

Universitatea Națională de Știință și Tehnologie Politehnica București
Departamentul de Matematică-Informatică

Operatori minimali și maximali asociați unor
clase de operatori pseudo-diferențiali și
rezultate privind o clasă de ecuații neliniare

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:
Conf. univ. dr. Viorel Catană

Doctorand:
Horia-George Georgescu

București, 2025

Cuprins

Notății și denumiri	6
Introducere	8
1 Operatori pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici pe $L^p(\mathbb{R}^n)$	17
1.1 Preliminarii	18
1.2 Spațiile L^p -Sobolev	21
1.3 Operatori minimali și maximali	27
1.4 Perturbații ale operatorilor SG pseudo- diferențiali	35
2 Operatori minimali și maximali într-un cadru abstract	44
2.1 Noțiuni introductive	45
2.2 Rezultate privind operatorii minimali și maximali	55
2.3 Rezultate de perturbare	60
2.4 Fredholmnicitatea operatorului minimal A_0	63
3 Asupra unei clase de ecuații neliniare generalizate definite de simboluri eliptice	67
3.1 Preliminarii	68
3.2 Ecuația liniară	77
3.3 Ecuația neliniară	86
Alte contribuții ale autorului	91
Bibliografie	93

Cuvinte cheie: operatori pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici; inegalitatea SG-Agmon–Douglas–Nirenberg; inegalitatea lui Erhling; spectrul esențial; semigrupuri tare continue; operatori disipativi; operatori minimali și maximali; operatori Fredholm; ecuații de ordin infinit; elipticitate; multiplicatori Fourier.

Rezumatul tezei de doctorat

În cele ce urmează, prezentăm structura acestei teze și rezultatele originale obținute în cadrul acesteia.

În Capitolul 1, **Operatori pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici pe $L^p(\mathbb{R}^n)$** , studiem o subclasă a unei clase de operatori pseudo-diferențiali generalizați SG-hipoeliptici pe $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, introdusă de Camperi în [5]. Menționăm faptul că acest studiu a fost realizat în conexiune cu lucrarea lui Viorel Catană [7].

Rezultatele din acest capitol se regăsesc în lucrarea originală [8], intitulată ***Essential spectra and semigroups of perturbations of generalized SG-hypoelliptic pseudo-differential operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$*** , publicată în J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 13, 25 (2022), la care autorul acestei teze este coautor alături de Viorel Catană.

În **Secțiunea 1.1**, vom aminti câteva definiții și rezultate importante referitoare la clasa de simboluri $SG_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$, unde $m = (m_1, m_2)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ sunt din $\mathbb{R}^2$, $0 \leq \delta_j < \rho_j \leq 1$, $j = 1, 2$, și definim operatorii SG-pseudo-diferențiali cu simbolurile în această clasă după cum urmează (vezi [5]).

Definiția 1. (vezi [5]) Clasa $SG_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$, $m = (m_1, m_2)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ în $\mathbb{R}^2$, $0 \leq \delta_j < \rho_j \leq 1$, $j = 1, 2$, se definește ca fiind mulțimea tuturor funcțiilor $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ care satisfac inegalitatea

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - \rho_1|\alpha| + \delta_1|\beta|} \langle x \rangle^{m_2 - \rho_2|\beta| + \delta_2|\alpha|},$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, unde $C_{\alpha,\beta}$ este o constantă pozitivă care depinde doar de α, β și $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$.

Numim elementele din clasa $SG_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ simboluri globale de ordinul m și de tipul ρ, δ .

Anumite clase de simboluri globale în cazul în care $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ au fost studiate de Wong și Dasgupta în [12] și de Nicola și Rodino în [20]. În teza noastră vom

considera clasa de simboluri cu $\rho_1 = 1, \delta_2 = 0, 0 < \rho_2 \leq 1$ și $0 \leq \delta_1 < 1$, deci vom lucra într-un cadru mai general.

Dacă $m_j \leq m'_j, \rho'_j \leq \rho_j, \delta_j \leq \delta'_j, j = 1, 2$, atunci $SG_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n) \subseteq SG_{\rho', \delta'}^{m'}(\mathbb{R}^n)$.

Definim

$$SG^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}^2} SG_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}),$$

$$SG^{\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}^2} SG_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n),$$

unde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ este spațiul Schwartz.

Fie $\sigma \in SG_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n)$. Definim operatorul pseudo-diferențial $T_\sigma = \sigma(x, D)$, folosind formula standard

$$(T_\sigma u)(x) = \sigma(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad (1)$$

pentru toate funcțiile u din $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, unde

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Notăm cu $OPSG_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n)$ spațiul tuturor operatorilor de forma (1) cu simbolurile din $SG_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n)$.

Definiția 2. (vezi [5]) Fie $\sigma \in SG_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n)$ un simbol. Spunem că σ se numește simbol hipoeliptic dacă există două constante pozitive $R, C_0, C_{0, \alpha, \beta}$ și $m = (m'_1, m'_2) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$|\sigma(x, \xi)| \geq C_0 \langle \xi \rangle^{m'_1} \langle x \rangle^{m'_2} \quad (2)$$

și

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{0, \alpha, \beta} |\sigma(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{-\rho_1 |\alpha| + \delta_1 |\beta|} \langle x \rangle^{-\rho_2 |\beta| + \delta_2 |\alpha|}, \quad (3)$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ și $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ cu $|x| + |\xi| > R$.

Vom nota cu $HSG_{\rho, \delta}^{m, m'}$ clasa simbolurilor hipoeliptice de ordin (m, m') .

Definiția 3. (vezi [5]) Fie $\sigma \in SG_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n)$ un simbol. Simbolul σ se numește eliptic dacă satisface relația (2) pentru $m' = m$.

Remarca 1. Se poate observa cu ușurință faptul că orice simbol eliptic este hipoeliptic, deoarece relația (2) pentru $m' = m$ implică (3).

În **Secțiunea 1.2**, definim spațiile L^p –Sobolev $H^{s_1, s_2, p}$ de ordinul s_1, s_2 împreună cu anumite proprietăți ale acestor spații, enunțând și demonstrând mai apoi două rezultate de mărginire și compacitate referitoare la operatorii SG-pseudo-diferențiali

(vezi Teoremele 1, 2). La finalul Secțiunii 1.2 enunțăm și demonstrăm două rezultate ce implică stabilirea unor estimări de tip Sobolev (vezi Teorema 3 și Corolarul 1).

În cele ce urmează, prezentăm definițiile și rezultatele din cadrul acestei secțiuni.

Fie $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Definim operatorii pseudo-diferențiali $T_{\sigma_{s_1, s_2}}$, unde

$$\sigma_{s_1, s_2}(x, \xi) = \langle x \rangle^{s_2} \langle \xi \rangle^{s_1} \in SG_{(1,1),(0,0)}^{s_1, s_2}(\mathbb{R}^n)$$

este un simbol SG -eliptic și $T_{\sigma_{s_1, s_2}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ este un izomorfism care se poate extinde la un izomorfism pe $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ cu inversul $T_{\sigma_{-s_1, -s_2}}$, unde

$$\sigma_{-s_1, -s_2}(x, \xi) = \langle x \rangle^{-s_2} \langle \xi \rangle^{-s_1} \in SG_{(1,1),(0,0)}^{s_1, s_2}(\mathbb{R}^n).$$

Ca atare, dacă notăm simbolic $\sigma_{s_1, s_2}(x, D) = \langle x \rangle^{s_2} \langle D \rangle^{s_1}$, atunci $\sigma_{-s_1, -s_2}(x, D) = \langle D \rangle^{-s_1} \langle x \rangle^{-s_2}$.

Definiția 4. Pentru $1 < p < \infty, -\infty < s_1, s_2 < +\infty$, definim spațiul L^p -Sobolev $H^{s_1, s_2, p}$ de ordinul s_1, s_2 astfel:

$$H^{s_1, s_2, p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \langle x \rangle^{s_2} \langle D \rangle^{s_1} u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Atunci, $H^{s_1, s_2, p}(\mathbb{R}^n)$ este un spațiu Banach în care norma este definită de relația

$$\|u\|_{s_1, s_2, p} = \|\langle x \rangle^{s_2} \langle D \rangle^{s_1} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, u \in H^{s_1, s_2, p}(\mathbb{R}^n),$$

unde $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ este norma în $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Observăm că $H^{0,0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

În plus,

$$\bigcap_{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2} H^{s_1, s_2, p}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \bigcup_{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2} H^{s_1, s_2, p}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1. Fie $\sigma \in SG_{(1, \rho_2), (\delta_1, 0)}^{(0,0)}(\mathbb{R}^n), 0 < \rho_2 \leq 1, 0 \leq \delta_1 < 1$ un simbol de tip global și $1 < p < \infty$.

Atunci, $T_\sigma : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ este un operator liniar mărginit.

