apare la trecerea de la un element la altul. Se introduce o matrice de salt. Între vectorii de stare din stânga și din dreapta nodului k se poate scrie relația matriceală:

$$\{q\}_k^r = [B]_k \{q\}_k^l.$$

Matricea pătrată (4x4), notată $[B]_k$, din relația de mai sus se numește matrice de salt în secțiunea k . Este o matrice rară. Elementele nenule ale acestei matrice sunt:

$$B_{1,1} = 1; \quad B_{2,2} = \sqrt[4]{\frac{I_{k+1} A_k}{I_k A_{k+1}}}; \quad B_{3,3} = \sqrt{\frac{A_k I_k}{A_{k+1} I_{k+1}}}; \quad B_{4,4} = \sqrt[4]{\frac{A_k^3 I_k}{A_{k+1}^3 I_{k+1}}}$$

în care:

- A_k, I_k sunt aria secțiunii transversale, respectiv momentul de inerție al secțiunii pentru elementul k ;
- A_{k+1}, I_{k+1} sunt aria secțiunii transversale, respectiv momentul de inerție al secțiunii pentru elementul $k+1$.

Se scriu relații din tipurile de mai sus pentru fiecare element și pentru fiecare nod în care apare salt de secțiune.

Se înlocuiesc succesiv și se obține o relație matriceală între vectorii de stare din nodul n (punctul de sosire), $\{q\}_n^l$ și nodul 0 (punctul de plecare), $\{q\}_0^r$:

$$\{q\}_n^l = [Q] \{q\}_0^r$$

Matricea pătrată (4x4), notată $[Q]$, se numește matrice de transfer pentru bara cu secțiune variabilă în trepte.

În funcție de tipul de rezemare a barei conice, se scriu condițiile la capete și, din condiția ca sistemul algebric obținut să admită soluții nenule, se obține ecuația pulsațiilor proprii care se rezolvă numeric. Se obțin astfel frecvențele proprii.

Deși este o metodă aproximativă, această metodă sigur este bună. Este interesant de studiat care este numărul minim de elemente cu secțiune constantă în care trebuie divizată bara tronconică astfel încât eroarea de calcul să se situeze la un nivel scăzut.

Pentru a verifica metoda aproximativă propusă, aceasta a fost aplicată în cazul concret al unei bare drepte cu secțiune continuu variabilă. De asemenea, pentru a verifica corectitudinea rezultatelor și pentru a putea face comparații complete a rezultatelor teoretice, a fost aplicată și metoda elementului finit (FEM).

Datele tehnice ale barei: bara este executată din oțel, cu densitatea $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$; modulul de elasticitate longitudinal $E = 21 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; lungimea $l = 0.5 \text{ m}$; diametrul mare (în nodul 0) $d_0 = 0.03 \text{ m}$, diametrul mic (în nodul 1) $d_1 = 0.005 \text{ m}$. Conicitatea este în acest caz $\alpha = 0.05$ (5%).

Studiul a fost efectuat în două situații: bară încastrată la ambele capete și bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt.

Bară tronconică încastrată la ambele capete

Pentru bara încastrată la ambele capete condițiile la limită sunt:

$$\begin{aligned} x = 0, Y = 0, \varphi = 0; \\ x = l, Y = 0, \varphi = 0. \end{aligned}$$

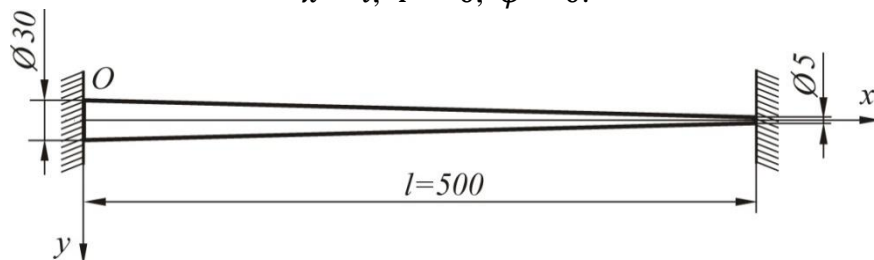


Figura 3.4.3. Bară tronconică încastrată la ambele capete

Au fost calculate primele 5 frecvențe proprii de vibrație.

Aplicând metoda aproximativă bazată pe metoda matricelor de transfer (cu 100 de elemente) s-au obținut pentru frecvențele proprii valorile din tabelul de mai jos:

Tabelul 3. Primele cinci frecvențe proprii pentru bara încastrată la ambele capete

Modul propriu de vibrație	Metoda matricelor de transfer cu 100 de elemente [Hz]	Metoda elementului finit [Hz]
Modul 1	293.38	297.16
Modul 2	781.93	790.52
Modul 3	1509.88	1539.75
Modul 4	2477.77	2510.24
Modul 5	3686.45	3743.95

Bara a fost împărțită în 2, 3, 4, ..., 99, 100 de tronsoane (elemente) cu secțiunea (diametrul) constantă. Pentru fiecare caz au fost calculate primele 5 frecvențe proprii de vibrație. Se observă că atunci când bara conică a fost divizată într-o succesiune de bare cilindrice cu secțiune constantă.

Numărul de elemente de la care valorile frecvențelor proprii aproape că nu mai variază este însă mai mare decât în cazul barelor curbe. La valori mici ale numărului de elemente cilindrice, valorile frecvențelor proprii variază foarte mult.

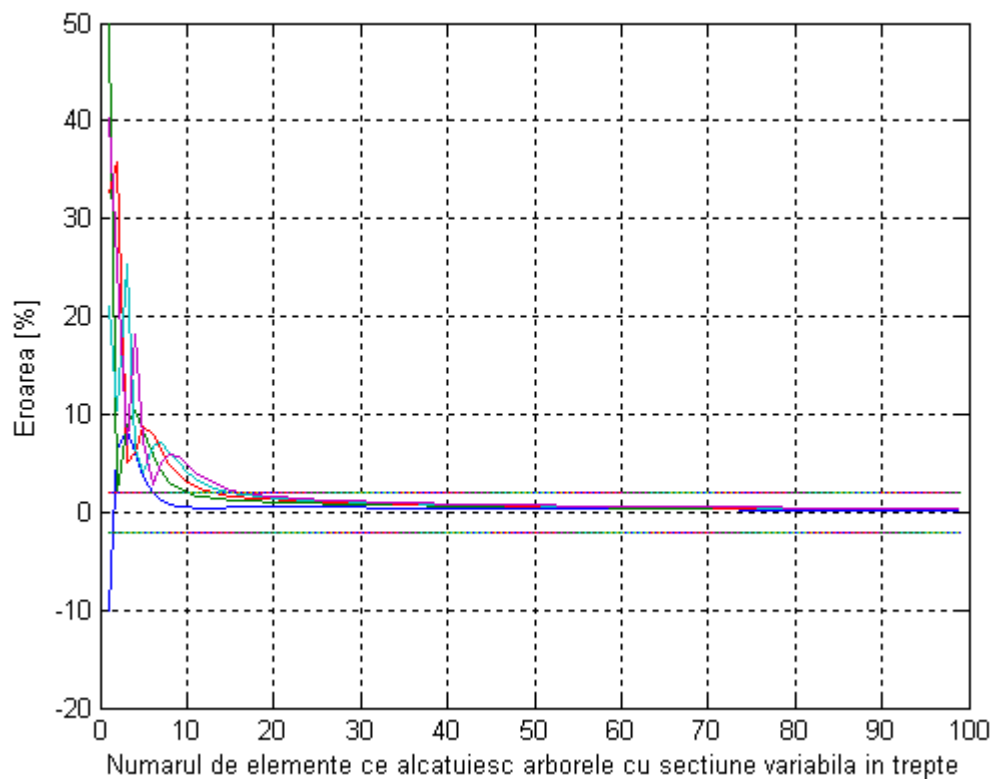


Figura 3.4.9. Eroarea de calcul a primelor 5 frecvențe proprii în funcție de numărul de elemente

În figura 3.4.9 este prezentată variația erorii de calcul ce apare prin aproximarea barei tronconice cu o bară cu secțiunea variabilă în trepte, pentru primele 5 frecvențe proprii. Se poate observa că eroarea de calcul este sub 2 % dacă numărul de elemente (tronsoane) este mai mare de 20. Dacă numărul de elemente (tronsoane) este mai mare de 50, eroarea de calcul scade sub 1 %.

Se poate observa și aici că, dacă bara tronconică se aproximează cu o bară cu secțiunea variabilă în trepte, iar numărul de tronsoane este mic, riscul de a obține erori foarte mari este ridicat.

Bară tronconică încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt

Se consideră că bara este încastrată la capătul din stânga (unde diametrul este mai mare) și liberă la capătul din dreapta (Figura 3.4.11). În acest caz, condițiile la capete sunt:

- în capătul din stânga deplasarea și rotația secțiunii sunt egale cu zero ($v_x = 0$, $\varphi_z = 0$);
- în capătul din dreapta momentul încovoietor și forța tăietoare sunt egale cu zero ($M_z = 0$, $F_x = 0$).

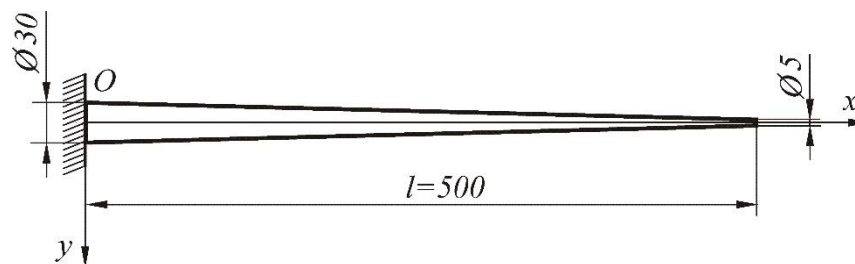


Figura 3.4.11. Bară tronconică încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt

La fel ca în cazul barei încastrate la ambele capete, a fost aplicată metoda aproximativă de calcul. Bara a fost de asemenea împărțită în 2, 3, 4, ..., 99, 100 de tronsoane cu secțiunea constantă. Pentru fiecare caz au fost calculate primele 5 frecvențe proprii de vibrație. A fost aplicată și metoda elementului finit. Rezultatele sunt trecute în tabelul de mai jos.

Tabelul 4. Primele cinci frecvențe proprii pentru bara încastrată la ambele capete

Modul propriu de vibrație	Metoda matricelor de transfer cu 100 de elemente [Hz]	Metoda elementului finit [Hz]
Modul 1	162.52	161.11
Modul 2	457.38	455.43
Modul 3	962.91	968.78
Modul 4	1698.90	1713.36
Modul 5	2671.46	2687.34

La fel ca în cazul barei încastrate la ambele capete, se poate observa că, de la un număr de tronsoane în sus, valorile frecvențelor proprii calculate cu metoda aproximativă se stabilizează ca valoare (aproape că nu mai variază) și sunt apropiate de valorile calculate cu metoda elementului finit. Totuși, spre deosebire de bara încastrată la ambele capete, numărul limită de tronsoane de la care eroarea de calcul se încadrează în limite acceptabile este mai mare.

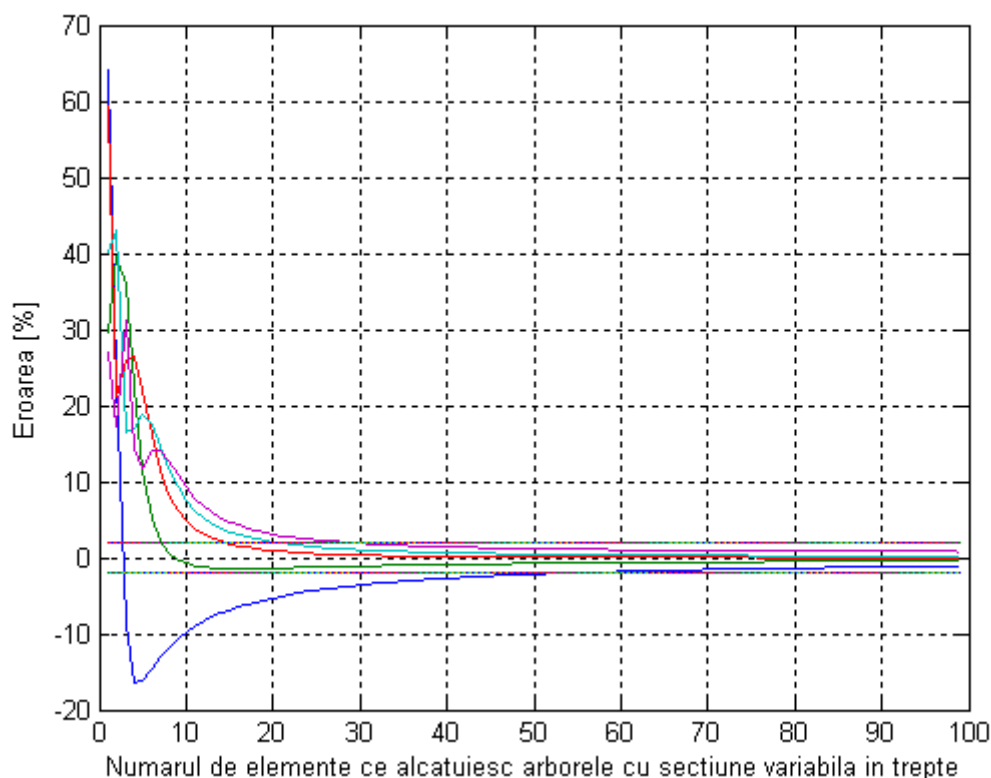


Figura 3.4.17. Eroarea de calcul a primelor 5 frecvențe proprii în funcție de numărul de elemente

Numărul de elemente de la care valorile frecvențelor proprii aproape că nu mai variază este însă, ca și în cazul barei încastrate la ambele capete, mai mare decât în cazul barelor curbe. La valori mici ale numărului de elemente cilindrice, valorile frecvențelor proprii variază foarte mult.

În figura 3.4.17 este prezentată variația erorii de calcul ce apare prin aproximarea barei tronconice cu o bară cu secțiunea variabilă în trepte, pentru primele 5 frecvențe proprii. Se poate observa că eroarea de calcul este sub 2 % dacă numărul de elemente (tronsoane) este mai mare de 40. Dacă numărul de elemente (tronsoane) este mai mare de 60, eroarea de calcul scade sub 1 %.

3.5. Aplicarea metodei matricelor de transfer în studiul vibrațiilor unui arbore cotit fisurat

În vederea aplicării metodei matricelor de transfer prezentate mai trebuie introduse câteva matrice de trecere specifice configurației și funcționării arborelui cotit.

Matricea de trecere peste un reazem elastic

Se referă la vibrațiile de încovoiere în planurile Oxy și Oyz și la vibrațiile longitudinale. Între vectorii de stare stânga și vectorii de stare din dreapta ai secțiunii k poate fi scrisă relația matriceală:

$$\{q\}_k^r = [E]_k \{q\}_k^l \quad (1)$$

unde, matricea pătrată (6x6), notată $[E]_k$ este matricea de trecere peste un reazem elastic în nodul k .

Elementele nenule ale acestei matrice sunt:

-pentru vibrațiile de încovoiere în planul Oxy cuplate cu vibrațiile longitudinale:

$$E_{1,1} = E_{2,2} = E_{3,3} = E_{4,4} = E_{5,5} = E_{6,6} = 1; E_{4,1} = -\frac{K_x}{\alpha_{ix}^3 EI_z}; E_{6,5} = \frac{K_y}{\alpha_{cy} EA_{xz}};$$

-pentru vibrațiile de încovoiere în planul Oyz cuplate cu vibrațiile torsionale:

$$E_{1,1} = E_{2,2} = E_{3,3} = E_{4,4} = E_{5,5} = E_{6,6} = 1; E_{6,3} = -\frac{K_z}{\alpha_{iz}^3 EI_x},$$

unde: K_x, K_y, K_z sunt constantele elastice ale lagărelor respectiv pe direcțiile Ox, Oy, Oz .

