

Universitatea Națională de Știință și Tehnologie
POLITEHNICA București
Departamentul de Matematică & Informatică
Splaiul Independenței 313, 060042 București, România

Clase de operatori pentru probleme neliniare cu aplicații în lumea reală

Dan I. RICINSCHI
E-mail: dan.ricinschi@stud.fsa.upb.ro

Rezumatul tezei de doctorat

Sub conducerea Prof. Dr. habil. Mihai POSTOLACHE

București, 30 aprilie, 2026

Cuvinte și fraze cheie: spațiu cu b -metrică extinsă; spațiu metric generalizat; contracție Istrățescu; contracție generalizată; spațiu W -hiperbolic; aplicație nonxpansivă; condiția (E), condiția (L); operator L_2 ; metodă iterativă; Δ -convergență; convergență; punct fix comun; comparație numerică; problema realizării defalcării punctului fix comun; operator demicontractiv; metodă inerțială în doi pași; mulțime Julia; mulțime Mandelbrot; criteriu de ieșire; generare de fractali.

Clasificare Matematică 2020: 37F46; 47H09; 47H10; 47J20; 47J25; 47J26; 54H25.

Cuprins

Motivație și introducere	5
Recunoștință	10
Finanțare	11
Lucrări elaborate & prezentări la conferințe	12
1 Contracții Istrățescu în spații cu b-metrică extinsă	13
1.1 Spații cu b -metrică extinsă	13
1.2 Contracții Istrățescu	16
1.3 Rezultate de punct fix pe spații cu b -metrică extinsă	18
1.4 Spații cu b -metrică extinsă nouă	28
2 Operatori cu condiția (E) în spații W-hiperbolice	35
2.1 Aplicații cu condiția (E)	35
2.2 Spații W -hiperbolice	36
2.3 Iterația SRJ și rezultate de convergență	39
2.4 Simulare numerică	46
3 Punct fix comun pentru operatori L_2 via TTP16-PR	53
3.1 Despre operatori L_2	53
3.2 Iterația TTP16-PR și rezultate de convergență	56
3.3 Comparatie cu iterații cunoscute	66
4 Problema realizării defalcării pentru operatori demicontractivi	71
4.1 Noțiuni necesare	71
4.2 Algoritm propus și convergența sa	75
5 Generare de fractali cu TTP16-PR	85
5.1 Mulțimea Julia, mulțimea Mandelbrot	85
5.2 Criterii de ieșire	86
5.3 Mulțimi Julia prin iterația TTP16-PR	93
5.4 Mulțimi Mandelbrot prin iterația TTP16-PR	100
Concluzii	107
Direcții pentru continuarea cercetării	109
Bibliografie	111

Rezumat

Obiectiv general. Această teză este motivată de dezvoltarea teoriei punctului fix în cadre de lucru în care ipotezele clasice, precum contractivitatea sau nonexpansivitatea, sunt prea restrictive. Lucrarea avansează în această direcție prin studierea unor cadre metrice generalizate și a unor noi condiții contractive din punct de vedere structural, și prin proiectarea unor scheme iterative eficiente și robuste, adecvate implementării numerice, din punct de vedere algoritmic. În particular, teza unifică mai multe direcții complementare de cercetare: rezultate de punct fix pentru contracții Istrățescu în spații metrice generalizate, studiul schemelor iterative cu mai mulți pași pentru aplicații non-expansive generalizate, atât în spații W -hiperbolice, cât și în spații Banach. Pentru aceste procese, stabilim proprietăți fundamentale de convergență, cu accent deosebit pe monotonia Fejér, Δ -convergență, slab convergență și convergență. În plus, propunem un algoritm inerțial în doi pași, cu pași auto-adaptivi, pentru problema realizării defalcării punctului fix comun pentru operatori demicontractivi în spații Hilbert. În final, versatilitatea proceselor cu mai mulți pași este ilustrată printr-o aplicație în dinamica complexă, unde structura TTP16-PR generează mulțimi fractale de tip Julia și Mandelbrot și conduce la criterii practice de ieșire.

- *versatilitate.* Pe parcursul tezei sunt investigate diferite clase de operatori neliniari, inclusiv contracții Istrățescu în spații cu b -metrică extinsă și spații cu b -metrică extinsă nouă, aplicații care satisfac condiția (E), operatori L_2 și operatori demicontractivi. Schemele iterative studiate în această lucrare sunt dezvoltate în mai multe cadre, variind de la Banach și spații Hilbert până la cadre geodezice neliniare, precum spațiile W -hiperbolice.
- *valoare instrumentală.* Teza investighează algoritmii iterativi propuși cu mai mulți pași ca instrumente eficiente de aproximare pentru probleme de punct fix. Pornind de la estimări de tip Fejér, analiza conduce la Δ -convergență și slab convergență în cadre generale și, sub ipoteze suplimentare asupra spațiului sau asupra operatorilor, rezultate de convergență adecvate calculului numeric.