Teorema 2. Fie $\sigma \in SG_{\rho, \delta}^m, m = (m_1, m_2), \rho = (\rho_1, \rho_2), \delta = (\delta_1, \delta_2)$ în $\mathbb{R}^2$ astfel încât $\rho_1 = 1, \delta_2 = 0, 0 < \rho_2 \leq 1, 0 \leq \delta_1 < 1$.

Atunci, pentru $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ și $1 < p < \infty, T_\sigma : H^{s_1, s_2, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s_1 - m_1, s_2 - m_2, p}(\mathbb{R}^n)$ este un operator liniar mărginit.

În plus, operatorul $T_\sigma : H^{s_1, s_2, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{t_1, t_2, p}(\mathbb{R}^n)$ este compact pentru orice $s_1 - t_1 > m_1, s_2 - t_2 > m_2$.

Teorema 3. Fie $T_\sigma \in OPSG_{\rho,\delta}^{m,m'}(\mathbb{R}^n)$, $m' \leq m$ (i.e. $m'_j \leq m_j, j = 1, 2$, dacă $m = (m_1, m_2)$ și $m' = (m'_1, m'_2)$), un operator pseudo-diferențial SG-hipoeliptic. Presupunem că $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T_\sigma u \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $s = (s_1, s_2)$ în $\mathbb{R}^2$, $1 < p < \infty$.

Atunci, $u \in H^{s+m',p}(\mathbb{R}^n)$ și, pentru orice $t < s + m$, obținem că

$$\|u\|_{s+m',p} \leq C \left(\|T_\sigma u\|_{s,p} + \|u\|_{t,p} \right), \quad (4)$$

pentru o constantă pozitivă C care depinde de s .

Corolarul 1. Fie $T_\sigma \in OPSG_{\rho,\delta}^{m,m'}(\mathbb{R}^n)$ un operator pseudo-diferențial SG-hipoeliptic, unde $m' = (m'_1, m'_2)$ este o pereche de numere întregi pozitive.

Atunci,

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq m'_1 \\ |\beta| \leq m'_2}} \|x^\beta D^\alpha u\|_{0,p} \leq C \left(\|T_\sigma u\|_{0,p} + \|u\|_{0,p} \right),$$

unde C este o constantă pozitivă.

La începutul **Secțiunii 1.3**, asociem operatorilor SG-pseudo-diferențiali de ordine pozitive pe $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, operatorii minimali și maximali corespunzători. De asemenea, enunțăm și demonstrăm un analog al estimării Agmon-Douglis-Nirenberg din [1] pentru operatorii pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici (vezi Teorema 4). Folosind această estimare, demonstrăm un rezultat referitor la incluziunile dintre domeniile extensiilor minimale și maximale ale operatorilor pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici și alte spații $L^p(\mathbb{R}^n)$ -Sobolev de ordine s_1, s_2 , $1 < p < \infty$, $-\infty < s_1, s_2 < \infty$ (Teorema 5). Utilizând o versiune particulară a inegalității lui Erhling (vezi [23]), demonstrăm câteva rezultate de perturbare privind inegalitatea Agmon-Douglis-Nirenberg pentru operatorii pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici (vezi Teoremele 6, 7, 8). În plus, enunțăm o conjectură referitoare la o versiune a inegalității lui Erhling (vezi Conjectura 1).

Prezentăm în continuare definițiile și rezultatele din cadrul acestei secțiuni.

Fie $\sigma \in SG_{\rho,\delta}^m$, $m > 0$. Putem să privim aplicația liniară și continuă $T_\sigma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ca un operator liniar $T_\sigma : \mathcal{D}(T_\sigma) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ cu domeniul dens $\mathcal{D}(T_\sigma) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, unde $1 < p < \infty$. Se poate arăta că aceasta este o extensie închisă în $L^p(\mathbb{R}^n)$. Notăm cu $T_{\sigma,0}$ cea mai mică extensie de acest fel și o vom denumi operatorul minimal al lui T_σ .

Domeniul $\mathcal{D}(T_{\sigma,0})$ al lui $T_{\sigma,0}$ este format din toate funcțiile u din $L^p(\mathbb{R}^n)$ pentru care există un șir $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ din $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ astfel încât $\varphi_k \rightarrow u$ în $L^p(\mathbb{R}^n)$ și $T_\sigma \varphi_k \rightarrow f$ pentru f din $L^p(\mathbb{R}^n)$ când $k \rightarrow \infty$. În plus, dacă $u \in \mathcal{D}(T_{\sigma,0})$, se poate arăta că limita f nu depinde de alegerea șirului $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ din $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ și putem astfel să definim $T_{\sigma,0}u = f$.

Considerăm următorul operator:

$$T_{\sigma,1} : \mathcal{D}(T_{\sigma,1}) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad T_{\sigma,1}u = f, \quad u \in \mathcal{D}(T_{\sigma,1}),$$

și f din $L^p(\mathbb{R}^n)$ dacă și numai dacă

$$(u, T_{\sigma}^* \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

unde

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \bar{v}(x) dx,$$

pentru toate funcțiile măsurabile u și v pe $\mathbb{R}^n$, presupunând că integrala există și că T_{σ}^* este adjunctul formal al lui T_{σ} . Se poate demonstra că $T_{\sigma,1}$ este un operator liniar închis din $L^p(\mathbb{R}^n)$ în $L^p(\mathbb{R}^n)$ cu domeniul $\mathcal{D}(T_{\sigma,1})$ și $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(T_{\sigma,1})$.

În plus, $T_{\sigma,1}u = T_{\sigma}u$, pentru orice u din $\mathcal{D}(T_{\sigma,1}) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : T_{\sigma}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Numim $T_{\sigma,1}$ operatorul maximal al lui T_{σ} . Operatorul $T_{\sigma,1}$ este cea mai mare extensie închisă a lui T_{σ} , în sensul în care dacă B este o altă extensie închisă a lui T_{σ} astfel încât $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(B^t)$, atunci $T_{\sigma,1}$ este o extensie a lui B , unde B^t este adjunctul adevărat al lui B .

Teorema 4. Fie $\sigma \in HSG_{\rho,\delta}^{m,m'}(\mathbb{R}^n)$, $0 < m' \leq m$, un simbol SG -hipoeliptic.

Atunci, există constantele pozitive C_1 și C_2 astfel încât

$$C_1 \|u\|_{m',p} \leq \|T_{\sigma}u\|_{0,p} + \|u\|_{0,p} \leq C_2 \|u\|_{m,p}, \quad u \in H^{m,p}(\mathbb{R}^n). \quad (5)$$

Remarca 2. Estimarea (5) este rezultatul analog inegalității Agmon- Dougliș- Nirenberg din [1], în cazul nostru având loc pentru operatorii pseudo-diferențiali SG -hipoeliptici. Așadar, o vom denumi inegalitatea SG -Agmon-Dougliș-Nirenberg.

Teorema 5. Fie $\sigma \in HSG_{\rho,\delta}^{m,m'}(\mathbb{R}^n)$, $0 < m' \leq m$, un simbol SG -hipoeliptic.

Atunci,

$$H^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}(T_{\sigma,0}) \subseteq \mathcal{D}(T_{\sigma,1}) \subseteq H^{m',p}(\mathbb{R}^n). \quad (6)$$

Conjectura 1. Fie $1 \leq p < \infty$ și $0 < s_j < t_j, j = 1, 2$. Atunci, pentru orice număr pozitiv ε există o constantă pozitivă C_{ε} astfel încât

$$\|u\|_{s_1,s_2,p} \leq \varepsilon \|u\|_{t_1,t_2} + C_{\varepsilon} \|u\|_{0,0,p}, \quad u \in H^{t_1,t_2,p}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 6. Fie $\sigma \in HSG_{\rho,\delta}^{m,m'}$, $0 < m' \leq m$, $m = (m_1, m_2)$, $m' = (m'_1, m'_2)$, un simbol hipoeliptic și V o funcție măsurabilă pe $\mathbb{R}^n$ astfel încât există o constantă pozitivă C pentru care

$$\|V\varphi\|_{0,p} \leq C \|\varphi\|_{s,p}, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad (7)$$

unde $0 < s_1 < m'_1, s_2 \leq 0, 1 < p < \infty$.