Matricea de trecere peste un disc

Dacă într-un nod k există un disc cu masa concentrată m_k și momente de inerție $J_x, J_y (J_p), J_z$ față de axele sistemului de referință, alese atunci când a fost prezentată metoda, atunci între vectorii de stare stânga și dreapta nodului k poate fi scrisă relația matriceală:

$$\{q\}_k^r = [D]_k \{q\}_k^l \quad (2)$$

unde, matricea pătrată (12x12), notată $[D]_k$, este matricea de trecere peste disc. Este o matrice rară, elementele nenule fiind:

$$\begin{aligned} D_{1,1} &= D_{2,2} = D_{3,3} = D_{4,4} = D_{5,5} = D_{6,6} = \\ D_{7,7} &= D_{8,8} = D_{9,9} = D_{10,10} = D_{11,11} = D_{12,12} = 1; \\ D_{3,2} &= -\frac{J_z \alpha^3}{\rho A_{xz}}; D_{4,1} = \frac{m_k \alpha_{ix}}{\rho A_{xz}}; D_{6,5} = -\frac{m_k \alpha_{cx}}{\rho A_{xz}}; D_{8,7} = -\frac{J_p \alpha_{ry}}{\rho I_{pxz}}; \\ D_{11,10} &= -\frac{J_x \alpha^3}{\rho A_{xz}}; D_{12,9} = \frac{m_k \alpha_{iz}}{\rho A_{xz}}. \end{aligned}$$

Matricea de trecere peste o contragreutate

Specific pentru arborii cotiți sunt contragreutațiile. Dacă arborele cotit are contragreutați trebuie construită o matrice specială de trecere peste contragreutate (Figura 3.5.1). Se consideră că contragreutatea este prinsă de un braț al arborelui cotit. Se face reducerea sistemului forțelor de inerție în centrul de masă al contragreutații. Se calculează reacțiunile în punctul brațului în care se consideră că este fixată rigid contragreutatea. Se calculează elementele matricei de trecere peste contragreutate.

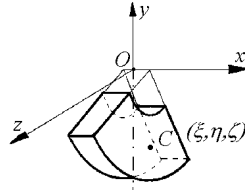


Figura 3.5.1. Contragreutate

Se notează matricea de trecere peste contragreutate cu $[G]_k$. Este o matrice rară (12x12). Relația matriceală în nodul k , unde este contragreutatea cu masa m_c , va fi:

$$\{q\}_k^r = [G]_k \{q\}_k^l \quad (3)$$

Elementele nenule ale matricei $[G]_k$ sunt:

$$\begin{aligned} G_{1,1} = G_{2,2} = G_{3,3} = G_{4,4} = G_{5,5} = G_{6,6} = G_{7,7} = G_{8,8} = G_{9,9} = G_{10,10} = G_{11,11} = G_{12,12} = 1 ; \\ G_{3,1} = -\frac{m_c \eta \alpha_{ix}^2}{\rho A_{xz}} ; G_{3,2} = -\frac{J_{oz} \alpha_{ix}^3}{\rho A_{xz}} ; G_{3,7} = -\frac{J_{oyz} \alpha_{ry}^2 G}{\rho \alpha_{ix}^2 EI_z} ; G_{4,1} = \frac{m_c \alpha_{ix}}{\rho A_{xz}} ; G_{4,2} = \frac{m_c \alpha_{ix}^2}{\rho A_{xz}} ; G_{4,7} = \frac{m_c \zeta \alpha_{ry}^2 G}{\rho \alpha_{ix}^3 EI_z} ; \\ G_{6,5} = -\frac{m_c \alpha_{cy}}{\rho A_{xz}} ; G_{6,10} = \frac{m_c \zeta \alpha_{iz}^5 I_x}{\alpha_{cy} \rho A_{xz}^2} ; G_{8,1} = -\frac{m_c \zeta \alpha_{ix}^4 EI_z}{\alpha_{ry} GI_{pxy} \rho A_{xz}} ; G_{8,2} = -\frac{J_{oyz} \alpha_{ix}^5 EI_z}{\alpha_{ry} GI_{pxy} \rho A_{xz}} ; G_{8,7} = -\frac{J_{oy} \alpha_{ry}}{\rho I_{pxz}} ; \\ G_{11,5} = \frac{m_c \zeta \alpha_{cy}^2}{\alpha_{iz}^2 \rho I_x} ; G_{11,9} = -\frac{m_c \eta \alpha_{iz}^2}{\rho A_{xz}} ; G_{11,10} = -\frac{J_{oz} \alpha_{iz}^3}{\rho A_{xz}} ; G_{12,9} = \frac{m_c \alpha_{iz}}{\rho A_{xz}} ; G_{12,10} = \frac{m_c \eta \alpha_{iz}^2}{\rho A_{xz}} . \end{aligned}$$

Matricea de trecere peste o fisură transversală

Se consideră un arbore cu raza R și o fisură transversală de adâncime a (Figura 2.4.2). În secțiunea fisurii, arborele este încărcat cu forța axială P_1 , forțele tăietoare P_2 și P_3 , momentele încovoietoare P_4 și P_5 și momentul de torsiune P_6 . Pe baza celor expuse în subcapitolul 2.4 și utilizând aceleași notații se calculează coeficienții de flexibilitate locali c_{ij} datorăți fisurii:

$$c_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a J(\alpha) d\alpha ; i, j \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad (4)$$

Folosind relațiile de mai sus pentru coeficienții de flexibilitate locali se pot exprima deplasările liniare și unghiulare între partea stângă și partea dreaptă a fisurii. Astfel, matricea de transfer peste fisura transversală, $[C]_k$, se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & C_{1,4} & 0 & 0 & 0 & C_{1,8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C_{2,3} & 0 & 0 & C_{2,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1,11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{5,3} & 0 & 1 & C_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{5,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{7,4} & 0 & 0 & 1 & C_{7,8} & 0 & 0 & 0 & C_{7,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{9,8} & 1 & 0 & 0 & C_{9,12} \\ 0 & 0 & C_{10,3} & 0 & 0 & C_{10,6} & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{10,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \quad (10)$$

unde elementele matricei sunt următoarele:

$$C_{1,4} = -c_{22} \alpha_{ix}^3 EI_z ; C_{1,8} = c_{26} \alpha_{ry} GI_{pxz} ;$$

$$C_{2,3} = c_{55} \alpha_{ix} EI_z; C_{2,6} = -\frac{c_{51} \alpha_{cz} EA_{xz}}{\alpha_{ix}}; C_{2,11} = -\frac{c_{45} \alpha_{iz}^2 EI_z}{\alpha_{ix}}$$

$$C_{5,3} = -c_{15} \alpha_{ix}^2 EI_x; C_{5,6} = c_{11} \alpha_{cz} EA_{xz}; C_{5,11} = c_{14} \alpha_{iz}^2 EI_x$$

$$C_{7,4} = -c_{62} \alpha_{ix}^3 EI_z; C_{7,8} = c_{66} \alpha_{ry} GI_{pxz}; C_{7,12} = -c_{63} \alpha_{iz}^3 EI_x$$

$$C_{9,8} = c_{36} \alpha_{ry} GI_{pxz}; C_{9,12} = -c_{33} \alpha_{iz}^3 EI_x$$

$$C_{10,3} = -\frac{c_{45} \alpha_{ix}^2 EI_z}{\alpha_{iz}}; C_{10,6} = \frac{c_{41} \alpha_{cz} EA_{xz}}{\alpha_{iz}}; C_{10,11} = c_{44} \alpha_{iz} EI_x$$

Prin urmare, relația dintre vectorul de stare din stânga și vectorul de stare din dreapta ai unei secțiuni fisurate k , $\{q\}_k^l$, și respectiv $\{q\}_k^r$, are următoarea formă:

$$\{q\}_k^r = [C]_k \{q\}_k^l \quad (11)$$

Metoda prezentată aici a fost aplicată în cazul concret al unui arbore cotit al unui motor cu ardere internă (Figura 3.5.2 și Figura 3.5.3).

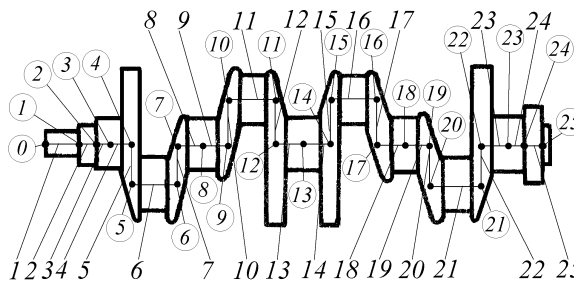


Figura 3.5.3. Aplicarea metodei propuse la arborele cotit testat

Este un arbore cotit cu patru coturi în linie. Se studiază cazul unui arbore cotit liber la ambele capete și echipat cu volant. Arborele cotit este rezemat elastic cu manivelele așezate în plan vertical.

Deoarece manivelele sunt dispuse în același plan, care conține axa longitudinală a arborelui cotit, vibrațiile de încovoiere în planul xOy cuplate cu vibrațiile longitudinale sunt separate de vibrațiile de încovoiere în plan yOz cuplate cu vibrațiile de torsiune.

Arborele cotit studiat este montat elastic în cinci lagăre radiale și două lagăre axiale care corespund zonei de rezemare mediană. Se consideră că în fiecare lagăr radial sistemul de forțe elastice se reduce la o forță rezultantă unică situată într-un plan median al fusului de rezemare perpendicular pe axa longitudinală a arborelui cotit. Această forță elastică ce rezultă este proiectată în acest plan pe două direcții perpendiculare Ox și Oz .

În cazul lagărelor axiale se consideră că sistemul de forțe elastice se reduce la o forță unică, rezultanta. Se aplică pe axa longitudinală a arborelui cotit într-o secțiune transversală mediană a fusului central de rezemare.

Din literatura de specialitate, pentru constantele elastice ale lagărelor au fost alese valorile $K_x = 2 \times 10^8$ N/m; $K_y = 2 \times 10^8$ N/m; $K_z = 2 \times 10^8$ N/m.

Apoi a fost studiată prezența unei fisuri transversale într-un fus palier al sistemului. S-a presupus că fisura transversală este deschisă. Pentru diferite valori ale adâncimii fisurii și locațiilor de-a lungul sistemului, s-au obținut, coeficienții locali de flexibilitate.

Apoi primele cinci frecvențe naturale f_{xj} (pentru vibrațiile de încovoiere în planul xOy) și f_{zj} (pentru vibrații de încovoiere în planul yOz), $j = \overline{1,5}$, ale vibrațiilor de încovoiere au fost determinate prin metoda matricelor de transfer descrisă în paragrafele de mai sus. Se observă în figurile 3.5.4-9 pentru toate cazurile, că prezența unei fisuri transversale conduce la scăderea frecvențelor proprii. După cum era de așteptat, această scădere este mai mare odată cu creșterea adâncimii fisurii.

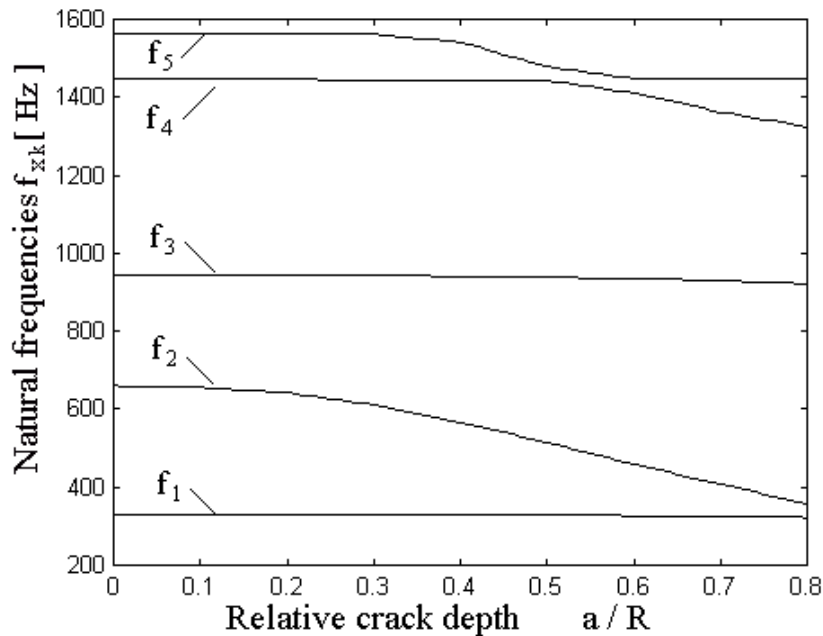


Figura 3.5.4. Variația frecvențelor proprii de încovoiere, f_x , cu adâncimea fisurii în nodul 24

De asemenea, se observă că frecvențele naturale f_{xj} au scăzut mai mult decât f_z din cauza formei și poziției fisurii.

În fig. 3.5.4 și 3.5.5 a fost reprezentată variația frecvențelor naturale când a fost prezentă fisura în nodul 24 (fus palier lângă volant). Se poate observa o diminuare amplă a tuturor frecvențelor naturale atunci când adâncimea fisurii crește. Cele mai mari reduceri au loc la a doua și a patra frecvență proprie.

În fig. 3.5.6 și 3.5.7 variația frecvențelor naturale a fost reprezentată atunci când fisura a fost prezentă în nodul 4 (cel mai îndepărtat fus palier de volant al arborelui cotit). Tot în acest caz toate frecvențele scad, dar reducerile sunt mai mici decât în cazul nodului 24.

