Universitatea Naţională de Ştiinţă şi Tehnologie
POLITEHNICA Bucureşti
Departmentul de Matematică & Informatică
Splaiul Independenţei 313, 060042 Bucureşti, România

Rezultate de punct fix pentru clase de operatori în spaţii geodezice

Cristina-Mihaela CĂLINEAŢĂ
E-mail: cristina.calineata@upb.ro

Rezumatul tezei de doctorat

Sub conducerea Prof. Dr. habil. Mihai POSTOLACHE

Bucureşti, 25 octombrie, 2024

Cuvinte şi fraze cheie: spaţiu CAT(0); spaţiu W-hiperbolic; operator L_2; punct fix comun; iteraţie; Δ-convergenţă; convergenţă; semiplanul Poincaré; funcţie de selecţie; contracţie (γ, B)-generalizată; operator neexpansiv B-generalizat; metrică JR; operator neciclic; pereche de optimă proximitate; condiţia (E); operator E_r; stabilitate; dependenţă de date; aplicaţie canonică de convexitate; simulare pe calculator.

Clasificare Matematică 2010: 47H09; 47H10; 54H25.

Cuprins

Rezumat

Obiectiv general. Acest studiu este motivat de necesitatea găsirii unor clase generale de operatori, dedicate problemelor de punct fix în spaţii geodezice, alături de procese iterative generale care să facă posibilă determinarea numerică a soluţiilor, atunci când este asigurată existenţa acestora. Această lucrare îşi propune să ofere o abordare consistentă acestei probleme, prin intermediul a două proceduri iterative în trei paşi: iteraţia S_n [35] şi iteraţia Thakur *et al.* [37], ambele fiind adaptate în context geodezic. Direcţia generală de studiu este la graniţa dintre analiza neliniară şi algoritmii numerici, iar rezultatele principalele sunt legate de probleme de punct fix, cu aplicaţii netriviale bazate pe modelare numerică. Concluziile rezultate în urma acestui studiu pun în evidenţă câteva caracteristici ale proceselor iterative studiate:

- *versatilitate.* În această teză, sunt utilizate diferite clase de operatori neexpansivi generalizaţi: operatori cu proprietatea (E), operatori L_2, proiecţii metrice, operatori cu proprietatea (P). Procedurile iterative folosite sunt adaptate la spaţii geometrice curbate: spaţii CAT(0) şi spaţii W-hiperbolice.
- *valoare instrumentală.* Una dintre preocupările principale în studiul proceselor iterative este legată de convergenţa şirului de iteraţii către soluţia problemei studiate. De cele mai multe ori, rezultatele obţinute se referă la convergenţa slabă. Totuşi, prin introducerea unor condiţii suplimentare impuse structurii metrice sau operatorului implicat în procesul iterativ, se pot obţine şi rezultate de convergenţă.
- *aspecte calitative (stabilitate şi dependenţă de date).* Procedurile iterative sunt folosite în ştiinţele aplicate pentru a oferi algoritmi numerici care să determine soluţiile unor diverse tipuri de probleme neliniare. Execuţia acestor algoritmi este întotdeauna supusă perturbaţiilor cauzate de limitele reprezentării pe calculator. Prin urmare, trebuie să ne asigurăm că aproximările făcute în timpul execuţiei algoritmului nu afectează dramatic estimarea soluţiei. O analiză calitativă a unui proces iterativ în general, şi a procesului S_n în particular, este motivată de astfel de consideraţii practice.

Metodologie. Metodele utilizate pentru realizarea analizei procedurii iterative implicate sunt variate. Studiul convergenţei se bazează pe unicitatea centrului asimptotic. Stabilitatea este analizată în conformitate cu modelul propus de Harder şi Hiks [20], iar analiza dependenţei de date utilizează metoda iniţiată de Rus şi Mureşan [34]. Analiza comparativă privind eficienţa procesului iterativ studiat în raport cu alte proceduri este realizată folosind tehnici polinomiografice, introduse de Kalantari [23]. Utilizăm coordonate potrivite pentru a găsi expresia adecvată a procesului iterativ pe semiplanul Poincaré. Algoritmii folosiţi în modelarea numerică pentru simulare pe computer sunt rulaţi în Matlab.

Contextul general. Teoria punctului fix presupune studiul aşa numitei ecuaţii de punct fix, $x = T(x)$, asociată unei aplicaţii $T\colon X \to X$ care acţionează pe o mulţime nevidă într-un spaţiu metric; pentru o sursă fundamentală, vezi Caccioppoli [6]. Astăzi se fac studii legate de generalizarea rezultatelor lui Caccioppoli, prin căutarea unor clase mai largi de operatori şi a cadrelor metrice potrivite, care asigură proprietăţi topologice şi geometrice necesare pentru existenţa punctelor fixe. Printre contribuţiile remarcabile se numără cele aduse de: Chatterjea [12], Ćirić [13], Garcia-Falset *et al.* [18], Gabeleh *et al.* [16, 17], Hardy şi Rogers [21], Kannan [24], Reich [33], Suzuki [36].

Odată ce existenţa punctului fix este demonstrată, este de dorit ca acesta să fie calculat numeric. De aceea, studiul procedurilor iterative cu mai mulţi paşi, asociate cu operatori neexpansivi generalizaţi, a fost iniţiat în cadrul liniar şi dezvoltat recent atât din perspectiva comportamentului convergenţei, cât şi din perspectiva stabilităţii şi a independenţei de date. Este de remarcat faptul că tranziţia către structuri neliniare nu este trivială, tocmai datorită metodei de construcţie a schemelor iterative. O analiză atentă evidenţiază faptul că liniaritatea este de fapt o cerinţă prea puternică, nu neapărat esenţială, care poate fi înlocuită cu anumite proprietăţi de convexitate. Pentru unele rezultate de referinţă în această direcţie, vă rugăm să consultaţi lucrările fundamentale: Mann [29], Krasnosel'skii [26], Ishikawa [22], sau articole mai recente: Noor [30], Sintunavarat şi Pitea [35], Thakur *et al.* [37]. Aceste rezultate remarcabile sunt introduse în spaţii liniare normate.

În diverse cazuri, metrica nu este suficientă pentru studierea problemelor specifice, care pot fi modelate ca probleme de punct fix. De aceea, contextele în care au fost dezvoltate anumite rezultate originale au evoluat către structuri îmbogăţite, cum ar fi spaţiile CAT(0) [1, 19] sau spaţiile W-hiperbolice [25]. Ambele structuri au fost identificate ca fiind spaţii adecvate pentru obţinerea rezultatelor teoretice în teoria punctului fix, deoarece multe concepte valabile în spaţiile Banach au corespondenţe în aceste contexte geometrice (vezi [14], [28]).

Descrierea tezei: structură şi conţinut.