- *aspecte calitative (stabilitate și dependență de date).* Proiectate pentru calcul de precizie computațională, iterațiile prezentate favorizează un comportament stabil și mecanisme de control al erorilor (estimări de tip Fejér și de mărginire, pași auto-adaptivi) pentru a preveni amplificarea erorilor de rotunjire - susținând astfel rezultate numerice fiabile.

Metodologie. Metodele utilizate pe parcursul tezei combină instrumente din analiza neliniară cu tehnici din teoria algoritmilor iterativi. Rezultatele de existență și unicitate pentru puncte fixe sunt obținute prin adaptarea inegalităților de tip contractiv la cadre de spații metrice generalizate. Analiza convergenței schemelor cu mai mulți pași studiate se bazează pe monotonia Fejér, mărginire și metode de regularitate asimptotică, împreună cu principiul de semiînchidere și proprietăți geometrice ale spațiilor ambient, precum convexitatea uniformă în cadrul geodezic. Rezultatele de convergență sunt obținute prin introducerea unor mecanisme suplimentare de control algoritmic, inclusiv efecte inerțiale și pași auto-adaptivi, precum și prin aplicarea unor leme adecvate de convergență a șirurilor. Partea numerică a tezei este susținută de criterii explicite de ieșire în planul complex și de experimente computaționale implementate în MATLAB.

Contextul general. Teoria punctului fix oferă un cadru fundamental pentru abordarea unei game largi de probleme în analiza neliniară, optimizare și matematici aplicate. Diverse modele pot fi formulate în termenii ecuației de punct fix $x = Tx$, unde $T: X \rightarrow X$ este o aplicație neliniară definită pe un spațiu cu distanță. Un obiectiv central în acest domeniu este identificarea unor ipoteze generale asupra operatorului și asupra spațiului considerat care să garanteze existența (și atunci când este posibil, unicitatea) punctelor fixe, păstrând în același timp suficientă flexibilitate pentru a descrie fenomene dincolo de cadrele clasice.

Odată ce existența este asigurată, devine naturală investigarea modului în care aceste puncte fixe pot fi approximate în practică. Acest fapt motivează studiul procedurilor iterative, în special al schemelor cu mai mulți pași, concepute pentru clase largi de aplicații de tip nonexpansiv generalizat. Analiza convergenței devine mai delicată în afara structurilor liniare, deoarece multe metode clasice se bazează pe proprietăți specifice spațiilor normate. Cu toate acestea, anumite cadre geometrice neliniare păstrează suficientă convexitate pentru a susține o teorie a convergenței semnificativă și pentru a permite extinderea metodelor iterative la spații fără structură liniară.

În această teză, aceste două direcții sunt dezvoltate în paralel. Pe de o parte, stabilim rezultate de punct fix pentru contracții Istrățescu în cadre metrice generalizate, precum

spații cu b -metrică extinsă. Pe de altă parte, investigăm scheme iterative cu mai mulți pași în contexte geodezice neliniare, cu accent deosebit pe spațiile W -hiperbolicе, unde noțiuni precum monotonia Fejér, Δ -convergență și convergență pot fi studiate într-un mod unificat. Mai mult, dezvoltăm și analizăm proceduri iterative în spații Banach și spații Hilbert, inclusiv iterația TTP16-PR pentru operatori L_2 și un algoritm inercial în doi pași, cu pași auto-adaptivi, pentru problema realizării defalcării punctului fix comun pentru aplicații demicontractive. În final, versatilitatea algoritmilor cu mai mulți pași este ilustrată printr-o aplicație în dinamica complexă, unde iterația TTP16-PR este utilizată ca regulă alternativă de obținere a orbitei punctelor pentru generarea de fractali de tip Julia și Mandelbrot.

Descrierea tezei: structură și conținut.

Capitolul 1, **Contracții Istrățescu pe spații cu b -metrică extinsă** ([31], [29], [30]), este dedicat studiului mai multor clase de contracții Istrățescu în cadrul spațiilor cu b -metrică extinsă și al spațiilor cu b -metrică extinsă nouă. Scopul principal al acestui capitol este de a stabili rezultate de existență și unicitate pentru punctele fixe ale unor astfel de aplicații, prin combinarea unor ipoteze precum continuitatea orbitală cu condiții explicite asupra funcției de control θ .

Punctul de plecare al capitolului îl constituie cadrul spațiilor cu b -metrică extinsă, introdus de Kamran *et al.* [14], unde inegalitatea clasică a triunghiului este înlocuită de o inegalitate mai slabă care implică o funcție de control $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$.

Definiția 1 ([14]). Fie X o mulțime nevidă și fie $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$. O funcție $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ se numește b -metrică extinsă dacă, pentru orice $x, y, z \in X$, sunt satisfăcute următoarele condiții:

- (i) $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, z) \leq \theta(x, z) [d(x, y) + d(y, z)]$.