Atunci, există constantele pozitive $\tilde{C}_1$ și $\tilde{C}_2$ astfel încât

$$\tilde{C}_1 \|\varphi\|_{m',p} \leq \|(T_\sigma + V)\varphi\|_{0,p} + \|\varphi\|_{0,p} \leq \tilde{C}_2 \|\varphi\|_{m,p}, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (8)$$

Teorema 7. Fie $\sigma \in HSG_{\rho,\delta}^{m,m'}, 0 < m' \leq m, m = (m_1, m_2), m' = (m'_1, m'_2)$ din $\mathbb{R}^2$, un simbol hipoeliptic și V o funcție măsurabilă pe $\mathbb{R}^n$ astfel încât operatorul de multiplicare

$$V : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(V) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{D}(V) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n); Vu \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

satisface relația

$$\|V\varphi\|_{0,p} \leq C\|\varphi\|_{s_1,s_2,p}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

unde $0 < s_1 < m'_1, s_2 \leq 0, 1 < p < \infty$. Atunci, există constantele pozitive C_1, C_2 astfel încât

$$C_1 \|u\|_{m',p} \leq \|(T_\sigma + V)u\|_{0,p} + \|u\|_{0,p} \leq C_2 \|u\|_{m,p}, \quad u \in H^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 8. Fie $\sigma \in HSG_{\rho,\delta}^{m,m'}(\mathbb{R}^n), 0 < m' \leq m$, un simbol SG-hipoeliptic și V un operator SG-pseudo-diferențial T_τ cu simbolul $\tau \in SG_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n), s < m'$ (i.e. $s_j \leq m'_j, j = 1, 2$, dacă $s = (s_1, s_2)$ și $m' = (m'_1, m'_2)$).

Atunci, există constantele pozitive C_1, C_2 astfel încât

$$C_1 \|u\|_{m',p} \leq \|(T_\sigma + V)u\|_{0,p} + \|u\|_{0,p} \leq C_2 \|u\|_{m,p}, \quad u \in H^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

În **Secțiunea 1.4**, enunțăm și demonstrăm câteva rezultate referitoare la spectrul esențial al perturbărilor operatorilor pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici cu potențiali singulari pe $L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$, introduși și studiați în [21] (vezi Teoremele 9, 10). Un rezultat de perturbare a operatorilor pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici cu potențiali singulari pe $L^p(\mathbb{R}^n)$ în cazul în care simbolul acestora nu depinde de x în $\mathbb{R}^n$ este, de asemenea, enunțat și demonstrat (vezi Teorema 11). În finalul acestei secțiuni, demonstrăm un rezultat privind semigrupurile tare continue de contracții generate de operatori pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici pe $L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ (vezi Teorema 12).

Prezentăm în cele ce urmează teoremele obținute în cadrul Secțiunii 1.4.

Teorema 9. Fie $\tau \in SG_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n), m = (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, un simbol de tip global, fie $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $m_j < s_j, j = 1, 2$, și fie V o funcție măsurabilă pe $\mathbb{R}^n$. Presupunem că $M_{\alpha,p}(V) < \infty$ pentru un număr real α care satisface

$$0 < \alpha < p(s_1 - m_1),$$

unde $1 < p < \infty$.

Atunci,

$$\|VT_\tau\varphi\|_{0,0,p} \leq C\|\varphi\|_{s_1,s_2,p}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Așadar, $H^{s_1,s_2,p}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(VT_\tau)$.

În plus, dacă V satisface relația

$$\int_{|x-y|<1} |V(x)|^p dx \rightarrow 0 \text{ când } |y| \rightarrow \infty,$$

atunci $VT_{\tau,0}$ este un operator compact de la $H^{s_1,s_2,p}(\mathbb{R}^n)$ la $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 10. Fie $\sigma \in HSG_{\rho,\delta}^{m,m'}$, $0 < m' \leq m$, un simbol hipoeliptic, fie $\tau_j \in SG_{\rho,\delta}^{m^j}$, $1 \leq j \leq r$, fie V_j , $1 \leq j \leq r$, funcții măsurabile pe $\mathbb{R}^n$, fie

$$V_j : \mathcal{D}(V_j) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

operatorul de multiplicare corespunzător și fie $s^j = (s_1^j, s_2^j)$ în $\mathbb{R}^2$ astfel încât $m^j < s^j < m'$, $m^j = (m_1^j, m_2^j)$, $m' = (m'_1, m'_2)$, $s_2^j \leq 0$.

Presupunem că

$$M_{\alpha_{j,p}}(V_j) < \infty, \quad 1 \leq j \leq r,$$

unde

$$0 < \alpha_j < p(s_1^j - m_1^j), \quad 1 \leq j \leq r,$$

și

$$\int_{|x-y|<1} |V_j(x)|^p dx \rightarrow 0 \text{ când } |y| \rightarrow \infty, 1 \leq j \leq r, 1 < p < \infty.$$

Atunci, operatorul

$$L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), L = T_\sigma + \sum_{j=1}^r V_j T_{\tau_j}$$

este preînchis în $L^p(\mathbb{R}^n)$. În plus, dacă L_0 reprezintă închiderea sa, atunci

$$H^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}(T_{\sigma,0}) = \mathcal{D}(L_0) \subseteq H^{m',p}(\mathbb{R}^n) \quad (9)$$

și $L_0 - T_{\sigma,0}$ este $T_{\sigma,0}$ compact.

Așadar, $\sum_e(L_0) = \sum_e(T_{\sigma,0})$, unde am notat cu $\sum_e(T)$ spectrul esențial al operatorului T în sensul Schechter. În particular, dacă σ nu depinde de x în $\mathbb{R}^n$, atunci $\sum_e(L_0) = \sum_e(T_{\sigma,0}) = \sum(T_{\sigma,0}) = \{\sigma(\xi); \xi \in \mathbb{R}^n\}$.

Teorema 11. Fie σ un simbol real ca în Teorema 10, care nu depinde de x din $\mathbb{R}^n$, și fie $P = \sum_{j=1}^r V_j T_{\tau_j}$ un operator simetric care satisface ipotezele Teoremei 10 pentru $p = 2$, astfel încât $\tau_j, j = 1, 2, \dots, r$, nu depind de x din $\mathbb{R}^n$. Fie $L = T_\sigma + P$ un operator ca în Teorema 10. Atunci, L_0 este un operator auto-adjunct.

Teorema 12. Fie $\sigma \in HSG_{\rho,\delta}^{m,m'}(\mathbb{R}^n)$, $m = (m_1, m_2)$, $m' = (m'_1, m'_2)$, $m_j \geq m'_j > 0, j = 1, 2$, un simbol SG-hipoeliptic astfel încât $T_{\sigma,0}$ este generatorul infinitezimal al unui semigrup tare continuu de contracții pe $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $m'_1 > \alpha/p$, unde α este o constantă pozitivă.

Fie V o funcție măsurabilă complexă pe $\mathbb{R}^n$ astfel încât $\operatorname{Re} V(x) \leq 0$ pentru aproape toate elementele $x \in \mathbb{R}^n$ și $M_{\alpha,p}(V) < \infty$. Atunci, $T_{\sigma,0} + V$ este generatorul infinitezimal al unui semigrup unu-parametric tare continuu de contracții pe $L^p(\mathbb{R}^n)$.

În Capitolul 2, **Proprietăți ale operatorilor minimali și maximali într-un cadru abstract**, plecând de la articolul [22], construim un cadru abstract în care studiem operatorii minimali și maximali asociați unui operator $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ cu domeniul dens $\mathcal{D}(A)$, unde X este un spațiu Banach complex. În acest cadru abstract, putem să regăsim spații Lebesgue sau Sobolev, împreună cu diferite clase de operatori pseudo-diferențiali definiți pe aceste spații, de exemplu operatorii pseudo-diferențiali M-hipoeliptici (vezi [6], [7], [18]) sau operatorii SG-pseudo-diferențiali (vezi [5], [8], [12], [13], [19], [20]). De asemenea, în cadrul nostru abstract regăsim și clasa hibridă de operatori pseudo-diferențiali din lucrarea [2].

Menționăm faptul că rezultatele din acest capitol se regăsesc în lucrarea originală intitulată ***Some Properties of Minimal and Maximal Operators in an Abstract Framework***, publicată în U.P.B. Sci. Bull., Series A: Applied Mathematics and Physics, Vol. 87, Iss. 1 (2025), la care autorul acestei teze este coautor alături de Viorel Catană (vezi [11]).

În **Secțiunea 2.1**, introducem potențialii Bessel ponderați de ordine $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ și, cu ajutorul lor, definim spațiile X-Sobolev. În continuare, introducem o clasă de operatori liniari de ordine $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ aflați în conexiune cu spațiile X-Sobolev, clasă care ar putea fi privită ca o abstractizare a clasei de operatori pseudo-diferențiali hibridi din [2]. În plus, demonstrăm o proprietate suplimentară a potențialilor Bessel, precum și a spațiilor pe care aceștia sunt definiți (vezi Propoziția 1). De asemenea, tot în această secțiune, amintim câteva notații, definiții și rezultate privind operatorii minimali și maximali asociați operatorului A (vezi [22]).

În continuare, prezentăm o sinteză a conținutului acestei secțiuni.

Fie X un spațiu Banach complex cu norma $|||_X$ și fie S un subspațiu dens al lui X . Considerăm că S este un spațiu topologic în care topologia este definită de o familie numărabilă de semi-norme $\{|||_j : j = 1, 2, \dots\}$.