Capitolul 1, **Operatori cu proprietatea $\mathbf{L_2}$ în spaţii CAT(0)** ([7], [9]), vizează rezolvarea problemei punctului fix comun pentru două aplicaţii din clasa operatorilor L_2, introdusă foarte recent în [27]. Definiţia formală a condiţiei L_2 cere ca operatorul T să satisfacă inegalitatea

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x),$$

pentru fiecare şir de aproximare a punctului fix $\{x_n\}$ (abreviat a.f.p.s., adică un şir $\{x_n\}$ pentru care $\{d(x_n, Tx_n)\}$ converge către zero).

Contextul general utilizat în acest capitol este cel al spaţiilor CAT(0), pentru care am putut furniza Exemplul 1, bazat pe mulţimea intervalelor de numere reale închise şi mărginite.

Exemplul 1. Fie $M = \{[a, b] \subset \mathbb{R} \,|\, a < b\}$ o mulţime de intervale închise în $\mathbb{R}$. Pe $M \times M$, introducem metrica d descrisă prin formula

$$d([a, b], [c, d]) = 2 \ln \frac{\sqrt{(d-b)^2 + (c-a)^2} + \sqrt{(d-a)^2 + (c-b)^2}}{\sqrt{2(b-a)(d-c)}},$$

pentru toţi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Atunci, M este izometrică cu $\mathbb{H}^2$ (semiplanul Poincaré), ceea ce implică faptul că (M, d) este un spaţiu CAT(0).

Ca instrument pentru aproximarea soluţiei problemei punctului fix comun pentru o pereche (F, G) de operatori L_2, introducem o nouă schemă iterativă, inspirată din [35] şi adaptată corespunzător pentru contextul CAT(0).

Algoritmul 1. Fie (M, d) un spaţiu CAT(0) şi C o mulţime nevidă şi convexă a lui M. Pentru doi operatori $F\colon C \to C$ şi $G\colon C \to C$ şi $x_0 \in C$, şirul $\{x_n\}$ este generat în trei paşi după cum urmează:

$$\begin{array}{lcl} y_n & = & (1-a_n)x_n \oplus a_n F x_n \\ z_n & = & (1-b_n)x_n \oplus b_n G y_n \\ x_{n+1} & = & (1-c_n)F z_n \oplus c_n F y_n, \quad n \geq 0, \end{array}$$

unde $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ şi $\{c_n\}$ sunt şiruri de numere reale dintr-un interval $[a, b]$, $0 < a \leq b < 1$.

Scopul acestui capitol este de a introduce condiţii adecvate astfel încât şirul $\{x_n\}$, generat de Algoritmul 1, în raport cu o pereche (F, G) de operatori L_2 să fie Δ-convergent, respectiv convergent, către un punct fix comun $x \in \mathrm{Fix}(F, G)$ al celor două aplicaţii.

În Lema 1 demonstrăm că un operator L_2 satisface principiul *semi-închiderii* al lui Browder, unde în loc de convergenţa slabă presupunem Δ-convergenţa.

Lema 1. *Fie (M,d) un spaţiu* $\mathrm{CAT}(0)$ *complet, C o submulţime a lui M şi fie $F\colon C \to M$ un operator* L_2. *Dacă $\{x_n\} \subset C$ este un a.f.p.s. pentru F astfel încât $x_n \stackrel{\Delta}{\to} x \in M$, atunci $Fx = x$.*

Următoarele leme sunt enunţate şi demonstrate, furnizând unele instrumente tehnice pentru rezultatele principale ale capitolului. Lema 2, Lema 3 şi Lema 4 oferă concluzii pentru o clasă şi mai largă de operatori (operatorii cvasi-neexpansivi) şi se referă la mulţimea soluţiilor şi la unele proprietăţi ale şirurilor iterative.

Lema 2. *Fie $F\colon C \to C$ şi $G\colon C \to C$, unde C este o submulţime nevidă închisă a unui spaţiu* $\mathrm{CAT}(0)$, *doi operatori cvasi-neexpansivi. Atunci mulţimea* $\mathrm{Fix}(F,G)$ *este închisă.*

Lema 3. *Fie (M,d) un spaţiu* $\mathrm{CAT}(0)$ *şi fie C o submulţime nevidă şi convexă a lui M. Fie $F\colon C \to C$ şi $G\colon C \to C$ doi operatori cvasi-neexpansivi astfel încât* $\mathrm{Fix}(F,G) \neq \emptyset$. *Atunci, pentru şirurile $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, generate de Algoritmul* 1 *şi pentru orice $q \in$* $\mathrm{Fix}(F,G)$, *limitele următoare*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,q), \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n,q), \quad \lim_{n\to\infty} d(z_n,q)$$

există şi sunt egale.

Lema 4. *Fie (M,d) un spaţiu* $\mathrm{CAT}(0)$ *complet şi fie C o submulţime nevidă şi convexă a lui M. Considerăm $F\colon C \to C$ şi $G\colon C \to C$ doi operatori cvasi-neexpansivi care au cel puţin un punct fix comun şi fie şirurile $\{x_n\}, \{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ generate de Algoritmul* 1. *Atunci,*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(z_n,x_n) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,Fx_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,Gy_n) = 0$.

Structura schemei noastre iterative face mai dificilă stabilirea faptului că $\{x_n\}$ este un şir de aproximare a punctului fix pentru operatorul G, în comparaţie cu operatorul F. Folosind conceptul de şiruri echivalente (două şiruri $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ care satisfac $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$), reuşim să evităm acest obstacol. Astfel, Lema 5 demonstrează că două şiruri echivalente au centre asimptotice şi Δ-limite identice.

Lema 5. *Dacă $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ sunt două şiruri mărginite echivalente într-un spaţiu* $\mathrm{CAT}(0)$ *(M,d), atunci $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$. Mai mult, dacă $x_n \stackrel{\Delta}{\to} p \in M$, atunci $y_n \stackrel{\Delta}{\to} p$.*

În final, Teorema 1 furnizează condiţii suficiente astfel încât şirul $\{x_n\}$ generat de Algoritmul 1 să fie Δ-convergent către un punct fix comun al celor doi operatori F şi G, care satisfac condiţia L_2, în cazul în care astfel de puncte există. O îmbunătăţire este prezentată în Teorema 2, unde este analizată convergenţa.