Perechea (X, d) se numește spațiu cu b -metrică extinsă.

Conținutul capitolului este reprezentat de mai multe clase de contracții Istrățescu, inclusiv contracții Istrățescu de ordin 2, contracții Istrățescu bilaterale, contracții Istrățescu de tip 2, contracții Istrățescu de ordin k și o nouă clasă introdusă aici, anume contracțiile Ćirić-Istrățescu.

Definiția 2. O aplicație $T: X \rightarrow X$ se numește contracție Ćirić-Istrățescu dacă există $h \in [0, 1)$ astfel încât, pentru orice $x, y \in X$, are loc inegalitatea:

$$d(T^2x, T^2y) \leq h \max\{d(x, y), d(Tx, Ty), d(x, Tx), d(Tx, T^2x), d(y, Ty), d(Ty, T^2y)\}.$$

Această clasă extinde contracțiile Ćirić clasice, contracțiile Istrățescu de ordin 2, contracțiile Istrățescu bilaterale și contracțiile Istrățescu de tip 2.

Un rol esențial în demonstrații îl are continuitatea orbitală, care înlocuiește continuitatea în trecerea de la convergența șirului lui Picard la existența punctelor fixe.

Definiția 3 ([6]). O aplicație $T: X \rightarrow X$ se numește orbital continuă dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = u$ implică $\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n x) = Tu$, unde T^n denotă compunerea de n ori a lui T cu el însuși.

Instrumentele tehnice principale ale capitolului sunt criteriile care asigură faptul că șirurile Picard sunt șiruri Cauchy în spații cu b -metrică extinsă, formulate în Lema 1 și Lema 2. Aceste rezultate se bazează pe mărginiri explicite pentru distanțele succesive dintre iterații și pe ipoteze de tip produs care implică funcția de control θ .

Lema 1. Fie (X, d) un spațiu cu b -metrică extinsă, fie $T: X \rightarrow X$ o aplicație și $\{x_n\}$ șirul iterațiilor Picard generat de un punct inițial $x_0 \in X$, adică $x_n = T^n x_0$, pentru orice $n \geq 0$. Dacă există $\lambda \in [0, 1)$ astfel încât inegalitatea $d(x_n, x_{n+1}) \leq \sqrt{\lambda^{n-1}} \max\{d(x_0, x_1), d(x_1, x_2)\}$ este satisfăcută pentru orice $n \geq 0$, și există constantele $\beta < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ și $n_0 \geq 0$ astfel încât inegalitatea $\prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_{n+p}) \leq \beta^{j-n+1}$ este satisfăcută pentru orice $n \geq n_0$, $p \geq 1$ și $j \in \{n, n+1, \dots, n+p-1\}$, atunci $\{x_n\}$ este un șir Cauchy.

Lema 2. Fie (X, d) un spațiu cu b -metrică extinsă, fie $T: X \rightarrow X$ o aplicație și $\{x_n\}$ șirul iterațiilor Picard asociat unui punct inițial $x_0 \in X$. Dacă există $\lambda \in [0, 1)$ și un număr întreg $k \geq 2$ astfel încât $d(x_n, x_{n+1}) \leq \sqrt[k]{\lambda^{n-k}} M$, pentru orice $n \geq 0$, unde $M = \max\{d(x_0, x_1), d(x_1, x_2), \dots, d(x_{k-1}, x_k)\}$ și există $\beta < \frac{1}{\sqrt[k]{\lambda}}$ și $n_0 \geq 0$ astfel încât inegalitatea $\prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_{n+p}) \leq \beta^{j-n+1}$ este satisfăcută pentru orice $n \geq n_0$, $p \geq 1$ și $j \in \{n, n+1, \dots, n+p-1\}$, atunci $\{x_n\}$ este un șir Cauchy.

Pe baza acestor rezultate, prima parte a capitolului stabilește teoreme de punct fix în spații cu b -metrică extinsă complete pentru clasele de aplicații introduse mai sus.

Teorema 1. Fie (X, d) un spațiu cu b -metrică extinsă complet și fie $T: X \rightarrow X$ o contracție Istrățescu de ordin 2, orbital continuă, și fie $x_0 \in X$. Notăm $x_n = T^n x_0$ pentru orice $n \geq 0$. Presupunem că există $\beta < \frac{1}{\sqrt{a+b}}$ și $n_0 \geq 0$ astfel încât inegalitatea $\prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_{n+p}) \leq \beta^{j-n+1}$ este satisfăcută pentru orice $n \geq n_0$, $p \geq 1$ și $j \in \{n, n+1, \dots, n+p-1\}$. Atunci T are un punct fix unic.