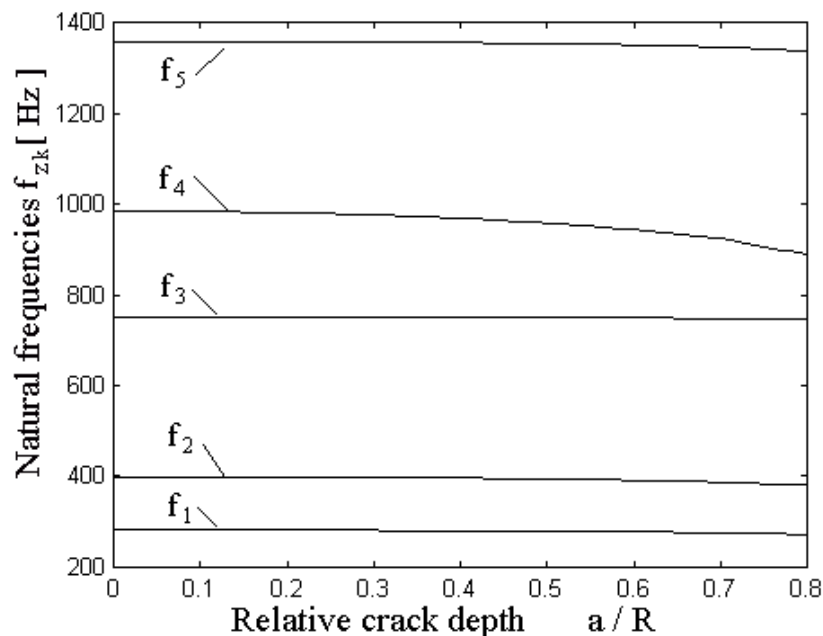


Figura 3.5.5. Variația frecvențelor proprii de încovoiere, f_z , cu adâncimea fisurii în nodul 24

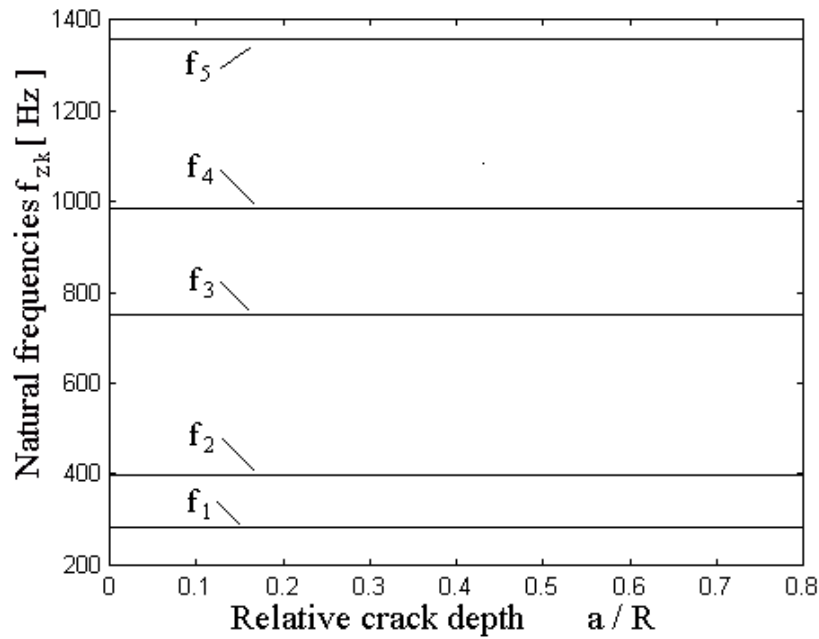


Figura 3.5.6. Variația frecvențelor proprii de încovoiere, f_x , cu adâncimea fisurii în nodul 4

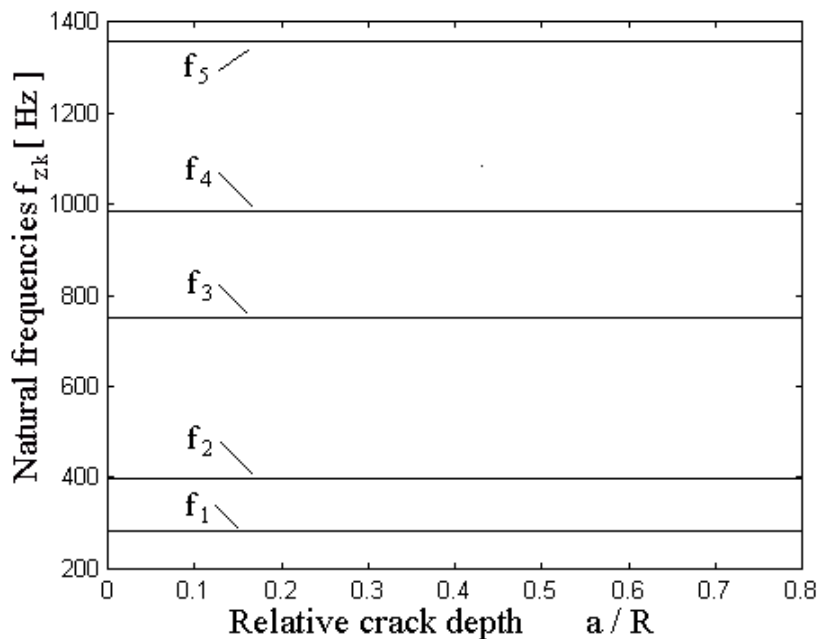


Figura 3.5.7. Variația frecvențelor proprii de încovoiere, f_z , cu adâncimea fisurii în nodul 4

Având în vedere unele locații și adâncimi pentru o fisură deschisă transversală, frecvențele proprii sunt stabilite prin metoda matricelor de transfer. Au fost reprezentate doar variațiile frecvențelor proprii ale vibrațiilor de încovoiere observând că o fisură se plasează în zona cu momentul încovoiator maxim (fusul palier de lângă volant) și conduce la cea mai mare variație relativă a frecvențelor proprii.

În baza acestor observații s-ar putea realiza o metodă de identificare pentru detectarea apariției unei fisuri într-un sistem arbore cotit-volant.

3.6. Aplicarea metodei matricelor de transfer în studiul vibrațiilor centrifugelor cu tamburul în consolă

În acest subcapitol este abordat un domeniu de cercetare avansată: studiul vibrațiilor centrifugelor industriale prin aplicarea metodei matricelor de transfer. Este stabilit un model de studiu considerând arborele ca mediu continuu. Sunt studiate vibrațiile de încovoiere cuplate cu vibrațiile axiale. Vor fi construite matricea de transfer și matricea de trecere. Va fi dezvoltat cazul vibrațiilor libere.

În cele ce urmează vor fi folosite notațiile:

τ_C^{in} - torsesor al sistemului forțelor de inerție, ale tamburului, în centrul de masă al tamburului;

\vec{F}^{in} - rezultanta sistemului forțelor de inerție;

\vec{M}_C^{in} , \vec{M}_O^{in} - moment rezultat al sistemului forțelor de inerție în raport cu centrul de masă, C și, respectiv, în raport cu punctul de fixare al tamburului, O ;

m - masa tamburului (inclusiv materialul de lucru);

\vec{a}_C - accelerația centrului de masă al tamburului;

\vec{K}_C - momentul cinetic în raport cu centrul de masă al tamburului;

\vec{r}_C - vector de poziție al centrului de masă al tamburului;

ξ , η , ζ - coordonate ale centrului de masă pe axele Ox , Oy și respectiv Oz ;

F_x^{in} , F_y^{in} , F_z^{in} - proiecții ale rezultantei sistemului forțelor de inerție pe axele Ox , Oy și respectiv Oz ;

M_{Ox}^{in} , M_{Oy}^{in} , M_{Oz}^{in} - proiecții ale momentului rezultat al sistemului forțelor de inerție pe axele Ox , Oy și respectiv Oz ;

v_x , v_y - deplasări (deformațiile) pe axele Ox și respectiv Oy ;

φ_z - rotație a secțiunii transversale a arborelui în jurul axei Oz ;

$V_x(y)$, $V_y(y)$, $\Phi_z(y)$ - simboluri pentru funcții de y ;

J_{Cy} , J_{Cz} - momente de inerție mecanice în raport cu axele Cy și respectiv Cz ;

J_{Cxz} , J_{Cyz} - produse de inerție mecanice în raport cu axele sistemului de coordonate cu originea în centrul de masă al tamburului;

ω_n - pulsație proprie de ordinul n ;

$\{q\}_k$ - vector de stare în nodul k ;

$[A]_k$ - matrice de transfer pentru elementul numărul k ;

$\{q\}_k^l$, $\{q\}_k^r$ - vectori de stare la stânga și respectiv la dreapta nodului k ;

$[H]_k$ - matricele de trecere în nodul k ;

$[Q]$ - matrice de transfer pentru sistemul arbore-tambur;

M_z - moment încovoietor;

F_x - forță tăietoare;

F_y - forță axială;

S , T , U , V - funcții Krilov - Rayleigh;

M , N - simboluri pentru prescurtare;

l_k - lungime a elementului numărul k ;

ρ - densitate a materialului arborelui;

A_k - arie a secțiunii transversale a elementului numărul k ;

E - modulul lui Young (modul de elasticitate longitudinal);

I_k - moment de inerție al secțiunii pentru elementul numărul k ;

$[B]_k$ - matrice de salt;

$[E]_k$ - matrice de trecere peste un lagăr elastic în nodul k ;

K_x , K_y - constante elastice ale lagărelor pe direcțiile Ox și, respectiv, Oy ;

$[D]_k$ - matricea de trecere peste tamburul fixat în nodul k ;

Ω - viteza unghiulară a arborelui.

Centrifuga este un sistem mecanic compus dintr-un arbore flexibil și un tambur montat pe arbore (Figura 3.6.1.a). Această mașină realizează procesul numit centrifugare. Acesta este un proces mecanic, care permite separarea componentelor unui amestec eterogen.

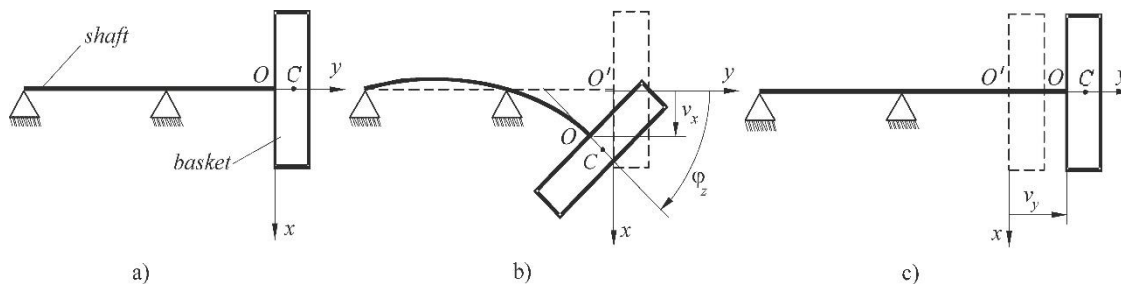


Figura 3.6.1. Centrifugă cu tamburul în consolă

Centrifuga poate fi orizontală sau verticală. În continuare este considerat cazul centrifugei orizontale.

Acest subcapitol are ca obiectiv îmbunătățirea studiului vibrațiilor centrifugei cu tamburul în consolă. Modelul centrifugei în vederea studiului vibrațiilor este arbore flexibil considerat a fi mediu continuu așezat pe două lagăre și un tambur fixat pe arbore. Arborele poate să efectueze vibrații de încovoiere într-un plan care conține centrul de masă al tamburului și axa longitudinală a arborelui (Figura 3.6.1.b) și vibrații axiale în lungul acestei axe (Figura 3.6.1.c). Alegând sistemul de axe prezentat în figura 3.6.1, cu axa Oy axă în lungul arborelui, vibrațiile de încovoiere vor fi în planul xOy (Figura 3.6.1.b) și vibrațiile axiale vor fi în lungul axei Oy (Figura 3.6.1.c). În acest subcapitol va fi utilizată metoda matricelor de transfer.

Scopul studiului vibrațiilor este acela de a calcula frecvențele proprii ale centrifugei. Cunoscând aceste frecvențe proprii, și de asemenea turațiile critice, va fi evitată funcționarea centrifugei la aceste turații sau în vecinătatea acestor turații.

Fiecare centrifugă are un tambur. Se consideră că tamburul este fixat pe arbore în punctul O (Figura 3.6.2).

În cazul centrifugelor, tamburul nu poate fi considerat un disc subțire și punctul de fixare al tamburului nu poate fi în centrul de masă al tamburului.

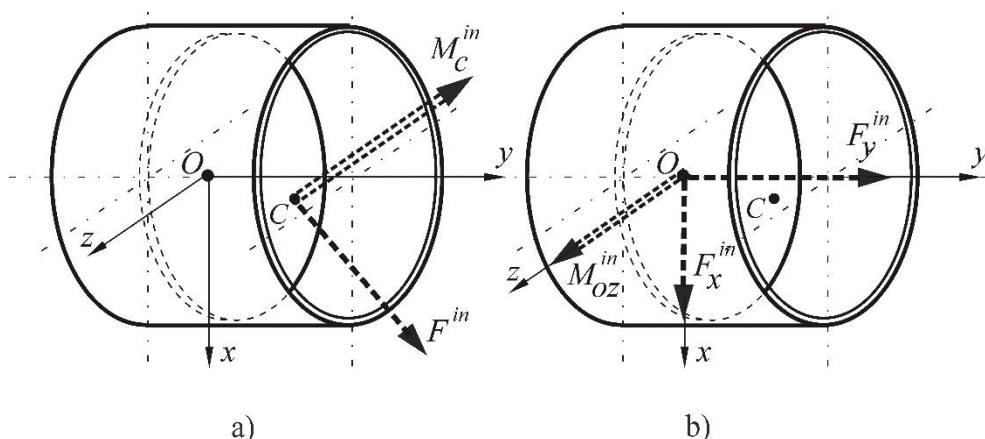


Figura 3.6.2. Tamburul

Se aplică principiul lui d'Alembert. Mai întâi reducerea sistemului forțelor de inerție ale tamburului va fi făcută în centrul de masă al tamburului (Figura 3.6.2.a):

$$\tau_C^{in} \begin{cases} \vec{F}^{in} = -m\vec{a}_C \\ \vec{M}_C^{in} = -\frac{d\vec{K}_C}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

Apoi, utilizând relația $\vec{M}_O^{in} = \vec{M}_C^{in} + \vec{r}_C \times \vec{F}^{in}$, momentul resultant al sistemului forțelor de inerție este calculat în raport cu punctul de fixare al tamburului, O .

Depunerile neuniforme ale materialului de lucru pe pereții tamburului constituie motivul pentru care centrul de masă al tamburului (incluzând și materialul de lucru) nu este plasat pe axa de rotație a centrifugei.

Vor fi studiate vibrațiile de încovoiere în planul care include centrul de masă al tamburului și axa de rotație ($\zeta = 0$) (Figura 3.6.1.b)

De asemenea, datorită rigidității mari, amplitudinea rotației secțiunii transversale φ_z are valori mici. ω_z^2 a fost neglijat în raport cu ε_z . În aceste condiții expresiile rezultantei și ale momentului resultant al forțelor de inerție pot fi scrise (Figura 3.6.2.b):

$$\begin{cases} F_x^{in} = m\omega^2 v_x - m\eta\omega^2 \varphi_z \\ F_y^{in} = m\omega^2 v_y + m\xi\omega^2 \varphi_z \\ F_z^{in} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} M_{Ox}^{in} = 0 \\ M_{Oy}^{in} = 0 \\ M_{Oz}^{in} = (J_{Cz}\omega^2 + m\xi^2\omega^2 + m\eta^2\omega^2)\varphi_z - m\eta\omega^2 v_x + m\xi\omega^2 v_y \end{cases} \quad (5)$$

În expresia (4) a lui \vec{F}^{in} pe direcția vibrațiilor axiale, pe axa Oy , apare termenul $m\xi\omega^2 \varphi_z$ care este un rezultat al vibrațiilor de încovoiere. Vibrațiile de încovoiere excită vibrații axiale. Deci vibrațiile de încovoiere și vibrațiile axiale trebuie studiate împreună. Aceste două tipuri de vibrații au unele frecvențe proprii comune.

Din expresiile rezultantei (4) și a momentului resultant (5) al forțelor de inerție rezultă că vibrațiile axiale și vibrațiile de încovoiere sunt cuplate. Deci se consideră că arborele este alcătuit din elemente drepte de secțiune constantă care efectuează vibrații de încovoiere într-un plan care conține centrul de masă al tamburului și axa longitudinală a arborelui și vibrații axiale în lungul acestei axe.

Sistemul arbore-tambur este împărțit în elemente drepte care au secțiune constantă și care nu sunt acționate de forțe concentrate sau momente.

Elementele obținute sunt numerotate în ordine pornind cu numărul 1 de la primul element din partea stângă (Figura 3.6.3). Sistemul va fi traversat de la stânga la dreapta pe fibra medie.