Teorema 1. *Fie* (M, d) *un spaţiu* $\mathrm{CAT}(0)$ *complet şi fie* C *o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui* M*. Dacă* $F\colon C \to C$ *şi* $G\colon C \to C$ *sunt doi operatori care satisfac condiţia* L_2 *astfel încât* $\mathrm{Fix}(F, G) \neq \emptyset$*, atunci şirul* $\{x_n\}$*, generat de Algoritmul* 1*, este* Δ*-convergent către un element al* $\mathrm{Fix}(F, G)$*.*

Teorema 2. *Fie* (M, d) *un spaţiu* $\mathrm{CAT}(0)$ *complet şi* C *o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui* M *şi fie* $F\colon C \to C$ *şi* $G\colon C \to C$ *doi operatori cu proprietatea* L_2*. Atunci, şirul iterativ* $\{x_n\}$ *converge către un punct al* $\mathrm{Fix}(F, G)$ *dacă şi numai dacă* $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathrm{Fix}(F, G)) = 0$*.*

În continuare, acest capitol include şi un exemplu gândit să ilustreze rezultatele descrise mai sus. Fie C un punct pe axa Oy pozitivă a semiplanului Poincaré $\mathbb{H}^2$ şi fie D discul centrat în C cu o anumită rază fixată r. Considerăm operatorii $G(x, y) = (-x, y)$ şi $FX = \frac{1}{2}C \oplus \frac{1}{2}X$, dacă $X = (x, y) \in \mathrm{int}D$, $FX = S_C\left(\frac{1}{2}C \oplus \frac{1}{2}X\right)$, dacă $X = (x, y) \in \partial D$, unde $S_C(Y)$ reprezintă simetricul punctului Y faţă de punctul C. Ambii operatori F şi G sunt operatori L_2. Mai mult, şirul generat de Algoritmul 1 converge către punctul C.

Capitolul 2, **O nouă abordare a operatorilor mediaţi în spaţii CAT(0)** ([7], [8]), ilustrează noi condiţii contractive şi de neexpansivitate, inspirate de tehnica de îmbogăţire introdusă de Berinde şi Păcurar [3, 5], care înlocuieşte în mod fundamental operatorul T implicat în anumite condiţii cu versiunea sa mediată. Această idee, aplicată în contextul spaţiilor $\mathrm{CAT}(0)$ şi al operatorilor neexpansivi, conduce la Definiţia 1, care implică operatorul mediat $T_\alpha x = (1-\alpha)x \oplus \alpha Tx$.

Definiţia 1. Fie $T\colon X \to X$ un operator dat într-un spaţiu $\mathrm{CAT}(0)$ (X, d). Dacă există $\alpha \in (0, 1]$ astfel încât
$$d(T_\alpha x, T_\alpha y) \leq d(x, y),$$
pentru toţi $x, y \in X$, atunci T se numeşte operator α-îmbogăţit neexpansiv.

În prima parte a capitolului, dezvoltăm tehnica de mediere pentru condiţiile contractive, permiţând parametrului de mediere α să varieze şi să ia chiar valori în afara intervalului unitar. În termeni geometrici, acest lucru corespunde punctelor care se află pe întreaga geodezică determinată de punctele x şi, respectiv, Tx. Pentru a face acest lucru, presupunem că (X, d) este un spaţiu CAT(0) înzestrat cu *proprietatea de extensie geodezică*, şi notăm prin $S^{\lambda}_{[p,q]}$ mulţimea tuturor punctelor $r \in X$ pentru care există o geodezică ce conţine segmentul $[p, q]$, pe care $r = (1-\lambda)p \oplus \lambda q$. În cazul degenerat, când $p = q$, vom lua $S^{\lambda}_{[p,q]} = \{p\}$.

Pe baza conceptului de funcţie de selecţie descris în Definiţia 2, definim o condiţie contractivă îmbogăţită mai generală în Definiţia 3. Motivaţia pentru acest fapt este că perechi de puncte diferite pot necesita parametri de mediere diferiţi pentru a satisface o condiţie de tip contracţie. Deşi schimbarea nu pare semnificativă, de fapt este. Astfel, Exemplul 2 demonstrează că contracţiile generalizate introduse nu sunt neapărat continue (cum sunt contracţiile îmbogăţite în sensul Berinde [5]). Mai mult, unele dintre ele nu sunt nici operatori cvasi-neexpansivi, cum arată Exemplul 3.

Definiţia 2. Fie (X, d) un spaţiu CAT(0). O funcţie $B \colon X \rightrightarrows 2^{\mathbb{R}}$, care atribuie fiecărui $p \in X$ o submulţime $B(p) \subseteq \mathbb{R}$, cu $B(p)\setminus\{0\} \neq \emptyset$, se numeşte funcţie de selecţie.

Definiţia 3. Fie $\gamma \in [0, 1)$ şi fie $B \colon X \rightrightarrows 2^{\mathbb{R}}$ o funcţie de selecţie. Spunem că un operator $T \colon X \to X$ este contracţie (γ, B)-generalizată dacă, pentru fiecare pereche $(p, q) \in X \times X$, şi fiecare $\beta \in B(q)$, $\beta \neq 0$, există $\alpha \in B(p)$, $\alpha \neq 0$ astfel încât

$$d(u, v) \leq \gamma d(p, q),$$

unde $u \in S^{\alpha}_{[p,Tp]}$, $v \in S^{\beta}_{[q,Tq]}$.

Menţionăm că, dacă $B(p) = \{\alpha\}$, pentru orice $p \in X$ şi pentru $\alpha \in (0, 1]$, atunci obţinem versiunea contractivă a Definiţiei 1, iar pentru $\alpha = 1$, obţinem contracţiile clasice.

Exemplul 2. Fie $X = \mathbb{R}$ înzestrată cu metrica Euclideană. Considerăm operatorul

$$T \colon X \to X, \qquad Tx = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Q}, \\ \dfrac{x}{2}, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

şi funcţia de selecţie

$$B \colon X \rightrightarrows 2^{\mathbb{R}}, \quad B(x) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ \{2\}, & \text{if } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Atunci, T este o conctracţie (γ, B)-generalizată, pentru orice $\gamma \in [0, 1)$.

Exemplul 3. Fie X planul real $\mathbb{R}^2$, şi $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$ două puncte. Înzestrăm X cu aşa-numita metrică JR

$$d(p,q) = \begin{cases} |y_1 - y_2|, & x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2|, & x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

Acesta este un exemplu bine-cunoscut de arbore de tip $\mathbb{R}$, şi prin urmare un spaţiu CAT(0), care are în plus proprietatea de extensie geodezică.

Considerăm operatorul

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = \begin{cases} (x, y+1), & y > 0 \\ (-x, y), & y = 0 \\ (x, y-1), & y < 0. \end{cases}$$

Remarcăm faptul că singurul punct fix al operatorului T este originea $O(0,0)$. De asemenea, se poate verifica faptul că T nu este cvasi-neexpansiv şi, prin urmare, nu aparţine multor clase bine-cunoscute de operatori. Mai mult, deoarece T nu este continuu, nu este nici contracţie îmbogăţită în sensul lui Berinde [3]. Cu toate acestea, T este o contracţie (γ, B)-generalizată în sensul Definiţiei 3, pentru funcţia de selecţie

$$B\colon X \rightrightarrows 2^{\mathbb{R}}, \quad B(x,y) = \begin{cases} \{-(|x| + |y|)\}, & \text{if } y \neq 0, \\ \left\{\dfrac{1}{2}\right\}, & \text{if } y = 0. \end{cases}$$

În ceea ce priveşte calculul numeric al punctelor fixe, este o practică obişnuită să construim aceste puncte ca limite ale unor iterate. În contextul unui spaţiu CAT(0) care are proprietatea de extensie geodezică, folosim procesul de iterare de tip Mann

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} \in S^{\alpha_n}_{[x_n, Tx_n]}, \quad \alpha_n \in B_\delta, \end{cases} \tag{1}$$

unde B_δ este o submulţime mărginită în $\mathbb{R}\backslash(-\delta, \delta)$, cu $\delta > 0$ şi T este o contracţie (γ, B)-generalizată. Principalele rezultate sunt incluse în Teorema 3 şi se referă la existenţa punctelor fixe şi la abordarea lor numerică.