Teorema 2. Fie (X, d) un spațiu cu b -metrică extinsă complet și fie $T: X \rightarrow X$ o contracție Ćirić-Istrățescu orbital continuă. Fie $x_0 \in X$ și $\{x_n\}$ șirul Picard asociat. Presupunem că există $\beta < \frac{1}{\sqrt{h}}$ și $n_0 \geq 0$ astfel încât inegalitatea $\prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_{n+p}) \leq \beta^{j-n+1}$ este satisfăcută pentru orice $n \geq n_0$, $p \geq 1$ și $j \in \{n, n+1, \dots, n+p-1\}$. Atunci T are un punct fix unic.

Teorema 3. Fie (X, d) un spațiu cu b -metrică extinsă complet, un număr întreg $k \geq 2$, și $T: X \rightarrow X$ o contracție Istrățescu de ordin k , orbital continuă. Fie $x_0 \in X$ și $x_n = T^n x_0$ pentru orice $n \geq 0$. Presupunem că există $\beta < \frac{1}{\sqrt[k]{a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}}}$ și $n_0 \geq 0$ astfel încât inegalitatea $\prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_{n+p}) \leq \beta^{j-n+1}$ este satisfăcută pentru orice $n \geq n_0$, $p \geq 1$ și $j \in \{n, n+1, \dots, n+p-1\}$. Atunci T are un punct fix unic.

Aplicabilitatea acestor rezultate este ilustrată printr-un exemplu care arată că ipotezele Teoremei 1 sunt satisfăcute de un operator definit pe un spațiu cu b -metrică extinsă care nu este un spațiu b -metric, iar punctul fix unic este 0.

A doua parte a capitoului extinde analiza la clasa mai largă (în sensul incluziunii) a spațiilor cu b -metrică extinsă nouă, introdusă de Aydi *et al.* [2], unde funcția de control depinde de trei variabile.

Definiția 4 ([2]). Fie X o mulțime nevidă și $\theta: X \times X \times X \rightarrow [1, \infty)$. O b -metrică extinsă nouă este o funcție $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât pentru orice $x, y, z \in X$,

- (i) $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iii) $d(x, z) \leq \theta(x, y, z) [d(x, y) + d(y, z)]$.

Perechea (X, d) se numește spațiu cu b -metrică extinsă nouă.

În acest cadru, se deduc mărginiri superioare analoge pentru distanțele succesive ale iterațiilor Picard pentru mai multe clase de contracții Istrățescu, și se stabilesc criterii care asigură proprietatea Cauchy a acestor șiruri, împreună cu rezultate de punct fix sub ipoteze adecvate asupra funcției de control cu trei variabile.

Ulterior, se prezintă rezultate de punct fix analoge pentru aceste clase de contracții, extinzând concluziile obținute în cadrul anterior.

Astfel, în acest capitol se stabilește o teorie unificată a punctului fix pentru mai multe clase de contracții Istrățescu, atât în spații cu b -metrică extinsă, cât și în spații cu b -metrică extinsă nouă, arătând în particular că orbital continuitatea împreună cu ipoteze de tip produs asupra funcției de control θ sunt suficiente pentru a garanta existența și unicitatea punctelor fixe în aceste cadre generalizate.

Capitolul 2, **Operatori cu Condiția (E) în spații W -hiperbolicе** ([31], [33]), este dedicat studiului aplicațiilor care satisfac Condiția (E) în cadrul spațiilor W -hiperbolicе. Obiectivul principal este de a stabili rezultate de convergență pentru procesul iterativ SRJ în acest cadru, incluzând monotonie de tip Fejér, Δ -convergență și convergență. În plus, capitolul conține un exemplu neliniar bazat pe un operator integral care arată că teoria se aplică operatorilor care satisfac Condiția (E) dar nu sunt nonexpansivi.

Capitolul debutează cu prezentarea aplicațiilor care satisfac Condiția (E), introdusă de García-Falset *et al.* [12], care conține strict clasa aplicațiilor de tip Suzuki ce satisfac Condiția (C). În acest cadru, Condiția (E) conduce la o clasă de operatori suficient de largă pentru a depăși aplicațiile nonexpansive, păstrând totodată o teorie eficientă de aproximare a punctelor fixe. De asemenea, se arată că orice aplicație care satisface Condiția (E) și admite un punct fix este cvasi-nonexpansivă.

Definiția 5 ([12]). Fie (X, d) un spațiu metric, C o submulțime nevidă a lui X și $\mu \geq 1$. O aplicație $T: C \rightarrow C$ satisface Condiția (E_μ) pe mulțimea C dacă

$$d(x, Ty) \leq \mu d(x, Tx) + d(x, y),$$

pentru toate $x, y \in C$.

Mai mult, aplicația T se spune că satisface Condiția (E) dacă există o constantă $\mu \geq 1$ pentru care T satisface Condiția (E_μ) .