Spunem că un șir $\{\varphi_k\}$ în S converge la un element φ din S dacă și numai dacă $|||\varphi_k - \varphi|||_j \rightarrow 0$ când $k \rightarrow \infty$ pentru orice $j = 1, 2, \dots$.

Notăm cu S' spațiul tuturor funcționalelor liniare și continue definite pe spațiul S și notăm cu (u, φ) valoarea unei funcționale u din S' într-un element φ din S .

O funcțională u este continuă dacă și numai dacă $(u, \varphi_k) \rightarrow 0$ când $k \rightarrow \infty$ pentru toate șirurile $\{\varphi_k\}$ convergente către zero în S când $k \rightarrow \infty$.

Spunem că un șir $\{u_k\}$ în S' converge către un element u din S' dacă și numai dacă $(u_k, \varphi) \rightarrow (u, \varphi)$ când $k \rightarrow \infty$ pentru orice φ din S .

Presupunem că spațiile X și X' sunt scufundate continuu în S' .

Definițiile și notațiile folosite mai sus sunt similare cu cele utilizate în teoria distribuțiilor și sunt folosite și de către Wong în [22].

Remarca 3. Putem particulariza spațiile X și S pentru a obține cazuri concrete netriviabile. De exemplu, fie $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, fie $S = S(\mathbb{R}^n)$ spațiul Schwartz al funcțiilor cu descreștere rapidă și fie $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ mulțimea tuturor distribuțiilor temperate.

Atunci, $X' = L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ și $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

În cele ce urmează, vom prezenta cadrul nostru abstract în care vom lucra. Trebuie menționat faptul că acest cadru abstract este similar cu cel din articolul [22].

Presupunem că există o familie de spații Banach reflexive X_{s_1, s_2}^Λ în care normele sunt notate cu $|||_{s_1, s_2, \Lambda, X}$, $-\infty < s_1, s_2 < \infty$, unde $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție pondere pozitivă și, de asemenea, presupunem că există un grup biparametric de aplicații liniare și continue $J_{s_1, s_2}^\Lambda : S' \rightarrow S'$, $-\infty < s_1, s_2 < \infty$, care satisfac următoarele condiții:

(i) J_{s_1, s_2}^Λ duce S în S , $-\infty < s_1, s_2 < \infty$, și $J_{\varepsilon, \varepsilon}^\Lambda : X \rightarrow X$ este un operator compact pentru orice număr pozitiv ε .

(ii) $X_{s_1, s_2}^\Lambda = \{u \in S' : J_{-s_1, -s_2}^\Lambda u \in X\}$, $-\infty < s_1, s_2 < \infty$.

(iii)

$$|||u|||_{s_1, s_2, \Lambda, X} = |||J_{-s_1, -s_2}^\Lambda u|||_X, u \in X_{s_1, s_2}^\Lambda, -\infty < s_1, s_2 < \infty. \quad (10)$$

(iv)

Fie $s_j \leq t_j$, $j = 1, 2$.

Atunci, $X_{t_1, t_2}^\Lambda \subseteq X_{s_1, s_2}^\Lambda$ și

$$|||u|||_{s_1, s_2, \Lambda, X} \leq |||u|||_{t_1, t_2, \Lambda, X}, \quad u \in X_{t_1, t_2}^\Lambda. \quad (11)$$

- (v) X_{s_1, s_2}^Λ poate fi scufundat continuu în S' , $-\infty < s_1, s_2 < \infty$.
 (vi) S poate fi scufundat continuu în $(X_{s_1, s_2}^\Lambda)'$ și $(X_{s_1, s_2}^\Lambda)'$ poate fi scufundat continuu în S' , $-\infty < s_1, s_2 < \infty$.
 (vii)

$$(u, \varphi) = \overline{(\varphi, u)}, u \in X_{s_1, s_2}^\Lambda, \varphi \in S, -\infty < s_1, s_2 < \infty. \quad (12)$$

Denumim J_{s_1, s_2}^Λ potențialele Bessel ponderate de ordine $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ și X_{s_1, s_2}^Λ spațiile X -Sobolev de ordine $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$.

Definiția 5. Fie $T : S' \longrightarrow S'$ o aplicație liniară și continuă.

Presupunem că există o pereche de numere reale (m_1, m_2) astfel încât

$$T : X_{s_1, s_2}^\Lambda \rightarrow X_{s_1 - m_1, s_2 - m_2}^\Lambda$$

este un operator liniar mărginit pentru orice $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$.

Spunem că T este un operator de ordinul (m_1, m_2) dacă m_1 și m_2 sunt cele mai mici valori pentru care $T : X_{s_1, s_2}^\Lambda \rightarrow X_{s_1 - m_1, s_2 - m_2}^\Lambda$ este un operator liniar mărginit.

Dacă $m_1 = m_2 = -\infty$, atunci spunem că T este un operator regularizant.

Definiția 6. Fie $A : S \subset X \rightarrow X$ un operator liniar astfel încât A duce S în S și adjunctul său formal A^* duce continuu S în S .

Spunem că A este un operator de ordinul (m_1, m_2) dacă operatorul $A : S' \rightarrow S'$ este de ordinul (m_1, m_2) (a se vedea relația (14) pentru definiția operatorului $A : S' \rightarrow S'$).

Remarca 4. Familia biparametrică X_{s_1, s_2}^Λ , $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, de spații X -Sobolev definește un cadru abstract biparametric în care putem să regăsim, în anumite cazuri particulare, teoria operatorilor SG-pseudo-diferențiali (vezi [5], [8], [12]) sau teoria unei clase hibride de operatori pseudo-diferențiali (vezi [2]).

Propoziția 1. Fie $s_1, s_2, t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$.

Atunci,

- i) $J_{t_1, t_2}^\Lambda : X_{s_1, s_2}^\Lambda \rightarrow X_{s_1 + t_1, s_2 + t_2}^\Lambda$ este un operator unitar;
- ii) S este dens în X_{s_1, s_2}^Λ .

Remarca 5. j) Din (i), (ii) și Propoziția 1, obținem că $S \subset X \subset X_{0,0}^\Lambda$ și S este dens în $X_{0,0}^\Lambda$. Deoarece S este dens în X , rezultă că $X = X_{0,0}^\Lambda$.

jj) Din Propoziția 1 i), obținem că J_{t_1, t_2}^Λ este un operator de ordinul $(-t_1, -t_2)$.

Vom prezenta câteva definiții, notații și rezultate bine-cunoscute referitoare la teoria operatorilor minimali și maximali (vezi [2], [6], [7], [8], [22]).

Fie X un spațiu Banach complex, S un subspațiu dens al lui X și fie A un operator liniar de la X la X cu domeniul S . Notăm cu X' spațiul tuturor funcționalelor liniare și mărginite pe X și cu (x', x) valoarea unei funcționale x' în X' într-un element x din X .

Definiția 7. Fie $\mathcal{D}(A^t)$ mulțimea tuturor funcționalelor y' din X' pentru care există o funcțională x' din X' astfel încât

$$(y', Ax) = (x', x), \quad x \in S. \quad (13)$$

Putem demonstra că pentru orice y' din X' , există cel mult o funcțională x' din X' care verifică relația (13).

Așadar, putem să definim $A^t y' = x'$, pentru orice y' din $\mathcal{D}(A^t)$. A^t se numește adjunctul adevărat al lui A .

Se poate demonstra faptul că A^t este un operator liniar închis de la X' la X' cu domeniul $\mathcal{D}(A^t)$. De asemenea, putem observa că dacă B este o extensie liniară a lui A , atunci A^t este o extensie liniară a lui B^t .

Definiția 8. Fie A un operator liniar de la X la X cu domeniul S . Operatorul A este preînchis dacă și numai dacă

$$\varphi_k \in S, \varphi_k \rightarrow 0 \text{ în } X, A\varphi_k \rightarrow x \text{ în } X \Rightarrow x = 0.$$

În cele ce urmează, vom defini operatorul minimal asociat operatorului A .

Presupunem că A este un operator preînchis. Putem să construim o extensie liniară închisă A_0 a operatorului A .

Definiția 9. Fie $\mathcal{D}(A_0)$ mulțimea tuturor elementelor x din X pentru care există un șir $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ din S astfel încât $\varphi_k \rightarrow x$ în X , $A\varphi_k \rightarrow y$ pentru y din X când $k \rightarrow \infty$.

Putem defini $A_0 x = y$, pentru orice $x \in \mathcal{D}(A_0)$.

Se poate demonstra că definiția operatorului A_0 nu depinde de alegerea particulară a șirului $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ și, de asemenea, se poate demonstra că A_0 este cea mai mică extensie liniară a lui A (i.e. dacă B este o extensie liniară a lui A , atunci B este o extensie liniară a lui A_0). A_0 se numește operatorul minimal asociat operatorului A .

Din acest moment, în cadrul acestui capitol, vom presupune că X este un spațiu Banach complex reflexiv.