Teorema 3. *Fie* (X, d) *un spaţiu* CAT(0) *complet care are proprietatea de extensie geodezică şi fie* B_δ *o submulţime mărginită în* $\mathbb{R}\backslash(-\delta, \delta)$, *pentru un* $\delta > 0$. *Considerăm funcţia de selecţie* $B\colon X \rightrightarrows 2^{B_\delta}$ *(prin urmare,* $B(x) \subset B_\delta$, *pentru orice* $x \in X$*). Dacă* $T\colon X \to X$ *este o contracţie* (γ, B)*-generalizată, atunci* T *are un unic punct fix. Mai mult, iteraţia* (1) *converge către unicul punct fix al lui* T, *pentru o selecţie adecvată a* *pasului iterativ* $\{\alpha_n\}$.

A doua parte a acestui capitol este dedicată unei clase de operatori neexpansivi generalizaţi, aşa cum apar în Definiţia 4, a cărei descriere se bazează în mod esenţial pe o funcţie de selecţie dată.

Definiţia 4. Fie (X, d) un spaţiu CAT(0) şi fie $B\colon X \rightrightarrows 2^{(0,1]}$ o funcţie de selecţie. Un operator $T\colon X \to X$ se numeşte B-generalizat neexpansiv dacă, pentru fiecare pereche $(p, q) \in X \times X$, şi fiecare $\beta \in B(q)$, există $\alpha \in B(p)$, astfel încât

$$d(T_\alpha p, T_\beta q) \leq d(p, q).$$

Încă o dată, observăm că, dacă $B(p) = \{\alpha\}$, pentru orice $p \in X$ şi pentru $\alpha \in (0, 1]$, obţinem operatori îmbogăţiţi în sensul lui Berinde, în timp ce pentru $\alpha = 1$, găsim operatorii neexpansivi. În plus, dacă B este o funcţie de selecţie astfel încât $1 \in B(p)$ pentru toţi $p \in X$, atunci obţinem clasa operatorilor cvasi-neexpansivi.

Generalitatea noilor operatori este demonstrată prin Exemplul 4, care furnizează un operator generalizat neexpansiv care nu este cvasi-neexpansiv.

Exemplul 4. Fie $X = [0, 1] \times [0, 1]$ înzestrat cu metrica JR, anterior prezentată. Considerăm operatorul

$$T\colon X \to X, \quad T(x, y) = \left(\frac{x+1}{2}, 1 - x\right).$$

Atunci, T este un operator neexpansiv generalizat în raport cu funcţia de seleţie

$$B\colon X \rightrightarrows 2^{(0,1]}, \quad B((x, y)) = \begin{cases} \left\{\dfrac{y}{y + \frac{3}{2}(1-x)}\right\}, & \text{if } (x, y) \neq (1, 0), \\ (0, 1], & \text{if } (x, y) = (1, 0), \end{cases}$$

unde $\{\cdot\}$ este o mulţime cu un singur element. Pe de altă parte, operatorul T nu este cvasi-neexpansiv.

Principalele rezultate ale acestui capitol se referă la existenţa punctelor fixe pentru operatorii neexpansivi generalizaţi, precum şi la rezultatele de convergenţă către soluţie, utilizând o schemă de iterare de tip Mann:

$$x_{n+1} = T_{\alpha_n} x_n = (1 - \alpha_n) x_n \oplus \alpha_n T x_n, \quad \alpha_n \in (0, 1), \tag{2}$$

pentru $x_0 \in C$ dat.

Teorema 4 stabileşte existenţa punctelor fixe pentru un caz particular al operatorilor neexpansivi generalizaţi. Mai precis, se consideră o funcţie de selecţie $B\colon X \to (0,1]$, astfel încât pentru fiecare $x \in X$, $B(x)$ este o mulţime formată dintr-un singur element.

Teorema 4. *Fie* (X,d) *un spaţiu* CAT(0) *complet, fie* C *o submulţime mărginită, închisă şi convexă a lui* X *şi fie* $B\colon X \to (0,1]$ *o funcţie de selecţie dată. Atunci, orice operator* B*-generalizat neexpansiv* $T\colon C \to C$ *are un punct fix în* C.

Lema 6 oferă unele condiţii necesare în ipoteza existenţei punctelor fixe, în timp ce Teoremele 5 şi 6 furnizează condiţii suficiente pentru convergenţă.

Lema 6. *Fie* (X,d) *un spaţiu* CAT(0) *complet, şi fie* C *o submulţime mărginită, închisă şi convexă a lui* X*. Considerăm* $T\colon C \to C$ *un operator* B*-generalizat neexpansiv, cu* $B\colon X \rightrightarrows 2^{[\delta,1]}$ *o funcţie de selecţie dată. Dacă* x *este un punct fix al lui* T*, atunci:*

i) *există un şir* $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ *astfel încât limita* $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x)$*, unde* $\{x_n\}$ *este generat de* (2)*, există;*

ii) *mai mult,* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

Teorema 5. *Fie* (X,d) *un spaţiu* CAT(0) *complet şi fie* C *o submulţime mărginită, închisă şi convexă a lui* X*. Dacă* $T\colon C \to C$ *este un operator* B*-generalizat neexpansiv pentru o funcţie de selecţie dată* $B\colon X \rightrightarrows 2^{[\delta,1]}$*, cu* $F(T) \neq \emptyset$*, atunci, pentru orice* $x_0 \in C$*, există un şir* $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ *astfel încât şirul* $\{x_n\}$ *generat de* (2) Δ*-converge către un punct fix al operatorului* T.

Teorema 6. *Fie* (X,d) *un spaţiu* CAT(0) *complet şi fie* C *o submulţime mărginită, închisă şi convexă a lui* X*. Dacă* $T\colon C \to C$ *este un operator* B*-generalizat neexpansiv pentru o funcţie de selecţie dată* $B\colon X \rightrightarrows 2^{[\delta,1]}$*, cu* $F(T) \neq \emptyset$*, care este, de asemenea, semi-compact, atunci, pentru orice* $x_0 \in C$*, există un şir* $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ *astfel încât şirul iterativ* $\{x_n\}$ *generat de* (2) *converge către un punct fix al lui* T.