Cadrul ambiental al capitolului este cel al spațiilor W -hiperbolicе, introduse de Kohlenbach [16], care oferă un cadru metric neliniar echipat cu o structură de convexitate.

Definiția 6 ([16]). Un spațiu metric (X, d) se numește spațiu W -hiperbolic dacă există o aplicație $W: X^2 \times [0, 1] \rightarrow X$ care satisface următoarele condiții pentru toate $x, y, z, w \in X$ și $\alpha, \beta \in [0, 1]$:

- (i) $d(z, W(x, y, \alpha)) \leq (1 - \alpha) d(z, x) + \alpha d(z, y)$,
- (ii) $d(W(x, y, \alpha), W(x, y, \beta)) = |\alpha - \beta| d(x, y)$,
- (iii) $W(x, y, \alpha) = W(y, x, 1 - \alpha)$,
- (iv) $d(W(x, z, \alpha), W(y, w, \alpha)) \leq (1 - \alpha) d(x, y) + \alpha d(z, w)$.

O parte substanțială a secțiunii preliminare este dedicată centrelor asimptotice și Δ -convergenței în spații W -hiperbolicе uniform convexe. În acest cadru, folosim unicitatea

centrelor asimptotice pentru șiruri mărginite și unele rezultate tehnice care descriu comportamentul asimptotic al șirurilor în spațiu. Acestea sunt utilizate ulterior în analiza convergenței.

Procedura iterativă analizată în acest capitol este procesul SRJ, introdus inițial de Dashputre *et al.* [11], adaptat aici la cadrul spațiilor W -hiperbolic.

Algoritmul 1 Iterația SRJ în spații W -hiperbolic

Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu W -hiperbolic (X, d, W) și o aplicație $T: C \rightarrow C$. Pentru un punct inițial, ales arbitrar, $x_1 \in C$, șirul $\{x_n\}$ este definit prin

$$\begin{cases} z_n = T(W(x_n, Tx_n, \alpha_n)), \\ y_n = T(W(z_n, Tz_n, \beta_n)), \\ x_{n+1} = T(W(y_n, Ty_n, \gamma_n)), \end{cases} \quad n \geq 1,$$

unde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ și $\{\gamma_n\}$ sunt șiruri în $(0, 1)$.

Prima proprietate importantă a șirului iterativ este stabilită în Teorema 4, care arată că iterația SRJ este monotonă în sens Fejér în raport cu mulțimea punctelor fixe a aplicației considerate.

Teorema 4. *Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu W -hiperbolic (X, d, W) . Fie $T: C \rightarrow C$ o aplicație care satisface Condiția (E), cu $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Dacă $\{x_n\}$ este definit prin Algoritmul 1, atunci $\{x_n\}$ este monoton în sens Fejér în raport cu mulțimea $\text{Fix}(T)$.*

Un rezultat de caracterizare este apoi obținut în Teorema 5, care leagă existența punctelor fixe de mărginirea și regularitatea asimptotică a șirului generat.

Teorema 5. *Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu W -hiperbolic complet uniform convex (X, d, W) , cu modul de convexitate uniformă monoton, și fie $T: C \rightarrow C$ o aplicație care satisface Condiția (E). Dacă $\{x_n\}$ este definit prin Algoritmul 1 cu $\alpha_n \in [a, b] \subset (0, 1)$, atunci $\text{Fix}(T)$ este nevidă dacă și numai dacă șirul $\{x_n\}$ este mărginit și $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.*

Unul dintre rezultatele principale de convergență ale capitolului este următoarea teoremă de Δ -convergență.

Teorema 6. *Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu W -hiperbolic complet uniform convex (X, d, W) cu modul de convexitate uniformă monoton. Fie $T: C \rightarrow C$ o aplicație care satisface Condiția (E), cu $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Atunci șirul $\{x_n\}$ definit prin Algoritmul 1 este Δ -convergent către un punct fix al lui T .*

Analiza convergenței este completată de două rezultate suplimentare ca mai jos.

Teorema 7. *Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu W -hiperbolic complet uniform convex (X, d, W) cu modul de convexitate uniformă monoton și fie $T: C \rightarrow C$ o aplicație care satisface Condiția (E), cu $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Atunci șirul $\{x_n\}$ definit prin Algoritmul 1 converge către un punct fix al lui T dacă și numai dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} D(x_n, \text{Fix}(T)) = 0$, unde $D(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$.*

Definiția 7 ([32]). O aplicație T definită pe o submulțime C a unui spațiu W -hiperbolic (X, d, W) cu mulțimea punctelor fixe $\text{Fix}(T)$ nevidă se spune că satisface Condiția (I) dacă există o funcție crescătoare $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât $f(0) = 0$ și $f(t) > 0$ pentru orice $t > 0$, iar

$$d(x, Tx) \geq f(D(x, \text{Fix}(T))),$$

pentru orice $x \in C$.