Pentru a defini operatorul maximal, trebuie să introducem noțiunea de adjunct formal. Presupunem că spațiul X și dualul său X' se pot scufunda continuu într-un spațiu topologic Y . Așadar, spațiile X și X' pot fi privite ca subspații ale spațiului Y .

De asemenea, presupunem că există un subspațiu S al lui Y astfel încât S este un subspațiu dens al lui X și X' .

În cadrul următoarelor definiții și rezultate, vom considera că A este un operator liniar de la X la X cu domeniul S .

Definiția 10. Adjunctul formal A^* al operatorului A , dacă există, se definește ca fiind restricția adjunctului adevărat A^t la spațiul S .

Din Definiția 10, observăm faptul că există adjunctul formal A^* dacă și numai dacă S este conținut în domeniul lui A^t .

Definiția 11. Definim operatorul liniar A_1 de la X la X folosind relația $A_1 = (A^*)^t$.

Fie $\varphi \in S$. Din Definiția 11, obținem că $(\varphi, A_1 x) = (A^* \varphi, x)$ pentru orice x din $\mathcal{D}(A_1)$.

Din definiția adjunctului adevărat, $\varphi \in \mathcal{D}(A_1^t)$ și $A_1^t \varphi = A^* \varphi$.

În articolul [22] se arată faptul că A_1 este un operator liniar închis de la X la X cu domeniul $\mathcal{D}(A_1)$ conținând spațiul S , domeniul $\mathcal{D}(A_1^t)$ al adjunctului adevărat al lui A_1 conține spațiul S , A_1 este o extensie liniară a lui A_0 și, de asemenea, este demonstrat faptul că A_1 este cea mai mare extensie liniară a lui A , cu proprietatea că spațiul S este conținut în domeniul adjunctului său (i.e. dacă B este o extensie liniară a lui A astfel încât $S \subseteq \mathcal{D}(B^t)$, atunci A_1 este o extensie liniară a lui B). Astfel, operatorul A_1 se numește operatorul maximal asociat operatorului A .

Fie A un operator liniar de la X la X cu domeniul S . Considerăm că A duce S în S și adjunctul său formal A^* duce continuu S în S (i.e. dacă $\{\varphi_k\}$ este un șir din S astfel încât $\varphi_k \rightarrow 0$ în S când $k \rightarrow \infty$, atunci $A\varphi_k \rightarrow 0$ și $A^*\varphi_k \rightarrow 0$ în S când $k \rightarrow \infty$).

Operatorul liniar A se poate extinde la spațiul S' după cum urmează.

Pentru orice u din S' , Au este un element din S' dat de relația

$$(Au, \varphi) = (u, A^* \varphi), \quad \varphi \in S. \quad (14)$$

Se poate arăta că $A : S' \rightarrow S'$ este o aplicație liniară și continuă.

În **Secțiunea 2.2**, am stabilit câteva ipoteze pentru a enunța și demonstra un analog al inegalității Agmon-Douglis-Nirenberg pentru operatori pseudo-diferențiali în cazul operatorului $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ cu domeniul dens $\mathcal{D}(A)$ (vezi Teorema 13). Folosind această inegalitate, am determinat domeniul operatorului minimal și am demonstrat faptul că operatorii minimali și maximali sunt egali atunci când sunt îndeplinite anumite ipoteze asupra spațiului Banach complex X și a operatorului A (vezi Teoremele 14, 15). Utilizând rezultatele obținute, am putut enunța și demonstra un rezultat privind

existența și regularitatea soluțiilor slabe ale ecuațiilor liniare de forma $Au = f$ pe spațiul Banach X (vezi Teorema 16).

Teorema 13. (inegalitatea Agmon-Douglis-Nirenberg [1]) *Fie A un operator liniar de la X la X cu domeniul S astfel încât A duce S în S și adjunctul său formal A^* duce continuu S în S . Presupunem că A are ordinul pozitiv (m_1, m_2) și că există un operator liniar B de ordinul $(-m_1, -m_2)$ de la X la X cu domeniul S astfel încât*

$$BA = I + R, \quad (15)$$

unde I este operatorul identitate și R este un operator regularizant.

Atunci, există două constante pozitive C_1 și C_2 astfel încât

$$C_1 \|x\|_{m_1, m_2, \Lambda} \leq \|Ax\|_{0, 0, \Lambda} + \|x\|_{0, 0, \Lambda} \leq C_2 \|x\|_{m_1, m_2, \Lambda}, \quad x \in X_{m_1, m_2}^\Lambda. \quad (16)$$

Teorema 14. *Fie A ca în Teorema 13. Atunci, $\mathcal{D}(A_0) = X_{m_1, m_2}^\Lambda$.*

Teorema 15. *Fie A ca în Teorema 13. Atunci, $A_0 = A_1$.*

Definiția 12. Fie $f \in X$. Un element u din X se numește soluție slabă a ecuației liniare de tipul $Au = f$ dacă $(A^*\varphi, u) = (\varphi, f)$, pentru orice $\varphi \in S$.

Teorema 16. *Fie $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un operator liniar ca în Teorema 13 și fie $f \in X$. Atunci, orice soluție slabă u a ecuației liniare $Au = f$ este în X_{m_1, m_2}^Λ .*

Remarca 6. Teorema anterioară reprezintă un rezultat de regularitate în sensul în care orice soluție slabă u a ecuației liniare $Au = f$ se află într-un spațiu mai restrâns X_{m_1, m_2}^Λ , deoarece $X_{m_1, m_2}^\Lambda \subset X_{0, 0}^\Lambda = X$ din (11).

În **Secțiunea 2.3**, am demonstrat două rezultate de perturbare. Dintre acestea, unul face referire la inegalitatea Agmon-Douglis-Nirenberg (vezi Teoremele 17 și 18), iar celălalt rezultat se referă la semigrupul tare continuu de contracții generat de un operator A considerat în Teorema 13 (vezi Teorema 19).

Prezentăm în continuare rezultatele obținute în această secțiune.

Teorema 17. *Fie A un operator ca în Teorema 13 și fie $V : \mathcal{D}(V) \subset X \rightarrow X$ cu $S \subset \mathcal{D}(V)$ un operator închis pentru care există o constantă pozitivă C astfel încât*

$$\|V\varphi\|_{0, 0, \Lambda} \leq C \|\varphi\|_{s_1, s_2, \Lambda}, \quad \varphi \in S, \quad (17)$$

unde $0 < s_1 < m_1, s_2 \leq 0 < m_2$.

Atunci, există constantele pozitive $\tilde{C}_1$ și $\tilde{C}_2$ astfel încât

$$\tilde{C}_1 \|\varphi\|_{m_1, m_2, \Lambda} \leq \|(A + V)\varphi\|_{0, 0, \Lambda} + \|\varphi\|_{0, 0, \Lambda} \leq \tilde{C}_2 \|\varphi\|_{m_1, m_2, \Lambda}, \quad \varphi \in S. \quad (18)$$

Teorema 18. Fie A un operator ca în Teorema 13 și fie $V : \mathcal{D}(V) \subset X \rightarrow X$ cu $S \subset \mathcal{D}(V)$ un operator închis care satisface estimarea

$$\|V\varphi\|_{0,0,\Lambda} \leq C\|\varphi\|_{s_1,s_2,\Lambda}, \varphi \in S, \quad (19)$$

unde $0 < s_1 < m_1, s_2 \leq 0 < m_2$.

Atunci, există constantele pozitive C_1, C_2 astfel încât

$$C_1\|u\|_{m_1,m_2,\Lambda} \leq \|(A_0 + V)u\|_{0,0,\Lambda} + \|u\|_{0,0,\Lambda} \leq C_2\|u\|_{m_1,m_2,\Lambda}, u \in X_{m_1,m_2}^\Lambda. \quad (20)$$

Teorema 19. Fie A un operator ca în Teorema 13 astfel încât A este generatorul infinitesimal al unui semigrup tare continuu de contracții pe X .

Fie $V : \mathcal{D}(V) \subset X \rightarrow X$ un operator maximal disipativ cu $S \subset \mathcal{D}(V)$ astfel încât

$$\|V\varphi\|_{0,0,\Lambda} \leq C\|\varphi\|_{s_1,s_2,\Lambda}, \varphi \in S, \quad (21)$$

unde $0 < s_1 < m_1, s_2 \leq 0 < m_2$ și C este o constantă pozitivă.

Atunci, $A_0 + V$ este generatorul infinitesimal al unui semigrup unu-parametric tare continuu de contracții pe X .

În Secțiunea 2.4, am enunțat și demonstrat o teoremă referitoare la spațiile X -Sobolev (vezi Teorema 20) și, cu ajutorul acestei teoreme, am demonstrat faptul că operatorul minimal asociat operatorului A este Fredholm atunci când sunt îndeplinite anumite ipoteze (vezi Teorema 21).