Așa cum s-a arătat în subcapitolele precedente, pentru fiecare nod j ($j=0, 1, \dots, n$) se scrie un vector de stare (matrice coloană) $\{q\}_j$. Pentru fiecare element k ($k=1, 2, \dots, n$) este scrisă matricea de transfer $[A]_k$. Relația matriceală pentru un element k este:

$$\{q\}_k = [A]_k \{q\}_{k-1} \quad (6)$$

În vectorii de stare pentru nodurile de la capetele sistemului, 0 și n , vor apărea condițiile la limită. În nodurile interioare, 1, 2, ..., $n-1$, pot interveni: salt de secțiune, tambur, lagăre elastice. Deci, într-un nod k pot fi definiți un vector de stare la stânga $\{q\}_k^l$ și un vector de stare la dreapta $\{q\}_k^r$. Relația matriceală într-un nod k poate fi scrisă:

$$\{q\}_k^r = [H]_k \{q\}_k^l \quad (7)$$

$[H]_k$ este matricea de trecere în nodul k și poate fi una dintre matricele: matrice de salt, matrice de trecere peste tambur, matrice de trecere peste un reazem elastic.

Așa cum a fost prezentat, pot fi scrise relațiile matriceale pentru fiecare nod și relațiile matriceale pentru fiecare element. Înlocuind succesiv este obținută relația matriceală între vectorii de stare de capete de la elementul n , $\{q\}_n^l$ și de la primul (punctul de start) $\{q\}_0^r$:

$$\{q\}_n^l = [Q] \{q\}_0^r, \quad (8)$$

unde, se scrie

$$[Q] = [A]_n [H]_{n-1} \cdots [A]_{k+1} [H]_k [A]_{k-1} \cdots [H]_1 [A]_1.$$

Matricea $[Q]$ este matricea de transfer pentru sistemul arbore-tambur.

Relația matriceală între vectorii de stare de la capetele unui element k , $\{q\}_{k-1}^r$ și respectiv $\{q\}_k^l$, poate fi scrisă:

$$\left\{ \begin{array}{c} v_x \\ -\frac{\varphi_z}{\alpha_i} \\ M_z \\ \alpha_i^2 EI_k \\ F_x \\ \alpha_i^3 EI_k \\ v_y \\ F_y \\ \alpha_c EA_k \end{array} \right\}_k^l = \begin{bmatrix} S & T & U & V & 0 & 0 \\ V & S & T & U & 0 & 0 \\ U & V & S & T & 0 & 0 \\ T & U & V & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N & M \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{array}{c} v_x \\ -\frac{\varphi_z}{\alpha_i} \\ M_z \\ \alpha_i^2 EI_k \\ F_x \\ \alpha_i^3 EI_k \\ v_y \\ F_y \\ \alpha_c EA_k \end{array} \right\}_{k-1}^r \quad (9)$$

unde: $S = [\cosh(\alpha_i l_k) + \cos(\alpha_i l_k)]/2$, $T = [\sinh(\alpha_i l_k) + \sin(\alpha_i l_k)]/2$, $U = [\cosh(\alpha_i l_k) - \cos(\alpha_i l_k)]/2$,

$$V = [\sinh(\alpha_i l_k) - \sin(\alpha_i l_k)]/2; \quad M = \cos \alpha_c l_k, \quad N = \sin \alpha_c l_k; \quad \alpha_i = \sqrt{\omega^4 \frac{\rho A_k}{EI_k}}; \quad \alpha_c = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

Relația matriceală (9) poate fi scrisă ca relația (6):

$$\{q\}_k^l = [A]_k \{q\}_{k-1}^r \quad (10)$$

Matricea pătrată (6x6), notată $[A]_k$, este matricea de transfer pentru elementul numărul k al arborelui.

În unele noduri este posibil să intervină matrice speciale. Între vectorul de stare din stânga și vectorul de stare din dreapta secțiunii k , $\{q\}_k^l$ și, respectiv, $\{q\}_k^r$, poate fi scrisă relația (7).

Matricea pătrată (6x6) $[H]_k$ poate fi una dintre matricele:

- matrice de salt, $[B]_k$, când într-un nod k apare un salt de secțiune. Elementele nenule ale acestei matrice au fost prezentate într-un subcapitol precedent.
- matrice de trecere, $[E]_k$, peste un lagăr elastic într-un nod k . Elementele nenule ale acestei matrice sunt:

$$E_{1,1} = E_{2,2} = E_{3,3} = E_{4,4} = E_{5,5} = E_{6,6} = 1; \quad E_{4,1} = -\frac{K_x}{\alpha_i^3 EI_k}; \quad E_{6,5} = \frac{K_y}{\alpha_c EA_k}.$$

K_x și K_y sunt constantele elastice ale lagărelor pe direcțiile Ox și respectiv Oy . Dacă lagărul elastic este radial elementul $E_{6,5}$ este zero. Dacă lagărul elastic este radial-axial atunci elementul $E_{6,5}$ este diferit de zero (Figura 3.6.4).

- matrice de trecere, $[D]_k$, peste un tambur fixat într-un nod k . Elementele nenule ale acestei matrice sunt:

$$D_{1,1} = D_{2,2} = D_{3,3} = D_{4,4} = D_{5,5} = D_{6,6} = 1; \quad D_{3,1} = -\frac{m\eta\alpha_i^2}{\rho A_k}; \quad D_{3,2} = -\frac{(J_{cz} + m\xi^2 + m\eta^2)\alpha_i^3}{\rho A_k};$$

$$D_{3,5} = \frac{m\xi\alpha_i^2}{\rho A_k}; \quad D_{4,1} = \frac{m\alpha_i}{\rho A_k}; \quad D_{4,2} = \frac{m\eta\alpha_i^2}{\rho A_k}; \quad D_{6,2} = \frac{m\xi\alpha_i\alpha_c}{\rho A_k}; \quad D_{6,5} = -\frac{m\alpha_c}{\rho A_k}.$$

Dacă se ia în considerare și momentul giroscopic, se va modifica numai elementul $D_{3,2}$:

- pentru precesia directă:

$$D_{3,2} = -\left(-J_{cy} \frac{\Omega}{\omega} + J_{cz} + m\xi^2 + m\eta^2\right) \frac{\alpha_i^3}{\rho A_k};$$

- pentru precesia inversă:

$$D_{3,2} = -\left(J_{cy} \frac{\Omega}{\omega} + J_{cz} + m\xi^2 + m\eta^2\right) \frac{\alpha_i^3}{\rho A_k}.$$

Matricea de transfer pentru centrifugă, notată $[Q]$, este o matrice pătrată (6x6). În funcție de tipul de rezemare sunt scrise condițiile la limită și se obține un sistem algebric linear și omogen. O soluție nenulă a acestui sistem există dacă și numai dacă determinantul său se anulează. Se obține astfel o ecuație transcendentă. Rezolvând numeric această ecuație sunt obținute frecvențele proprii pentru vibrațiilor libere.

Metoda prezentată este aplicată în cazul concret al unei centrifuge (Figura 3.6.5). Centrifuga este alcătuită dintr-un arbore și un tambur. Arborele a fost împărțit în 2 elemente (1 și 2). În această aplicație arborele centrifugei nu are salt de secțiune. Au fost obținute 3 noduri (0,1,2). Tamburul este fixat pe arbore în nodul numărul 2. Centrifuga este rezemată elastic. Lagărul din nodul 1 este radial. Lagărul din nodul 0 este radial-axial.

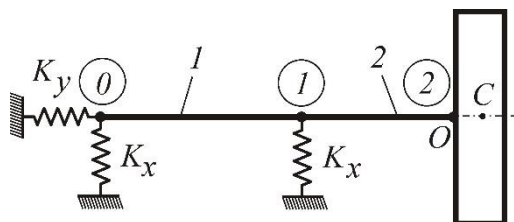


Figura 3.6.5. Aplicarea metodei propuse la o centrifugă

în nodul numărul 0, la stânga (înainte de lagăr): $M_z = 0$; $F_x = 0$; $F_y = 0$;

in nodul numărul 2, la dreapta (după tambur): $M_z = 0$; $F_x = 0$; $F_y = 0$;

Ținând seama de condițiile la limită, vectorii de stare $\{q\}_2^r$ și $\{q\}_0^l$ au forma:

$$\{q\}_2^r = \{q_{1,2} \quad q_{2,2} \quad 0 \quad 0 \quad q_{5,2} \quad 0\}_2^{r,t} \text{ și } \{q\}_0^l = \{q_{1,0} \quad q_{2,0} \quad 0 \quad 0 \quad q_{5,0} \quad 0\}_0^{l,t}.$$

După înlocuiri, se obține un sistem algebric liniar și omogen:

$$\begin{cases} 0 = Q_{3,1}q_{1,0} + Q_{3,2}q_{2,0} + Q_{3,5}q_{5,0} \\ 0 = Q_{4,1}q_{1,0} + Q_{4,2}q_{2,0} + Q_{4,5}q_{5,0} \\ 0 = Q_{6,1}q_{1,0} + Q_{6,2}q_{2,0} + Q_{6,5}q_{5,0} \end{cases}$$

Condiția ca sistemul să admită soluții nenule ($\Delta = 0$) conduce la ecuația transcendentă:

$$Q_{3,1}Q_{4,2}Q_{6,5} - Q_{3,1}Q_{4,5}Q_{6,2} - Q_{3,2}Q_{4,1}Q_{6,5} + Q_{3,2}Q_{4,5}Q_{6,1} + Q_{3,5}Q_{4,1}Q_{6,2} - Q_{3,5}Q_{4,2}Q_{6,1} = 0.$$

Rezolvând numeric această ecuație au fost determinate primele opt frecvențe proprii.

Valorile lor au fost comparate cu acelea obținute prin neglijarea vibrațiilor axiale.

Tabelul 1. Primele opt frecvențe proprii

Număr mod	Frecvențe proprii [Hz]					
	Vibrații de încovoiere (se neglijează vibrațiile axiale)			Vibrații de încovoiere cuplate cu vibrații axiale		
	Precesie inversă	Precesie neglijată	Precesie directă	Precesie inversă	Precesie neglijată	Precesie directă
Mod 1	118.33	133.50	150.32	118.33	133.49	150.33
Mod 2	393.19	396.75	401.06	393.19	396.75	401.05
Mod 3	-	-	-	746.15	746.16	746.16
Mod 4	1193.33	1194.06	1194.84	1193.31	1194.06	1194.85
Mod 5	2421.78	2423.30	2424.91	2421.78	2423.37	2424.92
Mod 6	-	-	-	3263.26	3263.26	3263.26
Mod 7	3470.30	3475.60	3480.93	3469.92	3475.71	3480.96
Mod 8	4685.87	4689.35	4696.31	4684.00	4692.39	4696.31

Folosind modelul de studiu în care vibrațiile de încovoiere sunt cuplate cu vibrațiile axiale, au fost obținute noi frecvențe proprii (Tabelul 1): frecvențele proprii numerele 3 și 6. Aceste valori nu pot fi obținute când este neglijată cuplarea vibrațiilor. Diferențele între valorile obținute pentru frecvențele proprii, neglijând sau nu cuplarea vibrațiilor, sunt foarte mici (mai mici de 0.07%).

Obiectivul acestui studiu este să afle influența cuplării vibrațiilor asupra frecvențelor proprii ale centrifugei. Obiectivul este să afle dacă cuplarea vibrațiilor duce la apariția de noi moduri proprii de vibrație. Acesta este motivul pentru care au fost calculate opt moduri proprii de vibrație. Este adevărat că

valorile frecvențelor proprii de ordin superior sunt mari. Dar, noua frecvență proprie numărul 3 poate duce la apariția unei turații critice în domeniul de funcționare a centrifugei.

În general, influența momentului giroscopic asupra frecvențelor proprii este mai mare când vibrațiile de încovoiere sunt cuplate cu vibrațiile axiale. Influența momentului giroscopic asupra noilor valori ale frecvențelor proprii, obținute prin metoda prezentată în această lucrare (când sunt considerate vibrații cuplate), este aproape nulă (746.15 / 746.16 / 746.16 Hz și 3263.26 / 3263.26 / 3263.26 Hz).

Metoda prezentată în acest subcapitol, în care se ține cont de cuplarea vibrațiilor de încovoiere cu vibrațiile axiale, poate fi considerată mai completă decât metoda în care este neglijată cuplarea vibrațiilor, deoarece dă posibilitatea obținerii mai multor frecvențe proprii de vibrație. Metoda propusă este flexibilă și poate fi ușor aplicată pentru diferite tipuri de centrifuge.

3.7. Metoda matricelor de transfer aplicată în studiul vibrațiilor barelor drepte încărcate cu forțe axiale

Se studiază influența forței axiale asupra frecvențelor proprii ale barelor care execută vibrații de încovoiere. Mai întâi se face un studiu teoretic, apoi se aplică în cazul concret al unei bare. Se construiește matricea de transfer și matricea de salt pentru studiul vibrațiilor de încovoiere ale sistemelor de bare acționate de forțe axiale.

Există cazuri când un sistem de bare execută vibrații de încovoiere în condițiile în care barele sunt și nu sunt acționate de forțe axiale. De exemplu, pentru sistemul de bare din figura 3.7.1, dacă se neglijează greutatea barelor, atunci eforturile în bare sunt egale cu zero. Dacă asupra sistemului acționează forțele F_1 , F_2 atunci numai o parte dintre eforturile din bare este diferită de zero. Eforturile în barele 1 și 5 rămân egale cu zero.

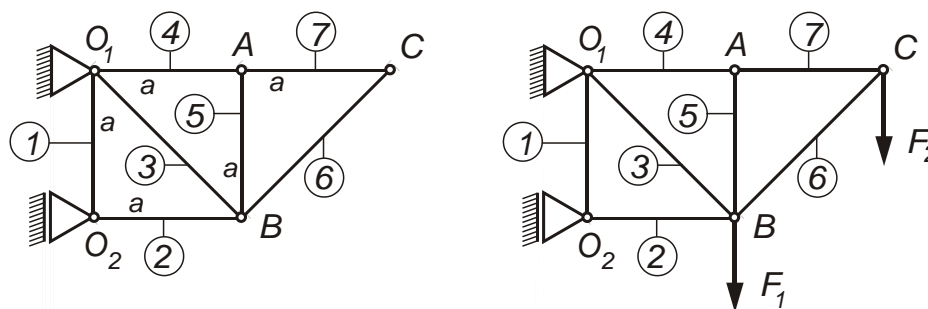


Figura 3.7.1. Sistem de bare acționate parțial de forțe axiale

Problema este dacă și cum influențează forțele axiale frecvențele proprii ale vibrațiilor de încovoiere ale barelor.

Se consideră un element dintr-o bară dreaptă, de secțiune constantă, care este sollicitată la încovoiere în planul xOy , ca în figura 3.7.2. Bara este acționată de forța distribuită \vec{p} [N/m] și forța axială constantă de întindere \vec{N} .

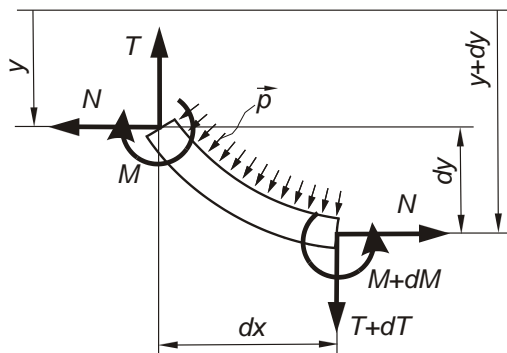


Figura 3.7.2. Element de bară cu forță axială supus la încovoiere

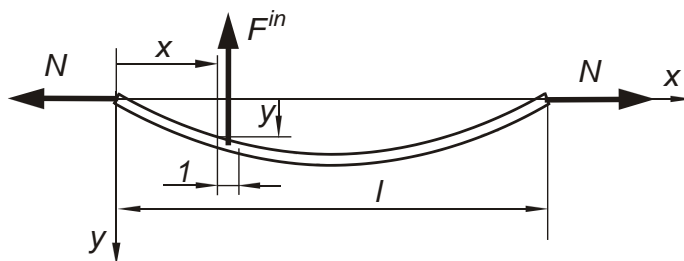


Figura 3.7.3. Bară cu forță axială care execută vibrații de încovoiere

Se obține ecuația cu derivate parțiale pentru vibrațiile barelor drepte de secțiune constantă și acționate de forțe axiale constante:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{N}{EI_z} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\rho A}{EI_z} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

unde: ρ este densitatea materialului, E este modulul de elasticitate longitudinal, A este aria secțiunii transversale, I_z este momentul de inerție al secțiunii transversale.