Capitolul este completat cu o procedură efectivă de calcul pentru punctele unui segment geodezic, în raport cu metrica JR. Rezultatele obţinute au permis implementarea de algoritmi pentru construcţia orbitelor specifice iteraţiei Mann.

În Capitolul 3, **Perechi de optimă proximitate pentru operatori** E_r ([7], [11]), atenţia este îndreptată către studiul perechilor de optimă proximitate ale operatorilor E_r în contextul spaţiilor CAT(0). O pereche proximală puncte fixe este orice soluţie a Problemei 1. Aceasta a fost formulată de Eldred *et al.* în [15] pentru operatori relativ neexpansivi în spaţii Banach strict convexe şi în spaţii Hilbert.

Problema 1. Fie (X,Y) o pereche de submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (M,d). Fiind dat un operator *neciclic*, adică $T\colon X\cup Y\to X\cup Y$, astfel încât $T(X)\subseteq X$ şi $T(Y)\subseteq Y$, să se găsească $x\in X$ şi $y\in Y$ pentru care avem $Tx=x$, $Ty=y$ şi $d(x,y)=\operatorname{dist}(X,Y)$, unde $\operatorname{dist}(X,Y)=\inf\{d(x,y)\colon x\in X, y\in Y\}$.

Scopul acestui capitol este de a extinde studiul Problemei 1 în contextul spaţiilor CAT(0), implicând o clasă mai generală de operatori, aşa cum sunt introduşi în Definiţia 5, pe care îi vom numi operatori E_r neciclici (pe scurt, operatori E_r), bazaţi pe o condiţie similară cu condiţia (E) a lui Garcia-Falset *et al.* [18].

Definiţia 5. Fie (X,Y) o pereche de submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (M,d) şi fie (X_0,Y_0) perechea lor proximală. Spunem că un operator neciclic $T\colon X\cup Y\to X\cup Y$ satisface condiţia relativă de neciclicitate (E) (pe scurt, condiţia E_r) dacă $T(X_0)\subset X_0$, $T(Y_0)\subset Y_0$, şi dacă există $\mu\geq 1$ astfel încât

$$d(x,Ty)\leq \mu d(x,Tx)+d(x,y) \quad\text{and}\quad d(y,Tx)\leq \mu d(y,Ty)+d(x,y),$$

pentru orice $(x,y)\in X\times Y$.

Un rezultat de clasificare este prezentat în Propoziţia 1, subliniind relaţia cu operatorii cvasi-neciclici relativ neexpansivi.

Propoziţia 1. Fiecare operator care satisface condiţia E_r şi care are o pereche de proximitate optimă este un operator cvasi-neciclic relativ neexpansiv.

Ideea principală a acestei părţi este de a studia convergenţa iteratelor generate de o schemă de iteraţie de tip Thakur [37] către perechile de optimă proximitate ale noii clase de operatori. Procedura de iterare, descrisă în Algoritmul 2, este adaptată corespunzător pentru contextul CAT(0).

Algoritmul 2. Fie $x_1\in X_0$ (sau Y_0). Considerăm $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ două şiruri în $[a,b]$, $0<a\leq b<1$, construite prin pasul iterativ

$$\begin{aligned} z_n &= (1-b_n)x_n\oplus b_nTx_n\\ y_n &= T((1-a_n)x_n\oplus a_nz_n)\\ x_{n+1} &= Ty_n, \end{aligned}$$

pentru toţi $n\geq 1$.

În Teorema 7, stabilim proprietatea (P) pentru fiecare pereche de submulţimi nevide, închise şi convexe într-un spaţiu CAT(0). Raţionamentul se bazează pe câteva proprietăţi specifice ale proiecţiei metrice în raport cu perechea proximală (X_0,Y_0). Aceste proprietăţi sunt detaliate în Lema 7, Lema 8, Lema 9, Lema 10.

Lema 7. *Fie* (M,d) *un spaţiu* CAT(0) *complet şi fie* (X,Y) *o pereche de mulţimi închise, convexe ale lui* M. *Dacă* $x \in X_0$ *şi* $y, z \in Y_0$ *sunt trei puncte astfel încât* $d(x,y) \leq d(x,z)$, *atunci* $d(x, P_X(y)) \leq d(x, P_X(z))$.

Lema 8. *Fie* (M,d) *un spaţiu* CAT(0) *complet, fie* (X,Y) *o pereche de mulţimi închise, convexe ale lui* M *şi fie* $x, y \in X_0$. *Atunci* $d(x, P_Y(y)) = d(y, P_Y(x))$.

Lema 9. *Fie* (M,d) *un spaţiu* CAT(0) *şi fie* X, Y *două submulţimi nevide, închise şi convexe ale lui* M. *Presupunem, în plus, că* Y *este mărginită. Atunci submulţimile* X_0 *şi* Y_0 *sunt nevide, închise, convexe şi mărginite.*

Lema 10. *Fie* (M,d) *un spaţiu* CAT(0) *şi fie* (X,Y) *o pereche de submulţimi nevide, închise şi convexe ale lui* M *astfel încât cel puţin una dintre submulţimile* X *sau* Y *este mărginită. Dacă*

$$P\colon X \cup Y \to X \cup Y, \quad P(x) = \begin{cases} P_X(x), & x \in Y \\ P_Y(x), & x \in X, \end{cases}$$

atunci:

i) $d(x, P(x)) = \operatorname{dist}(X,Y)$, *pentru orice* $x \in X_0 \cup Y_0$;

ii) $P(X_0) \subseteq Y_0$ *şi* $P(Y_0) \subseteq X_0$;

iii) P *este o izometrie, adică,* $d(P(x), P(\overline{x})) = d(x, \overline{x})$ *şi* $d(P(y), P(\overline{y})) = d(y, \overline{y})$, *pentru toţi* $x, \overline{x} \in X_0$ *şi* $y, \overline{y} \in Y_0$.

Teorema 7. *Fie* (M,d) *un spaţiu* CAT(0). *Atunci, orice pereche* (X,Y) *de submulţimi nevide, închise şi convexe ale lui* M *are proprietatea* (P).

O altă proprietate importantă a perechii (X,Y), enunţată în Propoziţia 2, se referă la condiţia proximală Opial şi furnizează argumentele pentru a demonstra rezultatul de tip semi-închidere pentru operatorii E_r în Teorema 8.

Propoziţia 2. *Fie* (M,d) *un spaţiu* CAT(0) *şi fie* (X,Y) *o pereche nevidă, închisă, convexă şi proximală a lui* M. *Atunci,* (X,Y) *satisface condiţia proximală Opial.*

Teorema 8. *Fie* X *şi* Y *două submulţimi nevide, mărginite, închise şi convexe ale spaţiului* CAT(0) (M,d). *Presupunem că* $T\colon X \cup Y \to X \cup Y$ *este un operator* E_r *şi că şirul* $\{x_n\}$ *este* Δ*-convergent către* $x \in X$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$. *Atunci,* $(x, P(x)) \in \operatorname{Prox}_{X\times Y}(T)$.