Teorema 20. Fie $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $s_1 < t_1$ și $s_2 < t_2$.

Atunci, scufundarea $i : X_{t_1,t_2}^\Lambda \hookrightarrow X_{s_1,s_2}^\Lambda$ este un operator compact.

Teorema 21. Fie $A : S \subset X \rightarrow X$ un operator ca în Teorema 13 astfel încât $AB = I + L$, unde B este operatorul din Teorema 13 și L este un operator regularizant.

Atunci, operatorul liniar mărginit $A_0 : X_{m_1,m_2}^\Lambda \subset X \rightarrow X$ este Fredholm.

În Capitolul 3, **Asupra unei clase de ecuații neliniare generalizate definite de simboluri eliptice**, introducem și studiem o clasă de ecuații neliniare și nonlocale de ordin infinit de tipul

$$f(-\Lambda(D))u = U(\cdot, u) \quad (22)$$

pe $\mathbb{R}^n$, în care $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție măsurabilă care satisface anumite condiții de elipticitate, $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție pozitivă și continuă, astfel încât $\Lambda(D)$ este un multiplicator Fourier, unde $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$, $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$.

Rezultatele obținute în Capitolul 3 se regăsesc în lucrarea originală [10] cu titlul ***On a Generalized Class of Nonlinear Equations Defined by Elliptic Symbols***, publicată în Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 47, 109 (2024), la care autorul acestei teze este coautor alături de Viorel Catană și Ioana-Maria Flondor.

Rezultatele obținute au avut drept punct de plecare lucrarea lui Bravo Vera [3] și lucrările autorilor Górká, Prado și Reyes (vezi [14], [15], [16], [17])). În aceste lucrări, autorii au considerat un caz particular, mai precis acela în care operatorul $f(\Delta)$ este definit folosind operatorul lui Laplace pe spațiul Euclidian $\mathbb{R}^n$ sau pe o varietate Riemann (M, g) . În aceste cazuri particulare au fost obținute rezultate de existență și regularitate a soluțiilor ecuațiilor de tipul

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u). \quad (23)$$

Menționăm faptul că ecuații similare au fost studiate în [3], [15] și [14].

De asemenea, în lucrarea [4], Bravo, Prado și Reyes au studiat ecuații pseudo-diferențiale neliniare de forma

$$(a(-\Delta) + 1)^{s/2}u = U(\cdot, u), \quad (24)$$

în care $s > 0$ și simbolurile a aparțin unei anumite clase de simboluri. Studiul ecuațiilor de acest tip a fost realizat în cadrul spațiilor Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, folosind teoria multiplicatorilor Fourier. Observăm faptul că, în cazul în care $s = 2$ și $f(\Delta) = a(-\Delta) + 1$ în ecuația (24), se obține ecuația (23).

Dacă vom considera $\Lambda(\xi) = |\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n$ (în acest caz $0 < \sigma \leq 1$), atunci $\Lambda(D) = -\Delta$ (unde Δ operatorul lui Laplace din $\mathbb{R}^n$) și ecuația (27) devine ecuația (1.4) studiată în [3] și [17]. Așadar, în cazul particular în care $\Lambda(D) = -\Delta$, din rezultatele obținute în acest capitol vom regăsi rezultatele obținute de Górká, Prado și Reyes în [17] și de Bravo Vera în [3].

Ca atare, trebuie subliniat faptul că în acest capitol al tezei noastre vom considera un caz mai general decât cel considerat în [3] și [17].

De exemplu, în cazul particular în care $\Lambda(\xi) = |\xi|^3 + |\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n$ (în acest caz $\frac{3}{4} < \sigma \leq 1$), atunci $\Lambda(D) = (-\Delta)^{\frac{3}{2}} - \Delta$.

Pentru a prezenta câteva exemple concrete de ecuații de forma (22), putem considera, de exemplu, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(s) = -se^{s^2}$.

În cazul în care $\Lambda(\xi) = |\xi| + |\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n$, atunci $\Lambda(D) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}} - \Delta$.

Ca atare, obținem ecuația

$$\left(\left(\Delta - (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \right) e^{(\Delta - (-\Delta)^{\frac{1}{2}})^2} + I \right) u = U(\cdot, u). \quad (25)$$

Un alt exemplu de ecuație de forma (22) se poate obține considerând aceeași formă a funcției f ca în exemplul anterior și $\Lambda(\xi) = |\xi|^2 + |\xi|^4, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Atunci, $\Lambda(D) = -\Delta + \Delta^2$ și obținem ecuația

$$\left((\Delta - \Delta^2) e^{\Delta^2 - 2\Delta^3 + \Delta^4} + I \right) u = U(\cdot, u). \quad (26)$$

În Capitolul 3, enunțăm și demonstrăm câteva rezultate privind existența, unicitatea și regularitatea soluțiilor ecuațiilor de tipul (22), plecând de la observațiile și tehnicile folosite în lucrările autorilor menționați mai sus.

În **Secțiunea 3.1**, definim clasele de simboluri $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$, $\beta > 0$, $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă cu anumite proprietăți și spațiile Hilbert $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, unde $\beta > 0$ și $f \in \mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$, în care se vor căuta soluțiile ecuației (22) și se va prezenta o formulă a operatorului $f(-\Lambda(D))$. De asemenea, tot în cadrul acestei secțiuni, enunțăm și demonstrăm câteva rezultate referitoare la clasele de simboluri $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ și la spațiile $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$. Unul dintre aceste rezultate face referire la anumite proprietăți ale claselor $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ (vezi Propoziția 2), iar alte două rezultate se referă la structura spațiilor $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$ (vezi Propozițiile 3 și 4).

Prezentăm mai jos definițiile și rezultatele obținute în această secțiune.

Așa cum am precizat, în acest capitol vom studia ecuațiile neliniare de forma

$$f(-\Lambda(D))u(x) = U(x, u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (27)$$

unde u se află într-un subspațiu $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ și

$$\Lambda(D)u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \Lambda(\xi) \mathcal{F}u(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\Lambda(\xi) \mathcal{F}u(\xi))(x), \quad (28)$$

pentru toate funcțiile $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ astfel încât $\Lambda(\cdot) \mathcal{F}u(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

În (28) am notat cu $\mathcal{F}$ transformata Fourier și $\mathcal{F}^{-1}$ corespunde transformatei Fourier inverse.

Trebuie remarcat faptul că operatorul $\Lambda(D)$ este un multiplicator Fourier și operatorul din (27) este, de fapt, o funcție de multiplicatori Fourier.

În plus, $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție pozitivă și continuă care satisface următoarea condiție:

$$\Lambda(\xi) \geq C_1 (1 + |\xi|^2)^\sigma, \quad |\xi| > R_1, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (29)$$

pentru anumite numere reale pozitive C_1, R_1 și σ .

Funcția măsurabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu care putem defini ecuația (27) o vom denumi *simbol* și funcția Λ de mai sus reprezintă *tipul* simbolului f .

Așadar, în cele ce urmează, vom defini clasa de simboluri pentru care vom considera ecuațiile neliniare de forma (27).

Definiția 13. Fie $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pozitivă și continuă și fie β un număr real pozitiv.

Atunci, o funcție măsurabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește simbol de ordinul β și de tipul Λ dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiții:

- (i) $f(-s) \geq 0$ pentru toate numerele reale nenegative $s \in \mathbb{R}$;
- (ii) Există numerele reale pozitive M, R astfel încât

$$M(1 + \Lambda(\xi))^{\frac{\beta}{2}} \leq f(-\Lambda(\xi)), \quad |\xi| > R, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (30)$$

Vom nota cu $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ clasa simbolurilor de ordinul β și de tipul Λ . O funcție măsurabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care aparține spațiului $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ se va numi $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ -simbol sau, pe scurt, simbol.

În cele ce urmează, fiecărui $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ -simbol f îi vom asocia un spațiu vectorial $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$ conform următoarei definiții.

Definiția 14. Fie f un $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ -simbol. Atunci, o funcție măsurabilă de variabilă reală $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se află în spațiul $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$ dacă și numai dacă există transformata Fourier $\mathcal{F}(g)$ a funcției g și

$$\int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-\Lambda(\xi))]^2 |\mathcal{F}g(\xi)|^2 d\xi < \infty. \quad (31)$$

Putem înzestra spațiul vectorial $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$ cu următorul produs scalar:

$$(g_1, g_2)_{\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)} = \int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-\Lambda(\xi))]^2 \mathcal{F}g_1(\xi) \overline{\mathcal{F}g_2(\xi)} d\xi, \quad (32)$$

pentru orice $g_1, g_2 \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$.

Așadar, spațiul vectorial $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$ înzestrat cu produsul scalar definit mai sus devine un spațiu Hilbert.

Remarcăm faptul că, în cazul în care $\Lambda(\xi) = |\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n$, obținem că $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) = \mathcal{H}^{\beta}(f)$, unde $\mathcal{H}^{\beta}(f)$ este spațiul Hilbert definit în [3] și [17].