Se caută soluții de forma $y = Y(x) \cos(\omega t - \psi)$ și rezultă:

$$Y^{IV}(x) - \frac{N}{EI_z} Y''(x) - \frac{\rho A}{EI_z} \omega^2 Y(x) = 0. \quad (7)$$

Se notează $\alpha^4 = \frac{\rho A}{EI_z} \omega^2$; $2\beta = \frac{N}{EI_z}$. Rezultă

$$Y(x) = C_1 ch(\gamma x) + C_2 sh(\gamma x) + C_3 \cos(\delta x) + C_4 \sin(\delta x) \quad (8)$$

unde $\gamma = \sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^4}}$; $\delta = \sqrt{-\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^4}} = \frac{\alpha^2}{\gamma}$

Se consideră o bară de lungime l încastrată la ambele capete. Condițiile la limită:

$$x = 0; \quad y = 0 \text{ and } \varphi = \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \text{ and } Y' = 0$$

$$x = l; \quad y = 0 \text{ and } \varphi = \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \text{ and } Y' = 0$$

conduc la sistemul algebric liniar și omogen

$$\begin{cases} [ch(\gamma l) - \cos(\delta l)]C_1 + [sh(\gamma l) - \frac{\gamma}{\delta} \sin(\delta l)]C_2 = 0 \\ [\gamma sh(\gamma l) + \delta \sin(\delta l)]C_1 + \gamma [ch(\gamma l) - \cos(\delta l)]C_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Din condiția ca sistemul (9) să admită soluții nenule ($\Delta = 0$) se obține ecuația pulsațiilor proprii:

$$\alpha^2 - \gamma^2 ch(\gamma l) \cos(\delta l) + \beta sh(\gamma l) \sin(\delta l) = 0. \quad (10)$$

Pentru cazul concret al unei bare de lungime egală cu l m și diametru 0.03 m ($E=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$; $I=3.9761 \times 10^{-8} \text{ m}^4$; $l=1\text{m}$). Dacă bara se încălzește de la temperatura de 10° la 40° atunci va apărea o forță axială de compresiune de 53438 N . În acest caz prima frecvență proprie scade cu 9.7% .

Din relațiile

$$\begin{cases} y = Y(x) \cos(\omega t - \psi) \\ \varphi = \frac{\partial y}{\partial x} = Y'(x) \cos(\omega t - \psi) \\ M = -EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -EI_z Y''(x) \cos(\omega t - \psi) \\ F = \frac{\partial M}{\partial x} + N \frac{\partial y}{\partial x} = -EI_z [Y'''(x) - 2\beta Y'(x)] \cos(\omega t - \psi) \end{cases} \quad (11)$$

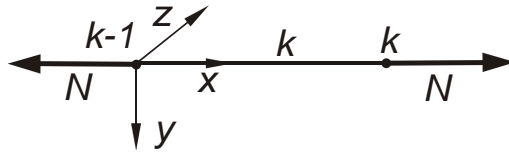


Figura 3.7.5. Element de bară acționat de forță axială

generalizând pentru un element, k , de bară aflat între punctele (nodurile) $k-1$ și k (figura 5), între vectorii de stare din nodurile $k-1$ și k se poate scrie relația matriceală:

$$\{q\}_k^l = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^4}} [A]_k \{q\}_{k-1}^r \quad (13)$$

unde $\{q\}_{k-1}^r$ și $\{q\}_k^l$ sunt vectorii de stare în nodurile $k-1$ (în stânga) și k (în dreapta). $[A]_k$ este matricea de transfer pentru elementul k :

$$\{q\}_{k-1}^{r,T} = \left\{ y_{k-1} \quad \frac{\varphi_{k-1}}{\alpha} \quad -\frac{M_{k-1}}{\alpha^2 EI_z} \quad -\frac{F_{k-1}}{\alpha^3 EI_z} \right\}_{k-1}^l; \quad \{q\}_k^{l,T} = \left\{ y_k \quad \frac{\varphi_k}{\alpha} \quad -\frac{M_k}{\alpha^2 EI_z} \quad -\frac{F_k}{\alpha^3 EI_z} \right\}_k^l;$$

$$[A]_k = \begin{bmatrix} S_1 & \alpha T_1 & \alpha^2 U_1 & \frac{\alpha^3}{\gamma \delta} V_1 \\ \frac{\gamma \delta}{\alpha} V_1 & S_2 & \alpha T_1 & \alpha^2 U_1 \\ \frac{\gamma^2 \delta^2}{\alpha^2} U_1 & \frac{1}{\alpha} V_2 & S_2 & \alpha T_1 \\ \frac{\gamma \delta}{\alpha^3} T_2 & \frac{\gamma^2 \delta^2}{\alpha^2} U_1 & \frac{\gamma \delta}{\alpha} V_1 & S_1 \end{bmatrix}_k.$$

S-au folosit notațiile:

$$S_1 = \frac{\delta^2 ch(\gamma x) + \gamma^2 \cos(\delta x)}{2}; \quad T_1 = \frac{\gamma sh(\gamma x) + \delta \sin(\delta x)}{2};$$

$$U_1 = \frac{ch(\gamma x) - \cos(\delta x)}{2}; \quad V_1 = \frac{\delta sh(\gamma x) - \gamma \sin(\delta x)}{2};$$

$$S_2 = \frac{\gamma^2 ch(\gamma x) + \delta^2 \cos(\delta x)}{2}; \quad V_2 = \frac{\gamma^3 sh(\gamma x) - \delta^3 \sin(\delta x)}{2}; \quad T_2 = \frac{\delta^3 sh(\gamma x) + \gamma^3 \sin(\delta x)}{2}.$$

Dacă într-un nod k apare un salt de secțiune atunci, între vectorii de stare din stânga și din dreapta nodului k , se poate scrie relația matriceală

$$\{q\}_k^r = [B]_k \{q\}_k^l \quad (14)$$

unde $\{q\}_k^r$ și $\{q\}_k^l$ sunt vectorii de stare la dreapta și la stânga nodului k . $[B]_k$ este matricea de salt 4×4 în nodul k . Este o matrice rară. Elementele nenule se determină pe baza relațiilor de continuitate: $y_k^r = y_k^l$; $\varphi_k^r = \varphi_k^l$; $M_k^r = M_k^l$; $F_k^r = F_k^l$. Au fost scrise în subcapitolele precedente. Elementele matricei de salt nu depind de forța axială.

4. Studiu, bazat pe metoda matricelor de transfer, pentru vibrațiile mediilor continue unidimensionale cu secțiune continuu variabilă

4.1. Vibrații de încovoiere

Se consideră o bară dreaptă cu secțiune transversală variabilă și lungime l (Figura 4.1.1a). Diametrul barei, aria secțiunii transversale, și momentul de inerție al secțiunii transversale la capetele barei (notate cu "0" la $x = 0$ și "1" la $x = l$) sunt d_0, A_0, I_0 , și respectiv d_l, A_l, I_l . Ecuația cu derivate parțiale a barei Euler-Bernoulli pentru vibrații de încovoiere este:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] - \rho A(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal, ρ este densitatea materialului, t este timpul, $A(x)$, $I(x)$ sunt aria secțiunii transversale și momentul de inerție al secțiunii transversale la distanța x de capăt, respectiv, $y(x, t)$ este deplasarea fibrei medii a barei la distanța x de capăt, la momentul t .

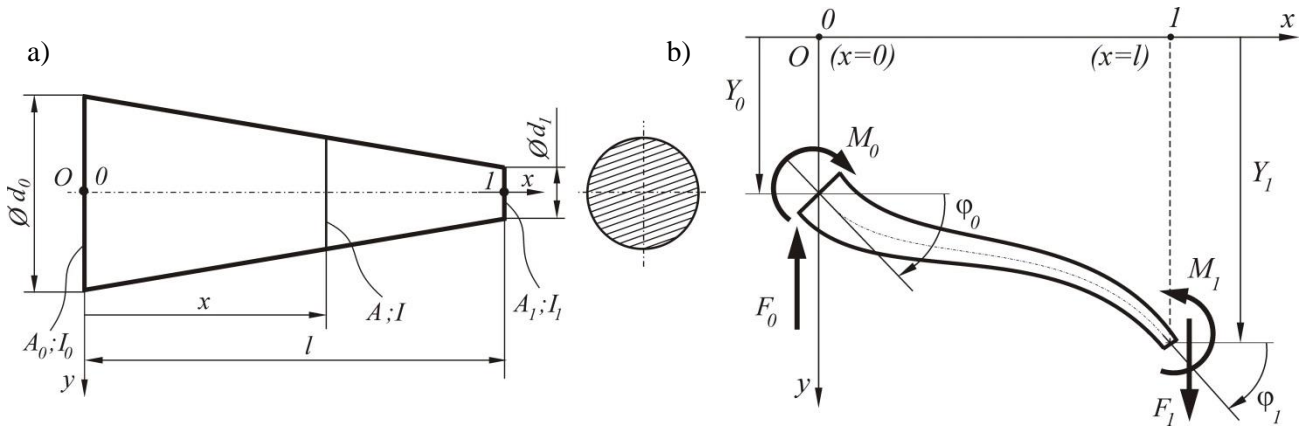


Figura 4.1.1. a) Bară conică b) Element de bară conică

În vederea obținerii soluției pentru vibrații libere de încovoiere este utilizată metoda separării variabilelor:

$$y(x, t) = Y(x)\cos(\omega t - \varphi) \quad (2)$$

unde ω este pulsația proprie.

În cazul unei bare drepte conice, conicitatea este definită:

$$\alpha = \frac{d_0 - d_1}{l}. \quad (3)$$

În aceste condiții aria secțiunii transversale și momentul de inerție al secțiunii transversale variază astfel:

$$A(x) = A_0 \left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x\right)^2; \quad I(x) = I_0 \left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x\right)^4. \quad (4)$$

Ecuția cu derivate parțiale (1) devine:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x\right)^4 \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 d_0^4} \left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x\right)^2 Y = 0 \quad (5)$$

unde

$$\omega_0 = \frac{1}{d_0^2} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0}}. \quad (6)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (5) va avea forma:

$$Y(x) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{d_0} x} \left[C_1 J_2 \left(\lambda \sqrt{1 - \frac{\alpha}{d_0} x} \right) + C_2 Y_2 \left(\lambda \sqrt{1 - \frac{\alpha}{d_0} x} \right) + C_3 I_2 \left(\lambda \sqrt{1 - \frac{\alpha}{d_0} x} \right) + C_4 K_2 \left(\lambda \sqrt{1 - \frac{\alpha}{d_0} x} \right) \right] \quad (7)$$

where:

$$\lambda = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{2d_0 l \sqrt{\omega}}{d_0 - d_1} \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}.$$

$J_2(u)$ și $Y_2(u)$ sunt funcțiile Bessel de ordinul 2 de prima și a doua speță, $I_2(u)$ și $K_2(u)$ sunt funcțiile Bessel modificate de ordinul 2 de prima și a doua speță și C_1, C_2, C_3, C_4 sunt constante de integrare sau, dacă se utilizează notația

$$s = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{d_0} x},$$

$$Y(x) = Y(s) = \frac{1}{s^2} [C_1 J_2(\lambda s) + C_2 Y_2(\lambda s) + C_3 I_2(\lambda s) + C_4 K_2(\lambda s)] \quad (8)$$

Având în vedere proprietățile funcțiilor Bessel, se poate scrie

$$\begin{cases} Y(x) = C_1 a_2 J_2(\lambda s) + C_2 a_2 Y_2(\lambda s) + C_3 a_2 I_2(\lambda s) + C_4 a_2 K_2(\lambda s) \\ \varphi(x) = Y'(x) = C_1 a_3 J_3(\lambda s) + C_2 a_3 Y_3(\lambda s) - C_3 a_3 I_3(\lambda s) + C_4 a_3 K_3(\lambda s) \\ M(x) = -EI(x)Y''(x) = C_1 a_4 J_4(\lambda s) + C_2 a_4 Y_4(\lambda s) + C_3 a_4 I_4(\lambda s) + C_4 a_4 K_4(\lambda s) \\ F(x) = -\frac{d}{dx}[EI(x)Y''(x)] = C_1 a_5 J_5(\lambda s) + C_2 a_5 Y_5(\lambda s) - C_3 a_5 I_5(\lambda s) + C_4 a_5 K_5(\lambda s) - \frac{8}{\lambda s} \frac{a_5}{a_4} M(x) \end{cases} \quad (9)$$

where:

$Y(x)$ -deformația (deplasarea); $\varphi(x) = \frac{dY}{dx}$ -deformația unghiulară (rotația secțiunii); $M(x)$ -momentul încovoietor; $F(x)$ -forța tăietoare în secțiunea x .

Din ecuația (9) poate fi scrisă relația matriceală:

$$\{q\} = [H(\lambda s)]\{C\} \quad (10)$$

unde, vectorul de stare într-o secțiune la distanța x este

$$\{q\} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^t = \{Y(x) \quad \varphi(x) \quad M(x) \quad F(x)\}^t \quad (11)$$

$$\text{și } a_2 = \frac{1}{s^2}; \quad a_3 = \frac{\alpha \lambda}{2d_0 s^3}; \quad a_4 = -EI_0 \frac{\alpha^2 \lambda^2 s^4}{4d_0^2}; \quad a_5 = -EI_0 \frac{\alpha^3 \lambda^3 s^5}{8d_0^3},$$

matricea coloană a constantelor de integrare este:

$$\{C\} = \{C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4\}^t$$

și

$$[H(\lambda s)] = \begin{bmatrix} a_2 J_2(\lambda s) & a_2 Y_2(\lambda s) & a_2 I_2(\lambda s) & a_2 K_2(\lambda s) \\ a_3 J_3(\lambda s) & a_3 Y_3(\lambda s) & -a_3 I_3(\lambda s) & a_3 K_3(\lambda s) \\ a_4 J_4(\lambda s) & a_4 Y_4(\lambda s) & a_4 I_4(\lambda s) & a_4 K_4(\lambda s) \\ a_5 \left[J_5(\lambda s) - \frac{8}{\lambda s} J_4(\lambda s) \right] & a_5 \left[Y_5(\lambda s) - \frac{8}{\lambda s} Y_4(\lambda s) \right] & -a_5 \left[I_5(\lambda s) + \frac{8}{\lambda s} I_4(\lambda s) \right] & a_5 \left[K_5(\lambda s) - \frac{8}{\lambda s} K_4(\lambda s) \right] \end{bmatrix} \quad (12)$$

Folosind condițiile la limită (la $x = 0, l$, Figura 4.1.1b) în relația (10), pentru vectorul de stare în secțiunea 0 ($x = 0$), $\{q\}_0$, și vectorul de stare în secțiunea I ($x = l$), $\{q\}_1$, se obțin expresiile:

$$\{q\}_0 = [H(\lambda)]\{C\} \text{ și, respectiv, } \{q\}_1 = \left[H \left(\lambda \sqrt{\frac{d_1}{a_0}} \right) \right] \{C\}. \quad (13)$$

Matricea coloană a constantelor de integrare poate fi scrisă:

$$\{C\} = [H(\lambda)]^{-1} \{q\}_0, \text{ unde } \det[H(\lambda)] \neq 0. \quad (14)$$

Atunci, înlocuind matricea coloană $\{C\}$ (14) în expresia vectorului de stare $\{q\}_1$, (13), se obține următoarea relație matriceală între vectorii de stare din secțiunile 0 and 1:

$$\{q\}_1 = [H]_{0-1} \{q\}_0, \quad (15)$$

unde matricea pătrată $[H]_{0-1}$ se numește matrice de transfer pentru elementul 0-1.

$$[H]_{0-1} = \left[H \left(\lambda \sqrt{\frac{d_1}{a_0}} \right) \right] [H(\lambda)]^{-1}. \quad (16)$$

Ecuația (15) dă o legătură între mărimile mecanice (deplasare, rotația secțiunii, momentul încovoietor, forța tăietoare) de la capetele barei conice. Cu această relație bara conică studiată poate fi legată de alte bare conice sau cilindrice.