În cele din urmă, în Lema 11 şi în Lema 12 sunt descrise proprietăţile importante ale iteratelor generate de schema de iterare de tip Thakur, astfel încât obţinem în final rezultatele principale care demonstrează Δ-convergenţa, respectiv convergenţa: Teorema 9 şi Teorema 10.

Lema 11. *Fie X şi Y două submulţimi nevide ale unui spaţiu* CAT(0) (M, d) *şi fie* $T\colon X\cup Y \to X\cup Y$ *un operator* E_r *neciclic. Pentru un* $x_1 \in X_0$ *arbitrat ales, considerăm şirul* $\{x_n\}$*, generat de Algoritmul* 2*. Atunci, pentru toţi* $p \in F(T)\cap Y_0$*, limita* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ *există. În plus, şirul* $\{x_n\}$ *este mărginit.*

Lema 12. *Fie* (M, d) *un spaţiu* CAT(0) *şi* X, Y *două submulţimi nevide ale lui* M *şi fie* $T\colon X \cup Y \to X \cup Y$ *un operator* E_r *neciclic. Fie* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *şi* $\{z_n\}$ *şiruri generate de Algoritmul* 2*. Atunci,* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

Teorema 9. *Fie* (M, d) *un spaţiu* CAT(0) *şi fie* X, Y *două submulţimi nevide, mărginite, închise şi convexe ale lui* M*. Presupunem că* $T\colon X \cup Y \to X \cup Y$ *este un operator* E_r *neciclic şi că* $\{x_n\}$ *este un şir generat de Algoritmul* 2*. Atunci, şirul* $\{(x_n, P(x_n))\}$ *este* Δ*-convergent către o pereche de optimă proximitate a operatorului* T.

Teorema 10. *Fie* (M, d) *un spaţiu* CAT(0)*, fie* (X, Y) *o pereche de submulţimi nevide, închise şi convexe ale lui* M *astfel încât cel puţin una dintre submulţimi este compactă şi fie* $T\colon X\cup Y \to X\cup Y$ *un operator* E_r*. Fie* $\{x_n\}$ *un şir generat de Algoritmul* 2*. Atunci, şirul* $\{(x_n, P(x_n))\}$ *este convergent către o pereche proximală punct fix a operatorului* T.

Nu în ultimul rând, mai multe exemple sunt menite să sublinieze valoarea practică a analizei formale făcută anterior. Exemplul 5 ilustrează o funcţie care nu îndeplineşte condiţia (E), dar care îndeplineşte condiţia E_r. Exemplul 6 subliniază un operator care satisface condiţia E_r, dar care nu este neciclic relativ neexpansiv.

Exemplul 5. Considerăm submulţimile în planul Euclidian

$$X = \{a = (0,1), b = (2,1), c = (4,1)\}, \quad Y = \{a' = (1,0), b' = (3,0), c' = (5,1)\}$$

şi operatorul neciclic $T\colon X \cup Y \to X \cup Y$, definit de regula

$$T(a) = b,\ T(b) = a,\ T(c) = c,\ T(a') = a',\ T(b') = c',\ T(c') = b'.$$

Acest operator nu este cvasi-neexpansiv şi, prin urmare, nu satisface condiţia (E). Pe de altă parte, satisface condiţia de neciclicitate E_r.

Exemplul 6. Fie $X = [0,1] \times \{1\}$ şi $Y = [0,1] \times \{0\}$ două submulţimi ale lui $\mathbb{R}^2$ înzestrate cu metrica Euclidiană şi fie $T\colon X \cup Y \to X \cup Y$ un operator dat astfel încât

$$T(x,1) = \left(\frac{x+1}{2}, 1\right) \ \text{and}\ T(y,0) = \left(\frac{y+2}{3}, 0\right).$$

Atunci, T satisface condiţia de neciclicitate E_r.

Capitolul 4, **Operatori cu condiţia (E) în spaţii W-hiperbolice** ([7], [10]), extinde cadrul de bază la structuri hiperbolice mai generale. În [25], Kohlenbach a folosit o structură convexă suplimentară pentru a defini o clasă specială de spaţii metrice. Acest element cheie permite extinderea studiului procedurilor iterative dincolo de spaţiile liniare. Un nou exemplu, referitor la intervale reale închise şi mărginite, este furnizat în Exemplul 7, demonstrând că această structură depăşeşte modelele geometrice deja cunoscute.

Exemplul 7. Fie $X = \{[a, b] : |a| < b\}$, înzestrat cu metrica d, definită prin regula

$$d([a, b], [c, d]) = |(a + b) - (c + d)| + |(b^2 - a^2) - (d^2 - c^2)|,$$

pentru toţi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considerăm operatorul $W\colon X^2 \times [0, 1] \to X$, prin formula

$$W([a, b], [c, d], \alpha) = \frac{1}{2}\left[(1-\alpha)(a+b) + \alpha(c+d) - \frac{(1-\alpha)(b^2-a^2) + \alpha(d^2-c^2)}{(1-\alpha)(a+b) + \alpha(c+d)},\right.$$

$$\left.(1-\alpha)(a+b) + \alpha(c+d) + \frac{(1-\alpha)(b^2-a^2) + \alpha(d^2-c^2)}{(1-\alpha)(a+b) + \alpha(c+d)}\right].$$

Tripletul (X, d, W) este un spaţiu hiperbolic.

Acest capitol tratează o clasă remarcabilă de operatori, cea a operatorilor cu condiţia (E), definită de Garcia-Falset *et al.* [18] şi adaptată corespunzător în Definiţia 6 pentru contextul hiperbolic.

Definiţia 6. Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic. Un operator $T\colon S \to X$ satisface condiţia (E_μ) dacă

$$d(x, Ty) \leq \mu d(x, Tx) + d(x, y),$$

pentru toţi $x, y \in S$, unde S este o submulţime nevidă a spaţiului X şi $\mu \geq 1$.

Iteraţiile clasice pot fi adaptate la contextul hiperbolic, utilizând în mod corespunzător structura convexă. Astfel, explorăm în acest capitol procedura de iteraţie în trei paşi S_n, introdusă de Sintunavarat şi Pitea [35] în 2016 şi extinsă la contextul spaţiilor hiperbolice după cum urmează:

Algoritmul 3. Fie $x_1 \in S$ şi fie şirul $\{x_n\}$ generat prin intermediul următoarei scheme iterative:

$$\begin{cases} y_n = W(x_n, Tx_n, \beta_n) \\ z_n = W(x_n, y_n, \gamma_n) \\ x_{n+1} = W(Tz_n, Ty_n, \alpha_n), \end{cases}$$

pentru toţi $n \geq 1$, unde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ sunt şiruri reale în $(0, 1)$.

Lema 13 şi Lema 14 oferă câteva rezultate pregătitoare originale, descriind diverse caracteristici ale şirului iterativ.