Teorema 8. *Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu W -hiperbolic complet uniform convex (X, d, W) cu modul de convexitate uniformă monoton și fie $T: C \rightarrow C$ o aplicație care satisface Condiția (E). Mai mult, presupunem ca T satisface Condiția (I) și $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Atunci șirul $\{x_n\}$ definit prin Algoritmul 1 converge către un punct fix al lui T .*

Partea numerică a capitolului include mai întâi o comparație între procesul SRJ și patru scheme iterative multi-pas reprezentative din literatură, anume: schemele Abbas-Nazir [1], Thakur *et al.* [35], Piri *et al.* [26] și Kumar-Pathak [17]. Această comparație este realizată pentru o aplicație definită pe $[0, 1]$ care satisface Condiția (E), dar nu și Condiția (C), arătând astfel că teoria din acest capitol prezintă un cadru care depășește în mod practic cadrul clasic Suzuki.

Datele numerice și graficele obținute pentru mai multe configurații de parametri arată că toate schemele considerate converg, în timp ce procesul SRJ atinge punctul fix mai rapid decât celelalte metode considerate.

O contribuție importantă a acestui capitol este un exemplu neliniar definit printr-un operator de tip integral în $L^2([0, 1])$, introdus în această lucrare, care ilustrează în mod netrivial faptul că teoria se aplică operatorilor care satisfac Condiția (E) fără a fi nonexpansivi. Acest exemplu extinde domeniul de aplicabilitate dincolo de cazul finit dimensional și evidențiază utilitatea procesului SRJ într-un cadru funcțional neliniar.

Capitolul 3, **Punct fix comun pentru operatori L_2 via TTP16-PR** ([31], [27]), este dedicat aproximării punctelor fixe comune pentru doi operatori L_2 în cadrul spațiilor Banach uniform convexe. Clasa operatorilor L_2 a fost introdusă de Latif, Postolache și

Alansari [18] prin izolarea celei de-a doua părți a Condiției (L) introduse de Llorens-Fuster și Moreno-Gálvez [20]. Mai precis, dacă C este o submulțime nevidă, mărginită și convexă a unui spațiu Banach uniform convex $(X, \|\cdot\|)$, o aplicație $T: C \rightarrow C$ se numește operator L_2 dacă, pentru orice șir de puncte aproape fixe $\{x_n\}$ al lui T în C și pentru orice $x \in C$, are loc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|.$$

Obiectivul principal al acestui capitol este studiul problemei punctului fix comun pentru doi operatori $T: C \rightarrow C$ și $S: C \rightarrow C$ din această clasă. În acest scop, este introdus un nou algoritm iterativ, inspirat din iterația TTP16 introdusă de Thakur *et al.* [35], dar adaptat cadrului cu doi operatori. Schema propusă, numită iterația TTP16-PR, păstrează structura iterativă a procedurii originale, incorporând al doilea operator la pasul intermediar.

Algoritm 2 Algoritm TTP16-PR

Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu Banach $(X, \|\cdot\|)$. Pentru două aplicații $T: C \rightarrow C$ și $S: C \rightarrow C$ și $x_1 \in C$, șirul $\{x_n\}$ este generat în trei pași prin regulile:

$$\begin{cases} z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n, \\ y_n = T((1 - \alpha_n)Sx_n + \alpha_nz_n), \\ x_{n+1} = Ty_n, \quad n \geq 1, \end{cases}$$

unde $\{\alpha_n\}$ și $\{\beta_n\}$ sunt șiruri reale în $(0, 1)$.

Un prim pas important în analiză constă în demonstrarea faptului că iterațiile generate constituie un șir monoton în sens Fejér față de mulțimea $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S)$ și că mai multe șiruri asociate converg către aceeași limită. Aceste proprietăți sunt stabilite în Lema 3.

Lema 3. *Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu Banach $(X, \|\cdot\|)$, iar $T, S: C \rightarrow C$ aplicații cvasi-nonexpansive, și $0 < A \leq \alpha_n, \beta_n \leq B < 1$, pentru orice $n \geq 1$. Dacă T și S au un punct fix comun, atunci:*

1. $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sunt șiruri monotone în sens Fejér față de $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S)$;
2. Pentru orice punct fix $p \in \text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S)$, șirurile $\{\|z_n - p\|_n\}$, $\{\|Tx_n - p\|_n\}$ și $\{\|Sx_n - p\|_n\}$ converg către același număr real.

Pe baza acestor rezultate preliminare, Teorema 9 oferă o caracterizare a problemei punctului fix comun în termeni de mărginire și regularitate asimptotică a șirului generat.