În urma unui calcul formal, se observă faptul că este convenabil să definim $f(-\Lambda(D))u$, pentru $u \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$,

$$f(-\Lambda(D))u = \mathcal{F}^{-1}(f(-\Lambda(\xi))\mathcal{F}(u)(\xi)). \quad (33)$$

Operatorul

$$f(-\Lambda(D)) : \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

definit prin relația (33), pentru orice $u \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$, este un operator liniar bine definit.

Propoziția 2. Următoarele două afirmații sunt adevărate.

(i) Dacă $f \in \mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ și $g \in \mathcal{G}^{\gamma, \Lambda}$, atunci $f \cdot g \in \mathcal{G}^{\beta+\gamma, \Lambda}$, unde β, γ sunt numere reale pozitive fixate și $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și pozitivă care satisface condiția (29).

(ii) Dacă $0 < \gamma < \beta$, atunci $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda} \subset \mathcal{G}^{\gamma, \Lambda}$.

(iii) Fie r un număr real pozitiv și fie $f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție astfel încât

$$f_r(s) = (1 - s)^{\frac{1}{2}} - 1,$$

pentru orice $s \in \mathbb{R}_-$, unde $\mathbb{R}_-$ reprezintă mulțimea tuturor numerelor reale nepozitive.

Atunci, $f_r \in \mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$, pentru orice $\beta \leq r$.

Propoziția 3. Fie f un $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ -simbol. Atunci, următoarele afirmații sunt adevărate.

(i) Pentru orice $s \in \mathbb{R}, s \leq \beta\sigma$, are loc scufundarea $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Pentru orice număr întreg $k \geq 1$ astfel încât $\frac{n}{2} + k < s \leq \beta\sigma$, are loc scufundarea $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Pentru orice $0 < \alpha < 1$ astfel încât $\frac{n}{2} + \alpha = s \leq \beta\sigma$, are loc scufundarea $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) \hookrightarrow C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, unde $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ este spațiul Hölder al funcțiilor continue de ordinul α .

Propoziția 4. O funcție măsurabilă $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aparține spațiului $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f), \beta\sigma > \frac{n}{2}$, dacă și numai dacă $g = K_f^\Lambda * \tilde{g}$ pentru $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

În plus, spațiul Hilbert $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$ înzestrat cu produsul scalar din relația (32) este izometric izomorf cu spațiul Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ și transformarea $\mathcal{K}_\Lambda : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$ definită de relația $\mathcal{K}_\Lambda(g) = K_f^\Lambda * g$ este un izomorfism izometric, i.e. este o bijectie și

$$\|K_f^\Lambda * g\|_{\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

În Secțiunea 3.2, studiem soluțiile ecuațiilor liniare de forma

$$Lu = g, \quad g \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (34)$$

unde operatorul liniar $L : \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ este definit cu ajutorul relației

$$L = f(-\Lambda(D)) + I. \quad (35)$$

În relația anterioară, f este un $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ -simbol și $I : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ este operatorul identitate.

În plus, operatorul liniar L este definit de relația

$$Lu = \mathcal{F}^{-1}([1 + f(-\Lambda(\xi))]\mathcal{F}u(\xi)), u \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f). \quad (36)$$

Enunțăm și demonstrăm un rezultat de existență și unicitate a soluțiilor ecuațiilor de forma (34) (vezi Teorema 22) și, folosind această teoremă, demonstrăm în ce condiții aceste ecuații admit soluții real-analitice (vezi Teorema 23). Ca o aplicație a Teoremei 23, demonstrăm un rezultat de real-analiticitate și regularitate a soluțiilor ecuației liniare generalizate a coardei bosonice (vezi Teorema 24). În plus, demonstrăm două rezultate referitoare la regularitatea și invarianța la rotații a soluțiilor unice ale ecuațiilor de forma (34) (vezi Propozițiile 5 și 6).

Rezultatele originale obținute în cadrul acestei secțiuni sunt prezentate mai jos.

Teorema 22. *Fie f un $\mathcal{G}^{\beta,\Lambda}$ -simbol. Atunci, pentru $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ există o unică soluție $u_g \in \mathcal{H}^{\beta,\Lambda}(f)$ a ecuației liniare (34).*

În plus, are loc egalitatea

$$\|u_g\|_{\mathcal{H}^{\beta,\Lambda}(f)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (37)$$

Teorema 23. *Fie $f \in \bigcap_{\beta>0} \mathcal{G}^{\beta,\Lambda} = \mathcal{G}^{-\infty,\Lambda}$ (egalitatea este o notație) un simbol regularizant, unde $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tipul simbolului, este o funcție continuă și pozitivă cu simetrie radială (i.e. $\Lambda(\xi) = \tilde{\Lambda}(|\xi|)$, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$).*

De asemenea, presupunem că există $c > 0$ astfel încât

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c^{2m}}{m!} \int_0^\infty \frac{r^{2m+n-1}}{[1 + f(-\tilde{\Lambda}(r))]^2} dr = 0. \quad (38)$$

Atunci, soluția unică $u_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a ecuației liniare

$$(f(-\Lambda(D)) + I)u = g, g \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (39)$$

este real-analitică, i.e. $u_g \in C^\omega(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 24. *Fie $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă cu simetrie radială (i.e. $\Lambda(\xi) = \tilde{\Lambda}(|\xi|)$ pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$) care satisface (29) pentru $\sigma = 1$ și fie $u_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soluția ecuației liniare generalizate a coardei bosonice*

$$(\Lambda(D)e^{c\Lambda(D)} + I)u = g, g \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (40)$$

unde $c > 0$ este o constantă pozitivă.

Atunci, $u_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este real-analitică în orice bilă $B(z, \tilde{\rho})$ din $\mathbb{R}^n$, cu centrul în $z \in \mathbb{R}^n$ și de rază $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{2\pi n^2}$, $0 < \rho < \min(C_1, c)$, unde C_1 este constanta pozitivă din relația (29).

Remarca 7. Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(s) = -se^{s^2}, s \in \mathbb{R}, \Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface (29) pentru $\sigma = 1/2$ și $f \in \bigcap_{\beta > 0} \mathcal{G}^{\beta, \Lambda} = \mathcal{G}^{-\infty, \Lambda}$ (i.e. f este un simbol regularizant de tipul Λ), atunci rezultă că f satisface ipotezele Teoremei 23.

De exemplu, dacă $\Lambda(\xi) = |\xi|^2 + |\xi|, \xi \in \mathbb{R}^n$, atunci soluția u_g a ecuației

$$\left(\left(\Delta - (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \right) e^{\left(\Delta - (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \right)^2} + I \right) u = g, g \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

este real-analitică în orice bilă $B(z, \tilde{\rho})$ cu centrul în $z \in \mathbb{R}^n$ și de rază $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{2\pi n^2}, 0 < \rho < C_1$, unde C_1 este constanta pozitivă din (29).

Remarca 8. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă și pozitivă și fie $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă cu simetrie radială (i.e. $\Lambda(\xi) = \tilde{\Lambda}(|\xi|), \xi \in \mathbb{R}^n$), care satisface (29), astfel încât

$$[1 + f(-\tilde{\Lambda}(r))]^2 \geq \tilde{\Lambda}(r)e^{c\tilde{\Lambda}(r)} \quad (41)$$

pentru orice $r \in \mathbb{R}^+$, unde $c > 0$.

Atunci, soluția $u_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a ecuației liniare

$$(f(-\Lambda(D)) + I)u = g, g \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (42)$$

este real-analitică.

Propoziția 5. Fie f un $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ -simbol și fie $Lu = g, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ecuația liniară definită de operatorul (36). Presupunem, în plus, că $g \in \mathcal{H}^{\delta, \Lambda}(h)$, pentru $\delta > 0$ și $h \in \mathcal{G}^{\delta, \Lambda}$.

Atunci, soluția acestei ecuații aparține intersecției $\mathcal{H}^{\delta, \Lambda}(h) \cap \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) \cap \mathcal{H}^{\beta+\delta, \Lambda}(f \cdot h)$.

Propoziția 6. Fie f un $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ -simbol și fie $Lu = g, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ecuația liniară corespunzătoare acestui simbol. Dacă g și Λ sunt invariante la rotații (i.e. pentru orice rotație $R \in SO(n), g(Rx) = g(x)$ și $\Lambda(R\xi) = \Lambda(\xi)$ pentru orice $x, \xi \in \mathbb{R}^n$), atunci soluția u a ecuației liniare $Lu = g, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, este, de asemenea, invariantă la rotații.

În **Secțiunea 3.3**, vom considera o formă neliniară a ecuației (22). Mai precis, vom considera ecuațiile neliniare de tipul

$$f(-\Lambda(D))u(x) = U_\delta(x, u(x)), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f), \quad (43)$$

unde membrul drept al ecuației (43) este definit de relația

$$U_\delta(x, y) = -y + \delta V(x, y), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}^n \text{ și } y \in \mathbb{R}. \quad (44)$$

În relația (44), $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție cu anumite proprietăți și δ este un număr real nenegativ fixat.