Aplicând așa-numita metodă „exactă”, frecvențele proprii ale vibrațiilor libere de încovoiere pentru grinda cu secțiune transversală variabilă sunt obținute prin rezolvarea numerică a unei ecuații transcendente obținută prin folosirea condițiilor la limită la capetele grinzii (15).

Pentru a aplica metoda matricelor de transfer propuse pentru studiul vibrațiilor libere de încovoiere ale unei structuri complexe de grinzi (Figura 4.1.2), trebuie construite mai multe matrice specifice. De exemplu, într-o secțiune (nod) k pot apărea mai multe discontinuități precum: un lagăr elastic, sau o masă concentrată. Prin urmare, într-un anumit nod, există doi vectori de stare definiți, unul pe partea stângă, $\{q\}_k^l$,

și celălalt pe partea dreaptă, $\{q\}_k^r$, a secțiunii (nodului) k . Relația matriceală între acești vectori de stare se scrie:

$$\{q\}_k^r = [N]_k \{q\}_k^l \quad (21)$$

unde matricea pătrată $[N]_k$, numită în mod obișnuit matrice de transfer într-un punct (matrice de trecere).

Relațiile prezentate în (15) sau (17) pot fi utilizate pentru fiecare element, iar relațiile prezentate în (21) pentru fiecare nod. După efectuarea succesivă a mai multor substituții, se obține o relație matriceală între vectorii de stare din nodul n (punctul final), $\{q\}_n$ și nodul 0 (punctul de plecare), $\{q\}_0$:

$$\{q\}_n = [Q] \{q\}_0. \quad (25)$$

Matricea pătrată (4x4), notată $[Q]$, se numește matrice de transfer corespunzătoare structurii sistemului de bare. Se scriu condițiile de limită și de încărcare la capete ale grinzii, din relația (25). se extrage un sistem algebric liniar și omogen cu următoarea formă: $[Q]_{red} \{q\}_{red} = \{0\}$. O soluție a acestui sistem liniar există dacă și numai dacă determinantul său se anulează. Prin urmare, ecuația cu valori proprii poate fi scrisă astfel:

$$\det[Q]_{red} = 0. \quad (26)$$

care se rezolvă numeric pentru a obține frecvențele proprii.

În comparație cu metodele cu elemente finite și fără rețea, metoda matricelor de transfer are următoarele avantaje: 1) ordinul matricei de transfer pentru întreaga structură este întotdeauna 4x4, deci este independent de complexitatea structurii grinzii; ceea ce nu este valabil în celelalte metode. De exemplu, ordinul matricelor depinde de numărul de noduri și de gradele lor de libertate în metoda elementului finit și de numărul de particule și de numărul de funcții de formă în metodele fără rețea (Rayleigh-Ritz) 2) Variabilele de stare în metoda matricelor de transfer sunt deplasarea, unghiurile (pantele), momentele încovoietoare și forțele tăietoare, iar în celelalte metode, acestea sunt de obicei măsurii cinematice (deplasări, viteze, accelerații). Prin urmare, în unele probleme practice de inginerie metoda matricelor de transfer pare să fie mai eficientă.

Ca exemplu pentru acest studiu este adoptată o bară conică în două tipuri de condiții la limită (două tipuri de rezemare) (Figura 4.1.4). Bara este din oțel cu densitatea $\rho = 7800 \text{ Kgm}^{-3}$, modulul de elasticitate longitudinal $E = 210 \text{ MPa}$, lungime $l = 0.5 \text{ m}$, diametru mai mare (nodul 0) $d_0 = 0.03 \text{ m}$, diametru mai mic (nodul 1) $d_1 = 0.005 \text{ m}$. Conicitatea este atunci $\alpha = 0.05$ (5%). Frecvențele proprii de vibrație ale fiecărei bare conice au fost determinate numeric prin: a) Metoda matricelor de transfer folosind funcții Bessel b) metoda matricelor de transfer folosind grinzi cilindrice pas cu pas (bară cu secțiune variabilă în trepte). În metoda matricelor de transfer folosind bare cilindrice cu secțiune variabilă în trepte bara conică dreaptă (Figura 4.1.5) este împărțită în $N=100$ bare (elemente) cilindrice cu secțiuni constante.

Pe lângă calculele numerice, s-au determinat experimental frecvențele proprii ale grinzii conice în consolă (încăstrată la un capăt și liberă la celălalt capăt). A fost proiectat sistemul de măsurare, care constă dintr-o bară conică de oțel ($\rho = 7800 \text{ Kgm}^{-3}$, $E = 210 \text{ MPa}$). Bara conică ($l = 0.5 \text{ m}$) a fost fixată pe un bloc de oțel la un capăt și lăsată liberă la celălalt capăt (Figura 4.1.6). Bara avea un diametru mare de $d_0 = 0.03 \text{ m}$ la capătul fixat și un diametru mic de $d_1 = 0.005 \text{ m}$ la capătul liber. Configurația a inclus un accelerometru tipic (B&K 4507, Bruel&Kjaer Danemarca), un sistem de achiziție (NI-DAQ 9233, National Instruments, Austin, TX) și un computer personal. Datele culese au fost înregistrate și post-procesate folosind software-ul de analiză modală (dBFA Suite 4.9).

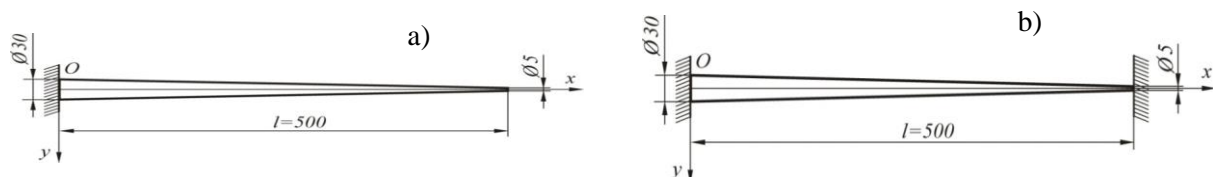


Figura 4.1.4. Bară conică cu diferite condiții la limită a) încăstrată - liberă, b) încăstrată - încăstrată

Bară în consolă (încăstrată la un capăt și liberă la celălalt capăt)

Pentru cazul barei în consolă (Figura 4.1.4a), condițiile limită la capetele grinzii conice sunt:

- la capătul din stânga ($x = 0$) deformația și rotația secțiunii sunt nule ($Y = 0, \varphi = 0$);
- la capătul din dreapta ($x = l$), momentul încovoietor și forța tăietoare sunt egale cu zero ($M = 0, F = 0$).

Au fost comparate valorile primelor cinci frecvențe proprii de vibrație obținute cu metoda matricelor de transfer (MMT) folosind funcții Bessel, cu metoda matricelor de transfer cu variație în trepte a diametrului și cu cele măsurate experimental (Tabelul 1). În general, frecvențele proprii prezise de ambele metode au fost apropiate de rezultatele experimentale. Erorile rezultatelor pentru frecvențe obținute cu metoda matricelor de transfer folosind funcțiile Bessel au fost de obicei mai mici decât erorile corespunzătoare rezultatelor obținute cu metoda matricelor de transfer pentru bara cu secțiune variabilă în trepte. În timp ce un număr crescut de elemente (trepte) poate crește acuratețea abordării în mai multe trepte, crește și efortul de calcul. Prin urmare, metoda matricelor de transfer care utilizează funcțiile Bessel pare a fi mai eficient decât metoda matricelor de transfer clasică pentru bare cu secțiune variabilă în trepte. De altfel, în capitolul 3 s-a arătat ca eroarea de calcul este cu atât mai mică cu cât numărul de trepte (elemente în care este divizată bara) este mai mare.

Tabelul 1. Frecvențe proprii ale barei conice în consolă

Mod propriu	MMT folosind funcții Bessel (eroare) [Hz] (%)	MMT folosind elemente cilindrice (eroare) [Hz] (%)	Rezultate experimentale [Hz]
Mod 1	160.7 (1.1)	162.5 (2.2)	159.0
Mod 2	455.5 (3.0)	457.4 (3.4)	442.2
Mod 3	962.8 (7.3)	963.0 (7.3)	897.5
Mod 4	1702.0 (6.9)	1699.0 (6.7)	1592.1
Mod 5	2679.1 (7.0)	2671.5 (6.7)	2504.0

Pe baza rezultatelor discutate mai sus, se conturează o metodă de control al frecvenței proprii de încovoiere a barelor cilindrice în consolă. De exemplu, pentru a reduce această frecvență proprie (de exemplu, pentru a evita apariția rezonanței într-un anumit interval de frecvență), o bară cilindrică ar putea fi transformată într-o bară conică prin reducerea diametrului capătului liber. În mod evident, bara conică în consolă obținută ar trebui să poată rezista la sarcinile la care poate fi supusă în timpul funcționării sale.

Bară încăstrată la ambele capete

Pentru bara de oțel încăstrată la ambele capete ($d_0 = 0.03 \text{ m}$, $d_1 = 0.005 \text{ m}$, $l = 0.5 \text{ m}$) (Figura 4.1.4b) condițiile limită sunt:

$$\begin{aligned} x = 0, Y = 0, \varphi = 0; \\ x = l, Y = 0, \varphi = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Valorile primelor cinci frecvențe proprii de vibrație calculate prin metoda barei cu secțiune variabilă în trepte sunt ușor mai mici decât valorile corespunzătoare calculate prin aplicarea metodei matricelor de transfer pe baza funcțiilor Bessel (Tabelul 5).

Tabelul 5. Frecvențele proprii de vibrație pentru bara conică încăstrată la ambele capete

Mod propriu	MMT folosind funcții Bessel [Hz]	MMT folosind elemente cilindrice [Hz] (%)
Mod 1	294.0	293.4
Mod 2	784.3	781.9
Mod 3	1515.1	1509.9
Mod 4	2486.8	2477.8
Mod 5	3700.4	3686.5

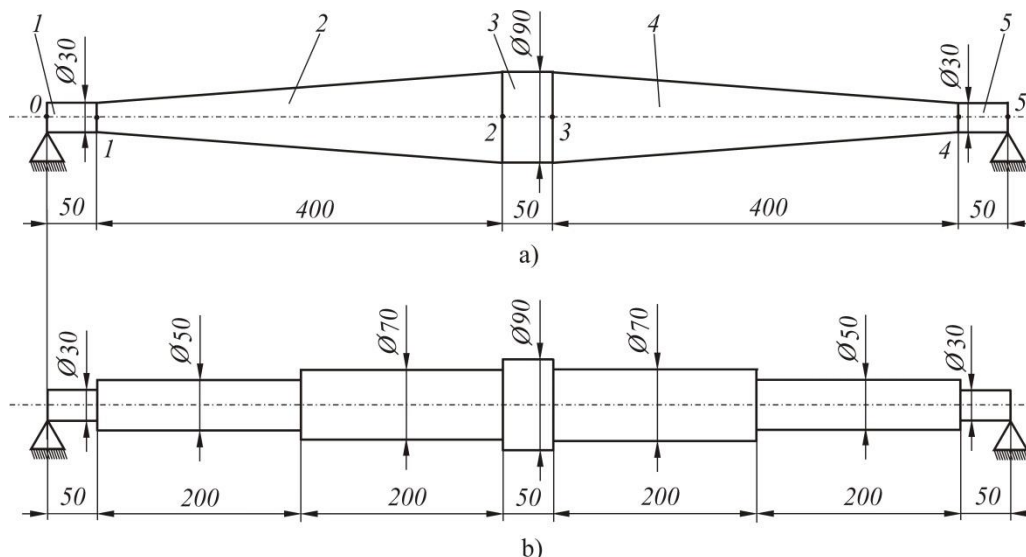


Figura 4.1.8. a) Structură cu bare (elemente) cilindrice și conice. b) Structură cu bare (elemente) conice înlocuite cu bare (elemente) cilindrice

Metoda matricelor de transfer pentru grinzi conice, propusă aici, a fost aplicată în cazul unei structuri de bare care conține două părți conice (2 și 4) și trei părți cilindrice (1, 3 și 5) (Figura 4.1.8a). Structura a fost discretizată în 5 elemente și 6 noduri și au fost scrise relațiile matriciale pentru fiecare element:

$$\{q\}_1 = [R]_1\{q\}_0; \{q\}_2 = [H]_2\{q\}_1; \{q\}_3 = [R]_3\{q\}_2; \{q\}_4 = [R]_4\{q\}_3; \{q\}_5 = [R]_5\{q\}_4; \quad (28)$$

unde $[R]$ and $[H]$ sunt matrice de transfer corespunzătoare elementelor cilindrice și, respectiv, conice.

După substituții succesive, matricea de transfer a întregii structuri se scrie astfel:

$$\{q\}_5 = [R]_5[H]_4[R]_3[H]_2[R]_1\{q\}_0; \{q\}_5 = [Q]\{q\}_0 \quad (29)$$

$$[Q] = [R]_5[H]_4[R]_3[H]_2[R]_1$$

Se scriu condițiile limită la capetele structurii (nodurile 0 și 5):

$$\{q\}_5 = \{0 \quad q_2 \quad 0 \quad q_4\}_5^t; \{q\}_0 = \{0 \quad q_2 \quad 0 \quad q_4\}_0^t \quad (30)$$

și apoi ecuația frecvențelor proprii derivată

$$\begin{cases} 0 = Q_{12} \cdot q_{2,0} + Q_{14} \cdot q_{4,0} \\ 0 = Q_{32} \cdot q_{2,0} + Q_{34} \cdot q_{4,0} \end{cases}$$

$$Q_{12}Q_{34} - Q_{14}Q_{32} = 0. \quad (31)$$

Frecvențele proprii ale barei au fost comparate cu valorile corespunzătoare obținute cu metoda matricelor de transfer clasice pentru grinzi cilindrice, când bara cu tronsoane conice a fost modelată ca o bară cu secțiune variabilă în trepte (Figura 4.1.8b). După cum se poate observa (Tabelul 7), atunci când barele (tronsoanele) conice au fost înlocuite cu elemente cilindrice, erorile pentru frecvențele proprii au fost de peste 7% pentru primul mod și de peste 11% pentru al doilea mod.