Teorema 9. *Fie C o submulțime nevidă, închisă și convexă a unui spațiu Banach uniform convex $(X, \|\cdot\|)$, și fie $T: C \rightarrow C$ și $S: C \rightarrow C$ doi operatori. Pentru un $x_1 \in C$,*

șirul $\{x_n\}$ este generat prin Algoritmul 2, unde $\{\alpha_n\}$ și $\{\beta_n\}$ sunt șiruri de numere reale în $[a, b]$, cu $0 < a \leq b < 1$. Atunci au loc următoarele afirmații:

1. Dacă S și T sunt cvasi-nonexpansivi și $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) \neq \emptyset$, atunci $\{x_n\}$ este mărginit și $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\| = 0$.
2. Dacă $\{x_n\}$ este mărginit, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sx_n\| = 0$ și T și S sunt operatori L_2 , atunci $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) \neq \emptyset$.

Analiza slab convergenței este realizată apoi sub ipoteza suplimentară că spațiul Banach uniform convex satisface proprietatea Opial. În această direcție, Lema 4 oferă un rezultat de tip Principiul de semiînchidere pentru doi operatori L_2 .

Lema 4. Fie $T: C \rightarrow C$, $S: C \rightarrow C$ operatori L_2 definiți pe o submulțime C a unui spațiu Banach $(X, \|\cdot\|)$ care satisface proprietatea Opial. Dacă $\{x_n\} \subset C$ converge slab către $z \in C$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Sx_n - x_n\| = 0$, atunci z este un punct fix comun al lui T și S , adică $Tz = Sz = z$.

Combinând acest rezultat cu mărginirea și regularitatea asimptotică obținute anterior, se stabilește teorema principală de slab convergență.

Teorema 10. În cadrul unui spațiu Banach uniform convex $(X, \|\cdot\|)$ care satisface proprietatea Opial, fie $T: C \rightarrow C$ și $S: C \rightarrow C$ doi operatori L_2 definiți pe o submulțime nevidă, închisă și convexă C a lui X . Presupunem că T și S au cel puțin un punct fix comun. Atunci, pentru orice punct inițial $x_1 \in C$, șirul $\{x_n\}$ generat de Algoritmul 2 converge slab către un punct $z \in \text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S)$.

Capitolul conține de asemenea două rezultate de convergență. Primul este obținut sub ipoteze de compacitate asupra mulțimii C .

Teorema 11. Fie C o submulțime compactă, nevidă și convexă a unui spațiu Banach uniform convex $(X, \|\cdot\|)$ și fie $T, S: X \rightarrow X$ operatori L_2 cu $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) \neq \emptyset$. Pentru un $x_1 \in C$, șirul $\{x_n\}$ este generat prin Algoritmul 2, unde $\{\alpha_n\}$ și $\{\beta_n\}$ sunt șiruri de numere reale în $[a, b]$, cu $0 < a \leq b < 1$. Atunci $\{x_n\}$ converge către un punct fix comun al lui T și S .

O a doua cale de a obține convergența este bazată pe Condiția (I), fără a necesita ipoteza de compacitate. În acest cadru, Propoziția 1, Lema 5 și Teorema 12 furnizează argumentele necesare.

Propoziția 1. Dacă T este un operator L_2 , atunci $\text{Fix}(T)$ este o mulțime închisă.

Lema 5. Fie C o submulțime închisă, nevidă și convexă a unui spațiu Banach uniform convex $(X, \|\cdot\|)$ și fie $T: C \rightarrow C$ și $S: C \rightarrow C$ operatori L_2 cu $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) \neq \emptyset$. Dacă șirul $\{x_n\}$ generat prin Algoritmul 2 satisface

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \text{Fix}(T)\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \text{Fix}(S)\| = 0,$$

atunci $\{x_n\}$ converge către un punct fix comun al lui T și S .

Teorema 12. Fie C o submulțime închisă, nevidă și convexă a unui spațiu Banach uniform convex $(X, \|\cdot\|)$ și fie $T: C \rightarrow C$ și $S: X \rightarrow X$ operatori L_2 cu $\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) \neq \emptyset$. Pentru un $x_1 \in C$, șirul $\{x_n\}$ este generat prin Algoritmul 2, unde $\{\alpha_n\}$ și $\{\beta_n\}$ sunt șiruri de numere reale în $[a, b]$, cu $0 < a \leq b < 1$. Dacă T și S satisfac Condiția (I), atunci $\{x_n\}$ converge către un punct fix comun al lui T și S .

Ultima parte a capitolului este dedicată unei comparații numerice între iterația TTP16-PR propusă și mai multe scheme clasice și recente pentru doi operatori, și anume procesul Das-Debata [10], iterația lui Liu *et al.* [19], procesul de tip Mann al lui Khan *et al.* [15], iterația Y introdusă de Yadav [36] și iterația N propusă de Navascués [24].

Pentru realizarea comparației, în acest capitol este utilizat operatorul neliniar de tip integral introdus în capitolul precedent, format din doi operatori L_2 neliniari definiți pe $L^2([0, 1])$ prin nucleele:

$$\theta_1(t, s) = \frac{1 + \cos(\pi(t - s))}{2}, \quad \theta_2(t, s) = e^{-20(t-s)^2}.$$

Aceste nuclee generează operatorii $T: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ și $S: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, care au punctul fix comun $u \equiv 0$.