Lema 13. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic, S o submulţime nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ un operator care satisface $F(T) \neq \emptyset$ şi $d(Tx, p) \leq d(x, p)$ pentru orice $x \in X$, şi $p \in F(T)$. Dacă $p \in F(T)$ şi şirul $\{x_n\}$ este generat Algoritmul 3, atunci $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ există.*

Lema 14. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic uniform convex având modulul de convexitate uniformă monoton, S o submulţime nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ un operator cu condiţia (E) şi cu proprietatea că $F(T) \neq \emptyset$. Dacă şirul $\{x_n\}$ este generat de Algoritmul 3 cu $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ situate într-un interval $[a, 1)$, $0 < a < 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.*

Bazându-se pe proprietăţile de mai sus, principalele rezultate ale acestui capitol oferă un rezultat de Δ-convergenţă în Teorema 11 şi câteva rezultate de convergenţă în Teorema 12, Teorema 13 şi Teorema 14.

Teorema 11. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic complet uniform convex având modulul de convexitate uniformă monoton, S o submulţime închisă, nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ un operator cu condiţia (E) şi cu proprietatea că $F(T) \neq \emptyset$. Atunci, şirul $\{x_n\}$ generat de Algoritmul 3, cu $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ situate într-un interval $[a, 1)$, $0 < a < 1$, Δ-converge către un punct $p \in F(T)$.*

Teorema 12. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic complet uniform convex având modulul de convexitate uniformă monoton, S o submulţime compactă, nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ un operator cu condiţia (E) şi cu proprietatea că $F(T) \neq \emptyset$. Atunci, şirul $\{x_n\}$ generat de Algoritmul 3, cu $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ situate într-un interval $[a, 1)$, $0 < a < 1$, converge către un punct $p \in F(T)$.*

Teorema 13. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic complet uniform convex având modulul de convexitate uniformă monoton, S o submulţime închisă, nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ un operator cu condiţia (E) şi cu proprietatea că $F(T) \neq \emptyset$. Atunci, şirul $\{x_n\}$ generat de Algoritmul 3 converge către un punct $p \in F(T)$ dacă şi numai dacă $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$.*

Teorema 14. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic complet uniform convex având modulul de convexitate uniformă monoton, S o submulţime închisă, nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ un operator cu condiţia (E) şi cu proprietatea că $F(T) \neq \emptyset$. Dacă, în plus,* *operatorul T satisface condiţia* (A)*, atunci şirul $\{x_n\}$ generat de Algoritmul* 3 *converge către un punct al lui $F(T)$.*

În Capitolul 5, **Studiul calitativ al iteraţiei S_n în spaţii W-hiperbolice** ([7], manuscris în forma [2]), accentul este pus pe studiul calitativ al procedurii iterative S_n în contextul W-hiperbolic, în legătură cu operatorii contractivi hiperbolici. Ideea din spatele conceptelor de stabilitate şi de independenţă de date provine din modelarea computerizată a algoritmilor iterativi. Ea răspunde la întrebarea: cum sunt afectate convergenţa sau punctul fix teoretic când se lucrează cu un operator perturbat sau când apar erori numerice?

Stabilitatea unei proceduri de iteraţie înseamnă că erorile numerice care pot apărea la fiecare pas al iteraţiei nu afectează convergenţa. Această proprietate a fost introdusă de Harder şi Hicks [20]. Ulterior, Berinde [4], Olatinwo şi Postolache [32] au analizat-o în relaţie cu diverse proceduri iterative, în special în spaţii uniform convexe. Rezultatul original referitor la această problemă, în legătură cu procedura de iteraţie S_n, este inclus în Teorema 16, care este strâns legată de Teorema 15.

Teorema 15. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic complet, S o submulţime închisă, nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ un operator de contracţie. Fie $\{x_n\}$ un şir iterativ generat de Algoritmul* 3*, cu $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ în $(0, 1)$, satisfăcând condiţia $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n\gamma_n = \infty$. Atunci, $\{x_n\}$ converge către unicul punct fix al lui T.*

Teorema 16. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic complet, S o submulţime închisă, nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ un operator de contracţie. Atunci, procedura iterativă S_n descrisă în Algoritmul* 3*, pentru $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ în $(0, 1)$ cu $\alpha_n\beta_n\gamma_n \geq a > 0$, pentru orice $n \geq 1$, este T-stabilă.*

Pe de altă parte, rezultate fundamentale legate de independenţa de date au fost introduse în timp de Rus şi Mureşan [34], sau Olatinwo [31]. Este important de menţionat faptul că erorile ajung la un minim atunci când iteraţia depinde doar de estimarea iniţială şi nu de operatorul în sine (care poate fi supus perturbaţiilor). Rezultatul original al acestui capitol referitor la independenţa de date este Teorema 17.

Teorema 17. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic complet, S o submulţime închisă, nevidă, convexă a lui X şi $T\colon S \to S$ o contracţie cu punctul fix p. Fie $\tilde{T}$ un operator perturbat al operatorului de contracţie T cu eroarea maximă adminsă ε. Pentru o estimare iniţială dată $x_1 = \tilde{x}_1$, considerăm şirurile iterative $\{x_n\}$ şi $\{\tilde{x}_n\}$ rezultate prin aplicarea schemei iterative S_n în relaţie cu operatorii T, respectiv $\tilde{T}$. Presupunem, de* *asemenea, că şirurile de numere reale* $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *şi* $\{\gamma_n\}$ *din* $(0,1)$ *satisfac condiţia* $s_n = \alpha_n\beta_n + \beta_n\gamma_n - \alpha_n\beta_n\gamma_n \geq \dfrac{1}{\lambda - \theta}$, *pentru un anumit* $\lambda > \theta$. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{p}$, *atunci* $d(p,\tilde{p}) \leq \dfrac{\lambda\varepsilon}{1-\theta}$.

În plus, este oferit un exemplu de contracţie în Exemplul 8, împreună cu o abordare intuitivă a conceptului de operator perturbat.

Exemplul 8. Fie (X,d,W) un spaţiu W-hiperbolic complet. Dacă $p_0 \in X$ şi $\theta \in [0,1)$, atunci

$$T\colon X \to X,\ Tx = W(p_0, x, \theta)$$

este un operator contractiv cu constanta de contracţie θ şi cu unicul punct fix p_0. Mai mult, dacă $\varepsilon > 0$ şi $\tilde{p}_0 \in \bar{B}\left(p_0, \dfrac{\varepsilon}{1-\theta}\right)$, atunci $\tilde{T}\colon X \to X$, $\tilde{T}x = W(\tilde{p}_0, x, \theta)$ este o altă θ-contracţie, cu punctul fix $\tilde{p}_0$, care furnizează un operator perturbat al lui T, cu eroarea maximă admisă ε. Să mai menţionăm şi faptul că, având $d(p_0,\tilde{p}_0) \leq \dfrac{\varepsilon}{1-\theta}$, atunci $d(p_0,\tilde{p}_0) \to 0$ pentru $\varepsilon \to 0$. Acest lucru înseamnă că orice schemă iterativă, pentru care $x \to f(T,x)$ şi $x \to f(\tilde{T},x)$ sunt proceduri convergente către două puncte fixe, este independetă de date.