Din (43) și (44), reiese că ecuația neliniară considerată este echivalentă cu ecuația

$$Lu(x) = \delta V(x, u(x)), x \in \mathbb{R}^n, \quad (45)$$

unde L este operatorul definit în relația (35).

Folosind Teorema de punct fix a lui Banach, enunțăm și demonstrăm un rezultat de existență, unicitate și regularitate a soluțiilor ecuațiilor de tipul (43) (vezi Teorema 25). Ca o consecință a Teoremei 25, enunțăm și demonstrăm alte două rezultate de unicitate, real-analiticitate și regularitate pentru soluțiile ecuațiilor neliniare de forma (43) (vezi Corolarele 2 și 3). La finalul acestei secțiuni, enunțăm și demonstrăm două rezultate referitoare la unicitatea, regularitatea și real-analiticitatea soluțiilor ecuațiilor neliniare considerate (vezi Teorema 26 și Corolarul 4).

În continuare, prezentăm rezultatele originale obținute în cadrul acestei secțiuni.

Teorema 25. *Fie f un $\mathcal{G}^{\beta, \Lambda}$ -simbol și fie $U_\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită ca în (44), unde δ este o constantă pozitivă. Presupunem, în plus, că $V(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ și că există o funcție $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ astfel încât are loc inegalitatea*

$$|V(x, y_1) - V(x, y_2)| \leq |h(x)| |y_1 - y_2|, \quad (46)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ și $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Atunci, dacă $\delta > 0$ este suficient de mic, există o unică soluție $u \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$ a ecuației (43).

Corolarul 2. *Fie $f \in \bigcap_{\beta > 0} \mathcal{G}^{\beta, \Lambda} = \mathcal{G}^{-\infty, \Lambda}$ un simbol regularizant, fie $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă cu simetrie radială (i.e. $\Lambda(\xi) = \tilde{\Lambda}(|\xi|)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$) și fie $U_\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta > 0$, funcția definită în (44) astfel încât ipoteza Teoremei 25 este adevărată. Presupunem, în plus, că simbolul $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface ipotezele Teoremei 23.*

Atunci, există o soluție real-analitică $u \in C^\omega(\mathbb{R}^n)$ a ecuației (43).

Corolarul 3. *Fie f, β, V și h ca în Teorema 25. Presupunem, în plus, că există un număr real pozitiv r și un întreg k cu $\sigma(r + \beta) > n/2 + k$, astfel încât*

$$V(\cdot, u) \in \mathcal{H}^{r, \Lambda}(f_r),$$

pentru orice $u \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$.

Atunci, soluția $\tilde{u}$ a ecuației neliniare (43) este în clasa $C^k(\mathbb{R})$.

Considerăm mulțimea $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)_{\text{rad}} = \{u \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f) : \text{pentru orice rotație } R \in SO(n) \text{ avem } u(Rx) = u(x), \text{ pentru aproape toți } x \in \mathbb{R}^n\}$. Observăm că $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)_{\text{rad}}$ este o submulțime închisă a lui $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)$.

Prin urmare, $\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)_{\text{rad}}$ este un spațiu Hilbert.

În particular, $(\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)_{\text{rad}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)})$ este un spațiu Banach.

Teorema 26. *Fie f, β, V, δ ca în Teorema 25 și fie $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, pozitivă și invariantă la rotații.*

Presupunem, în plus, că

$$U_\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$U_\delta(x, y) = -y + \delta V(x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R},$$

este invariantă la rotații în raport cu variabila x .

Atunci, pentru $\delta > 0$ suficient de mic, există o unică soluție $\tilde{u} \in \mathcal{H}^{\beta, \Lambda}(f)_{\text{rad}}$ a ecuației neliniare (43).

Corolarul 4. *Fie $f \in \bigcap_{\beta > 0} \mathcal{G}^{\beta, \Lambda} = \mathcal{G}^{-\infty, \Lambda}$ un simbol regularizant, fie $U_\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \delta > 0$ și $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții ca în Corolarul 2. În plus, presupunem că U_δ este invariantă la rotații în raport cu variabila x .*

Atunci, există o unică soluție real-analitică $u \in C^\omega(\mathbb{R}^n)$ a ecuației (43).

La finalul tezei noastre, am prezentat un abstract al lucrării originale cu titlul **Generalized Fourier multipliers**, publicată în Ann. Funct. Anal. 14, 34 (2023) (vezi [9]), la care autorul acestei teze are contribuții în calitate de coautor alături de Viorel Catană și Ioana-Maria Flondor.

Menționăm faptul că rezultatele obținute în articolul [9] împreună cu demonstrațiile acestora se regăsesc în teza de doctorat a cărei autoare este Ioana-Maria Flondor.

Bibliografie selectivă

1. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Commun. Pure Appl. Math. 12, 623-727 (1959).
2. M. Alimohammady, M. K. Kalleji, *Spectral theory of a hybrid class of pseudo-differential operators*, Complex Variables and Elliptic Equations 59(12), 2014.
3. M. Bravo Vera, *Nonlinear equations of infinite order defined by elliptic symbol*, International Journal of Mathematics and Mathematical Science, Vol. 2014, Article ID 656959, 7 pg.
4. M. Bravo Vera, H. Prado, E. G. Reyes, *Nonlinear pseudo-differential equations defined by elliptic symbols on $L^p(\mathbb{R}^n)$ and the fractional Laplacian*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 231, 269-301, 2019.
5. I. Camperi, *Global hypoellipticity and Sobolev estimates for generalized SG pseudo-differential operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 66(2), 99-112 (2008).
6. V. Catană, *M-hypoelliptic pseudo-differential operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$* , Appl. Anal. 87(6), 657-666 (2008).
7. V. Catană, *Essential spectra and semigroups of perturbations of M-hypoelliptic pseudo-differential operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$* , Complex Var. Elliptic Equ. 54(8), 731-744 (2009).
8. V. Catană, **H-G. Georgescu**, *Essential spectra and semigroups of perturbations of generalized SG-hypoelliptic pseudo-differential operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$* , J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 13, 25 (2022).
9. V. Catană, I-M. Flondor, **H-G. Georgescu**, *Generalized Fourier multipliers*, Ann. Funct. Anal. 14, 34 (2023).

10. V. Catană, **H-G. Georgescu**, I-M. Flondor, *On a Generalized Class of Nonlinear Equations Defined by Elliptic Symbols*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 47, 109 (2024).
11. V. Catană, **H-G. Georgescu**, *Some Properties of Minimal and Maximal Operators in an Abstract Framework*, U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 87, Iss. 1 (2025).
12. A. Dasgupta, M. W. Wong, *Spectral theory of SG-pseudo-differential operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$* , Studia Math 187, 186 – 197(2008).
13. A. Dasgupta , M. W. Wong, *Spectral invariance of SG pseudo-differential operators on $L^p(R^n)$* , In: Operator Theory: Advances and Applications, vol. 205, pp. 51-57. Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland (2009).
14. P. Górká, H. Prado, E. G. Reyes, *Functional calculus via Laplace transform and equations with infinitely many derivatives*, Journal of Mathematical Physics, vol. 51, no. 10, Article ID 103512, 2010.
15. P. Górká, H. Prado, E. G. Reyes, *Nonlinear equations with infinitely many derivatives*, Complex Anal. Operator Theory 5, 313-323 (2011).
16. P. Górká, H. Prado, E. G. Reyes, *Generalized Euclidean Bosonic String Equations* in: Spectral Analysis of Quantum Hamiltonians, Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 224, 147-169, Springer, Basel AG, 2012.
17. P. Górká, H. Prado, E. G. Reyes, *On a general class of nonlocal equations*. Ann. Henri Poincaré, 14 (2013), 947-966.
18. O. Milatovic, *Minimal and maximal extensions of M-hypoelliptic proper uniform pseudo-differential operators in L^p -spaces on non-compact manifolds*, J. PseudoDiffer. Oper. Appl. 12, 16(2021).
19. F. Nicola, L. Rodino, *SG pseudo-differential operators and weak hyperbolicity*, Pliska Stud. Math. Bulgar. 15 (2003), 5-20.
20. F. Nicola, L. Rodino, *Global Pseudo-Differential Calculus on Euclidean Spaces, Pseudo-Differential Operators, Theory and Applications*, vol. 4. Springer, Berlin (2010).
21. M. Schechter, *Spectra of Partial Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam (1971).

- 22. M. W. Wong. *Minimal and maximal operator theory with applications*, Canad. J. Math. 43(1991), 617-627.
- 23. M. W. Wong, *Erhling's inequality and pseudo-differential operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$* , Cubo 8, 97 – 108 (2006).