Tabelul 7. Frecvențele proprii ale structurii

Mod propriu	Structură cu bare cilindrice și conice [Hz]	Structură cu bare conice înlocuite cu bare cilindrice [Hz]
Mod 1	121.7	130.4
Mod 2	413.4	460.5
Mod 3	1190.7	1159.8
Mod 4	1990.6	2015.8
Mod 5	3137.6	2914.8

4.2. Vibrații de longitudinale (axiale)

În continuare este abordată problema vibrațiilor axiale ale barelor drepte cu secțiune continuu variabilă. Este propusă o metodă de studiu, sub formă matriceală, bazată pe utilizarea funcțiilor Bessel. Formele matriceale fac posibilă crearea metodelor computerizate pentru determinarea frecvențelor proprii și a modurilor proprii de vibrație pe baza metodelor prezentate. Rezultatele teoretice, obținute prin aplicarea metodei prezentate, sunt comparate cu rezultatele experimentale. Obiectul de studiu este influența factorilor geometrici asupra valorilor frecvenței proprii fundamentale.

Multe probleme curente din inginerie mecanică și construcții industriale au bare sau conducte cu secțiune transversală variabilă. Uneori aceste bare pot să efectueze vibrații axiale (Figura 4.2.1a). Vibrațiile axiale se pot cupla cu vibrațiile de încovoiere (Figura 4.2.1b). În cazul arborilor care au discuri montate în consolă, sau în cazul centrifugelor (Figura 4.2.1c), datorită excitațiilor care apar în lungul arborelui, vibrațiile de încovoiere se cuplează cu vibrațiile axiale. Dacă arborele are tronsoane cu secțiune transversală variabilă atunci acestea vor efectua vibrații de încovoiere cuplate cu vibrații axiale. În general în literatura tehnică nu este abordat subiectul vibrațiilor axiale ale barelor drepte cu secțiune continuu variabilă.

Vibrațiile transversale care apar în aceste bare au fost studiate în multe lucrări. Determinarea frecvențelor proprii și a modurilor proprii de vibrație pentru o bară considerată ca mediu continuu, de secțiune solidă liniar variabilă, se poate face prin metode exacte sau aproximative.

În cele ce urmează este dezvoltată o metodă matriceală care utilizează funcțiile Bessel. Se scriu matricea de transfer, vectorii de stare și matricele de trecere pentru situații speciale. Pentru verificarea metodei matriceale propuse se aplică la cazul specific al unor bare cu secțiune transversală continuu variabilă. Rezultatele obținute prin metoda matricelor de transfer sunt comparate cu rezultatele experimentale și cu rezultatele obținute printr-o metodă aproximativă.

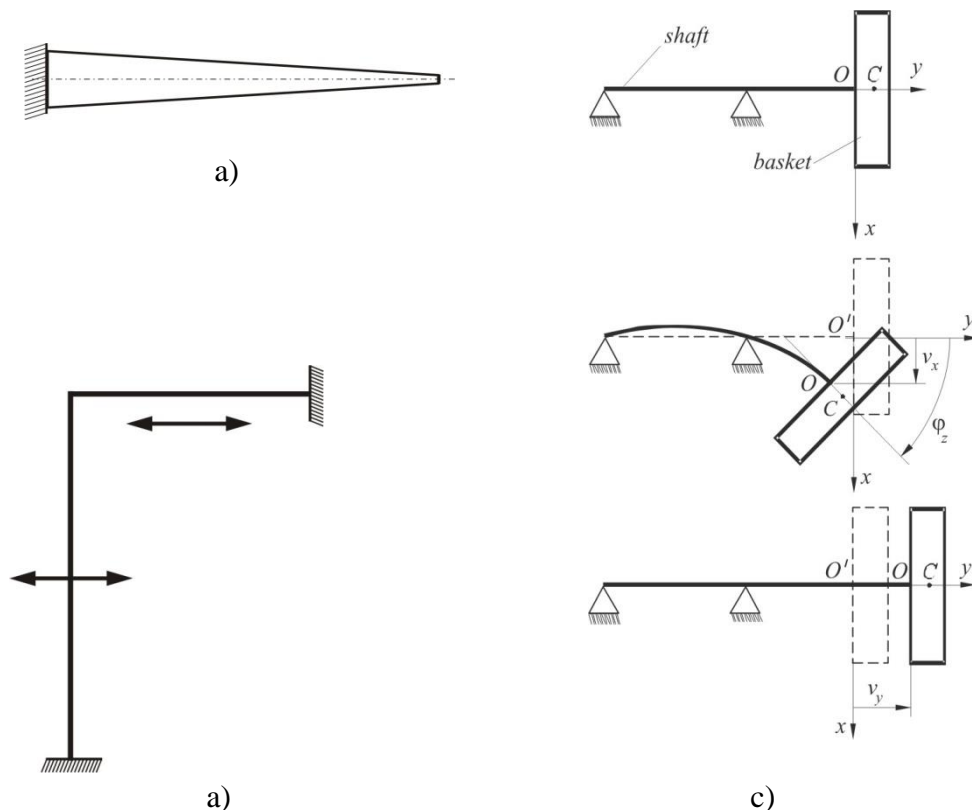


Figura 4.2.1. a) Bară dreaptă cu secțiune transversală continuu variabilă.

Vibrații de încovoiere cuplate cu vibrații axiale: b) la un sistem de bare; (c) la o centrifugă

Vibrațiile axiale ale unei grinzi drepte cu secțiune continuu variabilă sunt investigate folosind atât abordări numerice, cât și experimentale în acest studiu. Investigația numerică folosită este o metodă a matricelor de transfer care este descrisă în secțiunile următoare.

Se consideră o bară dreaptă cu secțiune transversală variabilă și lungime l (Figura 2a). Diametrul barei, aria secțiunii transversale și momentul de inerție la capetele sale (notat cu "0" at $x = 0$ și "1" la $x = l$) sunt d_0, A_0, I_0 , și respectiv d_1, A_1, I_1 .

Ecuția cu derivate parțiale pentru vibrațiile axiale pentru o bară cu secțiune transversală circulară plană linear variabilă (Figura 4.2.2b) este

$$\frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

where $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$; E is the modulul de elasticitate longitudinal; ρ este densitatea materialului; t este timpul, $u(x,t)$ este deplasarea (deformația) axială (în lungul axei x) la poziția x și momentul t ; $A(x)$ este aria secțiunii transversale la distanța x de la capăt.

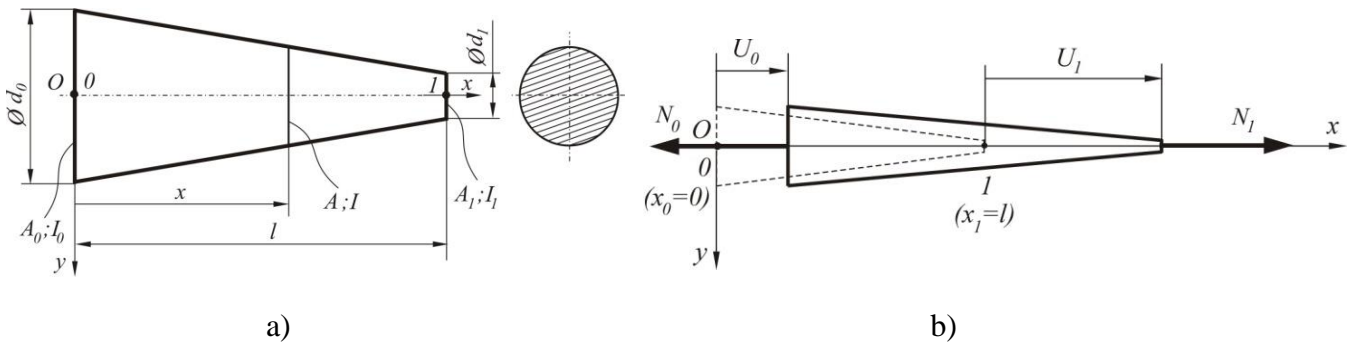


Figura 4.2.2. a) Bară conică; b) Element de bară conică

Pentru obținerea soluției pentru vibrații axiale libere, se folosește metoda separării variabilelor:

$$u(x, t) = U(x) \cos(\omega t - \varphi) \quad (2)$$

unde ω este pulsația proprie.

Conicitatea este definită în literatura tehnică astfel:

$$\alpha = \frac{d_0 - d_1}{l} \quad (3)$$

În aceste condiții aria secțiunii transversale variază astfel:

$$A(x) = A_0 \left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x \right)^2 \quad (4)$$

Ecuția cu derivate parțiale (1) devine:

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x \right)^2 \frac{dU}{dx} \right] = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x \right)^2 U \quad (5)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (5) se scrie:

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{d_0} x}} \left\{ C_1 J_{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x \right) \right] + C_2 Y_{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{\alpha}{d_0} x \right) \right] \right\} \quad (6)$$

unde:

$$\lambda = \frac{\omega^2 d_0^2}{c^2 \alpha^2}$$

$J_{\frac{1}{2}}(u)$ și $Y_{\frac{1}{2}}(u)$ sunt funcțiile Bessel de ordinul $1/2$ de prima și a doua speță; C_1 și C_2 sunt constante de integrare.

Folosind notația $s = 1 - \frac{\alpha}{d_0} x$ relația (6) se scrie

$$U(x) = U(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[C_1 J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) + C_2 Y_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) \right] \quad (7)$$

sau, ținând cont de egalitatea $Y_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) = -J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s)$

$$U(x) = U(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[C_1 J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) - C_2 J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) \right]. \quad (8)$$

Având în vedere proprietățile funcțiilor Bessel, se poate scrie

$$\begin{cases} U(x) = C_1 a_1 J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) - C_2 a_1 J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) \\ N(x) = EA(x) \frac{dU}{dx} = C_1 a_2 J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda}s) + C_2 a_2 J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda}s) \end{cases} \quad (9)$$

unde:

U – deplasarea axială (deformația axială); N – Forța axială în secțiunea aflată la distanța x .

Au fost folosite de asemenea notațiile:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{d_0}x}} = s^{-\frac{1}{2}}; \quad a_2 = \frac{\omega EA}{c\sqrt{s}} = \frac{\omega EA}{c\sqrt{1 - \frac{\alpha}{d_0}x}} = \frac{\omega EA}{c} s^{\frac{3}{2}}. \quad (10)$$

Din relațiile (9) și (10) se poate obține relația matriceală:

$$\{q\}_x = [H(\sqrt{\lambda}s)]\{C\} \quad (11)$$

unde:

- vectorul de stare în secțiunea x este

$$\{q\}_x = \{q_1 \quad q_2\}^t = \{U(x) \quad N(x)\}^t \quad (12)$$

- matricea coloană a constantelor de integrare este:

$$\{C\} = \{C_1 \quad C_2\}^t \quad (13)$$

- și

$$[H(\sqrt{\lambda}s)] = \begin{bmatrix} a_1 J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) & -a_1 J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}s) \\ a_2 J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda}s) & a_2 J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda}s) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Folosind condițiile la limită (la $x = 0, l$, Figura 4.2.2b) în relația (11), se obține următoarea relație matriceală între vectorii de stare din secțiunile 0 și 1:

$$\{q\}_1 = [H]_{0-1}\{q\}_0. \quad (15)$$

unde $\{q\}_1$ este vectorul de stare în secțiunea 1 ($x = l, s = 1 - \frac{\alpha l}{d_0} = \frac{d_1}{d_0}$) (la stânga secțiunii 1):

$$\{q\}_1 = \left[H \left(\sqrt{\lambda} \frac{d_1}{d_0} \right) \right] \{C\}$$

și $\{q\}_0$ este vectorul de stare în secțiunea 0 ($x = 0, s = 1$) (la dreapta secțiunii 0):

$$\{q\}_0 = [H(\sqrt{\lambda})]\{C\}.$$

Se obține matricea coloană a constantelor de integrare:

$$\{C\} = [H(\sqrt{\lambda})]^{-1}\{q\}_0, \text{ pentru } \det[H(\lambda)] \neq 0.$$

Matricea pătrată $[H]_{0-1}$ se numește matrice de transfer pentru elementul 0-1.

$$[H]_{0-1} = \left[H \left(\sqrt{\lambda} \frac{d_1}{d_0} \right) \right] [H(\sqrt{\lambda})]^{-1} \quad (16)$$

sau

$$[H]_{0-1} = \begin{bmatrix} a_1^l J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} \frac{d_1}{d_0}) & -a_1^l J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} \frac{d_1}{d_0}) \\ a_2^l J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda} \frac{d_1}{d_0}) & a_2^l J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda} \frac{d_1}{d_0}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1^0 J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}) & -a_1^0 J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}) \\ a_2^0 J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda}) & a_2^0 J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (17)$$

unde

$$a_1^0 = 1, a_2^0 = \frac{\omega EA_0}{c}, a_1^l = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^{-\frac{1}{2}}, a_2^l = \frac{\omega EA_0}{c} \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

Aplicând așa-numita metodă “exactă” frecvențele proprii ale vibrațiilor axiale libere pentru bara cu secțiune transversală variabilă se obțin prin rezolvarea numerică a unei ecuații transcendente rezultate prin utilizarea condițiilor la limită la capetele barei (15).

Dacă se calculează $[H(\sqrt{\lambda})]^{-1}$ și se folosesc relațiile:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z; J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z; J_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right); J_{-\frac{3}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin z + \frac{\cos z}{z}\right)$$

Expresia matricei $[H]_{0-1}$ poate fi scrisă în forma:

$$[H]_{0-1} = \begin{bmatrix} \frac{d_0}{d_1} \left[\cos \frac{\omega l}{c} - \frac{c\alpha}{\omega d_0} \sin \frac{\omega l}{c} \right] & \frac{4c}{\pi \omega E d_0 d_1} \sin \frac{\omega l}{c} \\ -\frac{\pi E}{4c} \left[c\alpha(d_1 - d_0) \cos \frac{\omega l}{c} + \frac{c^2 \alpha^2 + \omega^2 d_0 d_1}{\omega} \sin \frac{\omega l}{c} \right] & \frac{d_1}{d_0} \left[\frac{c\alpha}{\omega d_1} \sin \frac{\omega l}{c} + \cos \frac{\omega l}{c} \right] \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Relația matriceală între vectorii de stare din secțiunile 0 și x este:

$$\{q\}_x = [H]_{0-x} \{q\}_0 \quad (20)$$

unde

$$[H]_{0-x} = [H(\sqrt{\lambda s})][H(\sqrt{\lambda})]^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda s}) & -a_1 J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda s}) \\ a_2 J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda s}) & a_2 J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda s}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1^0 J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}) & -a_1^0 J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}) \\ a_2^0 J_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda}) & a_2^0 J_{-\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (21)$$

sau

$$[H]_{0-x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \left[\cos \frac{\omega}{c} x - \frac{c\alpha}{\omega d_0} \sin \frac{\omega}{c} x \right] & \frac{4c}{\pi \omega E d_0^2 s} \sin \frac{\omega}{c} x \\ -\frac{\pi E d_0}{4c} \left[c\alpha(s-1) \cos \frac{\omega}{c} x + \frac{c^2 \alpha^2 + \omega^2 d_0^2 s}{\omega d_0} \sin \frac{\omega}{c} x \right] & s \left[\frac{c\alpha}{\omega d_0 s} \sin \frac{\omega}{c} x + \cos \frac{\omega}{c} x \right] \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Dacă $d_0 < d_1$ atunci

$$\alpha = \frac{d_1 - d_0}{l}; A = A_0 \left(1 + \frac{\alpha}{d_0} x\right)^2; s = 1 + \frac{\alpha}{d_0} x. \quad (23)$$

Dacă sunt studiate vibrațiile axiale cuplate cu vibrațiile de încovoiere, în relația (15) matricea de transfer este 6×6 și are forma

$$[H]_{0-1} = \begin{bmatrix} [H]_{0-1}^b & [0]_{4 \times 2} \\ [0]_{2 \times 4} & [H]_{0-1}^a \end{bmatrix} \quad (24)$$

unde:

- $[0]_{2 \times 4}$ și $[0]_{4 \times 2}$ sunt matrice nule 2×4 și, respectiv, 4×2 ;
- $[H]_{0-1}^a$ este matricea de transfer 2×2 pentru vibrații axiale dată de relația (17) sau (19);
- $[H]_{0-1}^b$ este matricea de transfer 4×4 pentru vibrații de încovoiere (subcap. 4.1)

Vectorii de stare în secțiunile 0 și 1 sunt:

$$\{q\}_1 = \{Y \quad \varphi \quad M \quad F \quad U \quad N\}_1^t \quad \{q\}_0 = \{Y \quad \varphi \quad M \quad F \quad U \quad N\}_0^t. \quad (25)$$

unde Y -deplasarea la încovoiere (deformația la încovoiere); $\varphi = \frac{dY}{dx}$ -deformația unghiulară (rotația secțiunii); M -momentul încovoietor; F -forța tăietoare în secțiunile 1 și, respectiv, 0.