Capitolul este completat cu o procedură de calcul pentru operatorul de convexitate în modelul discului Poincaré, ceea ce ne permite să efectuăm simulări numerice şi analize comparative prin polinomografie. Am testat procedura computaţională rezultată pe operatorul de contracţie $Tx = W\left(p_0 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right), x, \theta = \dfrac{1}{2}\right)$ şi pentru estimarea iniţială $x_1 = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$, obţinând punctul fix aşteptat prin procedura de iteraţie S_n.

În final, capitolul se încheie cu o analiză comparativă între procedura S_n şi iteraţia Picard, folosind o metodă vizuală, polinomografia. Deşi iniţial introdusă şi folosită pentru determinarea rădăcinilor polinoamelor complexe (vezi [23]), polinomografia poate fi aplicată cu succes pentru a studia eficienţa algoritmilor iterativi. În acest caz, aplicând procedura atât pentru iteraţia hiperbolică S_n, cât şi pentru iteraţia Picard, în legătură cu operatorul de contracţie menţionat mai sus, ajungem la o concluzie clară: algoritmul S_n este mai eficient decât algoritmul Picard.

Bibliografie

1. W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, Manifolds of non-positive curvature, Birkhauser: Boston, MA, USA (1985), Volume 61.

2. A. Bejenaru, **C. Călineaţă**, C. Ciobănescu, M. Postolache, Qualitative study of a three-step iteration procedure in W-hyperbolic spaces, submitted.

3. V. Berinde, Approximating fixed points of enriched nonexpansive mappings by Krasnoselskij iteration in Hilbert spaces, Carpathian J. Math. 35(2019), 293-304.

4. V. Berinde, Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, 2002.

5. V. Berinde, M. Păcurar, Approximating fixed points of enriched contractions in Banach spaces, J. Fixed Point Theory Appl. 22(2020), No. 2, Paper No. 38.

6. R. Caccioppoli, Un teorema generale sull' esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale, Rend. Accad. Naz. Lincei 11(1930), 794-799.

7. **C. Călineaţă**, Fixed point results for some classes of mappings in geodesic spaces, National University of Science and Technology Politehnica Bucharest, 2024 (PhD Thesis).

8. **C. Călineaţă**, T. Ţurcanu, A new approach to averaged mappings in CAT(0) spaces, J. Nonlinear Convex Anal. (accept letter).

9. **C. Călineaţă**, C. Ciobănescu, T. Ţurcanu, Common fixed point of two L_2 operators with convergence analysis and application, Mathematics 11(2023), Art. No. 577.

10. **C. Călineaţă**, C. Ciobănescu, Convergence theorems for operators with condition (E) in hyperbolic spaces, U. Politeh. Buch. Ser. A 84(2022), No. 4, 9-18.

11. **C. Călineaţă**, T. Ţurcanu, On fixed proximal pairs of E_r-mappings, AIMS Mathematics 8(2023), No. 11, 26632-26649.

12. S.K. Chatterjea, Fixed-point theorems, C.R. Acad. Bulgare Sci. 25(1972), 727-730.

13. L.B. Ćirić, A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45(1974), 267-273.

14. S. Dhompongsa, B. Panyanak, On Δ-convergence theorems in CAT(0) spaces, Comput. Math. Appl. 56(2008), 2572-2579.

15. A.A. Eldred, W.A. Kirk, P. Veeramani, Proximal normal structure and relatively nonexpansive mappings, Studia Math. 171(2005), No. 3, 283-293.

16. M. Gabeleh, O.O. Otafudu, Generalized pointwise noncyclic relatively nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 17(2016), 1117-1128.

17. M. Gabeleh, S.I. Ezhil Manna, A. Anthony Eldred, O.O. Otafudu, Strong and weak convergence of Ishikawa iterations for best proximity pairs, Open Math. 18(2020), 10-21.

18. J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster, T. Suzuki, Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 375(2011), 185-195.

19. M. Gromov, Metric Structure for Riemannian and Non-Riemannian Spaces, Birkhauser: Boston, MA, USA (2007).

20. A.M. Harder, T.L. Hicks, A stable iteration procedure for nonexpansive mappings, Math. Japan 5(1988), 687-692.

21. G.E. Hardy, T.D. Rogers, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canadian Math. Bull. 16(1973), 201-206.

22. S. Ishikawa, Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc. 44(1974), 147-150.

23. B. Kalantari, Polynomial Root-Finding and Polynomiography, World Scientific, Singapore, 2009.

24. R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc. 60(1968), 71-76.

25. U. Kohlenbach, Some logical metatheorems with applications is functional analysis, Trans. Am. Math. Soc. 357(2005), 89-128.

26. M.A. Krasnosel'skii, Two remarks on the method of succesive approximations, Uspekhi Math. Nauk 10(1955), 123-127.

27. A. Latif, M. Postolache, M.O. Alansari, Numerical reckoning common fixed point in CAT(0) spaces for a general class of operators, U. Politeh. Buch. Ser. A 84(2022), No. 2, 3-12.

28. L. Leuştean, Nonexpansive iterations in uniformly convex W-hyperbolic spaces, In: A. Leizarowitz, B.S. Mordukhovich, I. Shafrir, A. Zaslavski (Eds.), Nonlinear Analysis and Optimization I: Nonlinear Analysis, Contemp. Math., American Mathematical Society 513(2010), 193-209.

29. W.R. Mann, Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc. 4(1953), 506-510.

30. M.A. Noor, New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl. 251(2000), 217-229.

31. M.O. Olatinwo, Some results on the continuous dependence of the fixed points in normed linear space, Fixed Point Theory Appl. 10(2009), No. 1, 151-157.

32. M.O. Olatinwo, M. Postolache, Stability results for Jungck-type iterative processes in conex metric spaces, Appl. Math. Comput. 218(2012), 6727-6732.

33. S. Reich, Some remarks concerning contraction mappings, Can. Math. Bull. 14(1971), 121-124.

34. I.A. Rus, S. Mureşan, Data dependency of fixed points set of weakly Picard operators, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 43(1998), 79-83.

35. W. Sintunavarat, A. Pitea, On a new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Berinde mappings with convergence analysis, J. Nonlinear Sci. Appl. 9(2016), 2553-2562.

36. T. Suzuki, A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, Proc. Amer. Math. Soc. 136(2008), No. 5, 1861-1869.

37. B.S. Thakur, D. Thakur, M. Postolache, A new iteration scheme for numerical reckoning fix points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings, Appl. Math. Comput. 274(2016), 147-153.