Rezolvarea problemei vibrațiilor cuplate pentru bara cu secțiune transversală variabilă este similară. Frecvențele proprii ale vibrațiilor axiale cuplate cu vibrațiile libere de încovoiere sunt obținute prin rezolvarea numerică a unei ecuații derivate prin folosirea condițiilor la limită la capetele barei.

Pentru a putea aplica metoda matricelor de transfer propuse în studiul vibrațiilor axiale libere ale unei bare de configurație complexă (Figura 4.2.3), trebuie create unele matrice speciale. De exemplu, într-o secțiune (nod) pot apărea o serie de discontinuități, cum ar fi: un salt de secțiune, un suport elastic axial sau o masă concentrată. Prin urmare, în fiecare nod există doi vectori de stare definiți, unul în stânga, $\{q\}_k^l$ și celălalt în dreapta, $\{q\}_k^r$, secțiunii (nodului) k . Relația dintre acești vectori de stare se scrie astfel:

$$\{q\}_k^r = [N]_k \{q\}_k^l \quad (30)$$

unde matricea pătrată $[N]_k$, numită în mod obișnuit matrice de trecere prin puncte (matrice de trecere).

Dacă sunt studiate vibrațiile axiale cuplate cu vibrațiile de încovoiere, matricea de trecere, $[N]_k$, din relația (30) esteis 6x6 și are forma:

$$[N]_k = \begin{bmatrix} [N]_k^b & [0]_{4 \times 2} \\ [0]_{2 \times 4} & [N]_k^a \end{bmatrix}, \quad (33)$$

where:

- $[N]_k^a$ este matricea de trecere 2x2 pentru vibrațiile axiale dată de relațiile (31), (32);
- $[N]_k^b$ este matricea de trecere 4x4 pentru vibrațiile de încovoiere prezentată în subcap. 4.1.

Relațiile (15) sau (26) pot fi scrise pentru fiecare element, iar relațiile (30) pot fi scrise pentru fiecare nod. După aplicarea succesivă a mai multor substituții, poate fi scrisă o relație matriceală între vectorii de stare ai nodului n (punctul final), $\{q\}_n$, și nodului 0 (punctul de plecare), $\{q\}_0$, astfel:

$$\{q\}_n = [Q] \{q\}_0. \quad (34)$$

Matricea pătrată (2x2) pentru vibrațiile axiale, sau (6x6) pentru vibrațiile cuplate (încovoiere și axiale), notată $[Q]$, se numește matrice de transfer corespunzătoare structurii grinzii. Aplicând condițiile de rezemare la limită și de încărcare la capetele grinzii, din ecuația (34) se poate extrage un sistem algebric liniar și omogen cu următoarea formă: $[Q]_{red} \{q\}_{red} = \{0\}$. O soluție a acestui sistem liniar există dacă și numai dacă determinantul său se anulează. Prin urmare, ecuația pulsațiilor proprii poate fi scrisă astfel:

$$\det[Q]_{red} = 0 \quad (35)$$

care este rezolvată numeric pentru obținerea frecvențelor proprii.

Ca exemplu pentru acest studiu, s-a ales o bară conică în două tipuri de condiții la limită (Figura 4.2.5). Bara are lungimea $l = 0.5 \text{ m}$, diametrul mai mare (nodul 0), $d_0 = 0.03 \text{ m}$, diametru mai mic (nodul 1), $d_1 = 0.005 \text{ m}$. Conicitatea este deci $\alpha = 0.05$ (5%). Bara este realizată din oțel cu densitatea $\rho = 7800 \text{ Kgm}^{-3}$, modulul de elasticitate longitudinal $E = 210 \text{ MPa}$. Frecvențele proprii pentru vibrații axiale ale fiecărei bare conice au fost determinate numeric pentru fiecare bară conică prin: a) metoda matricelor de transfer folosind funcții Bessel; b) metoda matricelor de transfer considerând bare cu secțiunea variabilă în trepte (pas cu pas); c) metoda elementelor finite (pentru a compara rezultatele). În metoda matricelor de transfer folosind bare cu secțiunea variabilă în trepte (pas cu pas) bara dreaptă conică (Figura 4.2.6) este împărțită în $N=100$ bare (elemente) cilindrice cu secțiuni constante.

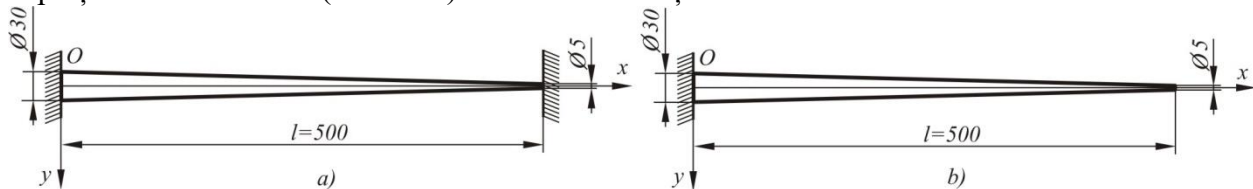


Figura 4.2.5. Bară conică cu diferite condiții la limită. a) încastrată la ambele capete; b) în consolă

Bară încastrată la ambele capete

S-au studiat mai întâi vibrațiile barei conice încastrate la ambele capete (Figura 4.2.5a). Condițiile la limită sunt: la capătul din stânga ($x = 0$) și la capătul drept ($x = l$) deformația este zero ($U=0$).

Valorile primelor cinci frecvențe proprii de vibrație, obținute prin metoda aproximării barei conice cu o bară cu secțiunea variabilă în trepte, confirmă că rezultatele obținute prin aplicarea metodei matricelor de transfer pe baza funcțiilor Bessel sunt corecte (Tabelul 1).

Primele frecvențe proprii ale barei conice fixate la ambele capete (Figura 4.2.5a) au fost comparate cu datele corespunzătoare ale unei bare cilindrice al cărui diametru este egal cu diametrul unui capăt al

grinzii conice (Tabelul 1). După cum se poate observa, valorile frecvențelor proprii ale barei conice sunt practic identice cu valorile frecvențelor proprii ale barei cilindrice cu aceeași lungime ca și bara conică.

Tabelul 1. Frecvențele proprii ale vibrațiilor axiale pentru grinda conică încastrată la ambele capete

Mod propriu	Frecvențe proprii [Hz]		
	Bară cilindrică $d = d_0 = 0.03 \text{ m}$	Bară conică $\alpha = 0.05 \text{ (5\%)}$	
	sau $d = d_1 = 0.005 \text{ m}$	MMT folosind funcții Bessel	MMT folosind elemente cilindrice (secțiune variabilă în trepte)
Mod 1	5188.69	5188.76	5188.81
Mod 2	10377.39	10378.52	10377.56
Mod 3	15566.09	15566.28	15566.31
Mod 4	20755.04	20755.04	20755.06
Mod 5	25943.74	25944.67	25943.76

Bară în consolă (încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt)

Condițiile la limită la capetele barei pentru cazul barei încastrate la un capăt și liberă la celălalt capăt (bară în consolă) (Figura 4.2.5b) are:

- la capătul din stânga ($x = 0$) deformația este zero ($U = 0$);
- la capătul din dreapta ($x = l$), forța este egală cu zero ($N = 0$).

Pulsațiile proprii pentru bara conică în consolă au fost de asemenea determinate experimental, folosind o bară conică din oțel ($\rho = 7800 \text{ Kg m}^{-3}$, $E = 210 \text{ MPa}$). Bara conică ($l = 0.5 \text{ m}$) are diametrul mai mare de $d_0 = 0.03 \text{ m}$ la capătul încastrat, pe un bloc de oțel, și diametrul mai mic de $d_1 = 0.005 \text{ m}$ la capătul liber (Figura 4.2.7). Configurația a inclus un accelerometru tipic (B&K 4507, Bruel&Kjaer Danemarca), un sistem de achiziție (NI-DAQ 9233, National Instruments, Austin, TX) și un computer personal. Datele culese au fost înregistrate și post-procesate folosind software-ul de analiză modală (dBFA Suite 4.9).

Au fost comparate valorile primelor cinci frecvențe proprii de vibrație obținute cu metoda matricelor de transfer folosind funcții Bessel, cu metoda matricelor de transfer pentru bară cu secțiunea variabilă în trepte și cu cele determinate experimental experimental (Tabelul 2). În general, frecvențele proprii obținute cu ambele metode teoretice au fost apropiate de datele experimentale. Erorile de frecvență pentru metoda matricelor de transfer folosind funcțiile Bessel au fost de obicei mai mici decât erorile corespunzătoare obținute cu metoda matricelor de transfer pentru bară cu secțiunea variabilă în trepte. În timp ce un număr crescut de elemente (pași) poate crește acuratețea abordării în mai mulți pași, ele cresc, de asemenea, efortul de calcul. Prin urmare, metoda matricelor de transfer care utilizează funcțiile Bessel pare a fi mai eficientă decât metoda matricelor de transfer pentru bare cu secțiunea variabilă în trepte.

Tabelul 2. Frecvențele proprii pentru vibrațiile axiale ale barei conice în consolă

Mod propriu	Frecvențe proprii [Hz]			
	Bară cilindrică $d = d_0 = 0.03 \text{ m}$	Bară conică $\alpha = 0.05 \text{ (5\%)}$		
	sau $d = d_1 = 0.005 \text{ m}$	MMT folosind funcții Bessel (%)	MMT folosind elemente cilindrice (secțiune variabilă în trepte) (%)	Rezultate experimentale
Mod 1	2594.35	4382.9 (5.4)	4403.50 (5.9)	4158
Mod 2	7783.04	9008.6 (1.7)	9034.44 (2)	8855
Mod 3	12971.99	13859 (5.6)	13882.20 (5.8)	13120
Mod 4	18160.69	18843 (2.4)	18861.11 (2.5)	18400
Mod 5	23349.39	23899	23913.04	-----

BIBLIOGRAFIE

1. **Boianġiu, M.**, Boianġiu., A., Chapter 40, Influence of the constructive and operational features on the centrifuges, DAAAM International Scientific Book 2010, ISSN 1726-9687, ISBN 978-3-901509-74-2, Vienna, December 2010, pg. 445-462,2010
2. **Boianġiu, M.**, Ceaușu, V., Untăroiu, C., A transfer matrix method for free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with variable cross section, Journal of Vibration and Control, iunie 2016, Vol. 22, nr. 11, pag. 2591-2602, iunie 2016, DOI: 10.1177/1077546314550699, WOS:000377439600004
3. **Boianġiu, M.**, Alecu, A., Chapter 77, A transfer matrix method for study of vibrations of plane bars systems,, DAAAM International Scientific Book 2009, ISSN 1726-9687, ISBN 978-3-901509-69-8, Vienna, December 2009, pg. 797-814, 2009.
4. **Boianġiu, M.**, Alecu, A., Study of vibrations of a crankshaft having a crack, CD-Rom Proceedings of “3rd International Conference on Experiments, Process, System modeling, Simulation & Optimisation”, Atena, Grecia, 08-11 iulie 2009, paper 96, 2009.
5. **Boianġiu, M.**, Boianġiu, A., On the support of the resultant vector of d’Alembert’s fictitious forces for bars and plates in rotation motion, Acta Polytechnica Hungarica, ISSN 1785-8860, Vol. 8, Nr. 2, pag. 81-89, 2011. WOS: 000292172000006.
6. **Boianġiu, M.**, Boianġiu, A., Transfer matrix method applied in the study of vibrations of the centrifuges with the basket in the console, Journal of Acoustic and Vibrations, ISSN 1584-7284, Vol. IX, Nr. 1/2012, pag. 47-52, 2012.
7. **Boianġiu, M.**, Boianġiu, G., Improved study of vibration of the centrifuges with the basket in console, Revista de chimie (București), ISSN 0034-7752, Vol. 66, Nr. 9, pag. 1528-1534, 2015, WOS:000363359700037
8. **Boianġiu, M.**, Boianġiu, G., On the calculus of centrifugal moments for plates and plane bars, Acta Polytechnica Hungarica, ISSN 1785-8860, Vol. 9, Nr. 2, pag. 221-230, 2012. WOS: 000306096900014.
9. **Boianġiu, M.**, Boianġiu, G., On the vibrations of the centrifuges with a cylinder in console / Asupra vibrațiilor centrifugelor cu tamburul în consolă, INMATEH – Agricultural Engineering, ISSN 2068-4215, nr. 1 / 2013, Vol. 39, pagina 91.
10. **Boianġiu, M.**, Tiron, A., ALECU, A., On the application of the theorem of the angular momentum, Lucrare trimisă spre publicare la o revistă. În curs de evaluare.
11. **Boianġiu, M.**, Untăroiu, C., Alecu, A., Behaviour of a crankshaft containing a crack, Annals of DAAAM for 2009 & Proceedings of the 20th International DAAAM symposium, ISSN 1726-9679, ISBN 978-3-901509-70-4, 25-28th November 2009. Vienna, Austria, Publisher: DAAAM International Viena, pg. 367-368, 2009.
12. Ion, C., **Boianġiu, M.**, Ion, E., E., Boianġiu, A., Grafica inginerescă aplicată în studiul vibrațiilor sistemelor multiliniare cu un grad de libertate, Al VI-lea Simpozion de Geometrie descriptivă și grafică inginerescă computerizată, Universitatea “Politehnica” din București, Facultatea de Inginerie Aerospațială, Buletinul conferinței, Vol. I, ISBN 973-98447-9-0, pag. 57-62, București, 4-6 iunie, 1998.
13. Ion, C., **Boianġiu, M.**, Ion, E., E., Boianġiu, A., Metodă grafică pentru studiul accelerațiilor sistemelor vibratoare –Revista Academiei Tehnice Militare nr.3, pag. 129-134, București, 1994.
14. Untăroiu, C., **Boianġiu, M.**, Dynamic stability analysis of a simple rotor with a breathing crack, VIIIth International Conference in Continuum Mechanics, CD- Proceedings, Liptovský Ján, Slovak Republic, ISBN – 80 – 968368 – 1-1, 19-24th September 2000.
15. Untăroiu, C., **Boianġiu, M.**, The vibration analysis of a crankshaft containing a crack, VIIIth International Conference in Continuum Mechanics, CD- Proceedings, Liptovský Ján, Slovak Republic, ISBN – 80 – 968368 – 1-1, 19-24th September 2000.

16. Untăroiu, C., Untăroiu, A., **Boianiu, M.**, Dynamic stability analysis of periodically time-varying rotor system with a transverse crack, Engineering Journal, Scientific Research Publishing Inc., USA, ISSN print 1947-3931, ISSN online 1947-394X, Vol. 3, Nr. 7, pag. 719-725, 2011. DOI: 104236/eng.2011.37086.