Rezultatele numerice obținute pentru acest exemplu arată că toate schemele considerate converg, în timp ce metoda TTP16-PR propusă atinge punctul fix comun într-un număr mai mic de iterații și necesită un timp de calcul mai scurt față de metodele considerate în cazurile testate.

Capitolul 4, **Problema realizării defalcării pentru operatori demicontractivi** ([31], [21]), este dedicat studiului problemei realizării defalcării punctului fix comun în spații Hilbert reale pentru operatori demicontractivi. Contribuția principală a acestui capitol constă în introducerea unui nou algoritm inerțial în doi pași, cu pași auto-adaptivi, pentru rezolvarea problemei realizării defalcării punctului fix comun, împreună cu o teoremă de convergență către soluția de normă minimă. În plus, abordarea propusă combină efecte inerțiale cu mecanisme de control adaptiv într-un cadru unificat, permițând atât accelerarea, cât și stabilitatea procesului iterativ. Un avantaj important

al metodei este faptul că analiza convergenței nu necesită calculul explicit al normei operatorului liniar mărginit, care este adesea dificil de estimat sau chiar inaccesibil în anumite aplicații practice.

Capitolul începe prin prezentarea problemei realizării defalcării, care constă în determinarea unui punct

$$x \in C \text{ astfel încât } Ax \in Q,$$

unde C și Q sunt submulțimi nevide, închise și convexe ale spațiilor Hilbert H_1 și H_2 , iar $A: H_1 \rightarrow H_2$ este un operator liniar mărginit. Această formulare apare în mod natural în aplicații în care constrângerile sunt impuse în spații diferite legate printr-o transformare liniară, cum ar fi procesarea semnalelor, reconstrucția imaginilor sau problemele inverse. Atunci când mulțimile C și Q desemnează mulțimi de puncte fixe ale unor operatori neliniari, se ajunge la problema realizării defalcării punctului fix comun (SCFP), și anume determinarea unui punct

$$x \in \text{Fix}(S) \text{ astfel încât } Ax \in \text{Fix}(T),$$

unde $S: H_1 \rightarrow H_1$ și $T: H_2 \rightarrow H_2$ sunt operatori neliniari. Mulțimea soluțiilor asociată este

$$\Omega = \{x \in H_1 : x \in \text{Fix}(S) \text{ și } Ax \in \text{Fix}(T)\}.$$

Pentru formularea precisă a problemei și dezvoltarea unei teorii de convergență, în capitol se reamintește clasa aplicațiilor demicontractive, care joacă un rol central în analiză. Mai precis, dacă $T: H \rightarrow H$ este un operator cu mulțimea punctelor fixe nevidă, atunci T se numește β -demicontractiv, cu $0 \leq \beta < 1$, dacă

$$\|Tx - u\|^2 \leq \|x - u\|^2 + \beta \|x - Tx\|^2,$$

pentru orice $u \in \text{Fix}(T)$ și $x \in H$. Această clasă extinde în mod strict mai multe clase cunoscute de operatori neliniari, inclusiv aplicații de tip nonexpansiv, și oferă un cadru flexibil pentru studiul problemelor realizării defalcării în spații Hilbert.

Capitolul discută și abordările anterioare pentru problemele privind realizarea defalcării, începând cu algoritmul CQ clasic al lui Byrne [4], continuând cu extinderile datorate lui Censor și Segal [5], Moudafi [23], Cui și Wang [7], Boikanyo [3], Dang *et al.* [9], Cui *et al.* [8] și Suparatulatorn *et al.* [34]. Aceste metode încorporează treptat clase mai generale de operatori și mecanisme de convergență îmbunătățite. Totuși, o dificultate comună în multe dintre aceste abordări este dependența alegerii pasului de norma operatorului liniar, ceea ce poate fi dificil sau nepractic în aplicații. Acest fapt

motivează studiul unor scheme auto-adaptive care evită astfel de cerințe. În același timp, metodele inerțiale inspirate de Polyak [28] și Nesterov [25] sugerează că accelerarea poate fi obținută prin incorporarea informației din iterațiile anterioare în regula de actualizare, conducând la o convergență mai rapidă în practică.

Motivat de aceste dezvoltări, în acest capitol se introduce un nou algoritm inerțial în doi pași pentru SCFP, care combină pași auto-adaptivi cu un termen inerțial de ordin doi. Metoda propusă realizează un echilibru între stabilitate și accelerare, asigurând în același timp convergența către soluția de normă minimă sub ipoteze naturale. Totodată, aceasta evită calculul explicit al normei operatorului liniar, ceea ce constituie un avantaj practic semnificativ. Metoda este formulată în Algoritmul 3.

Algoritmul 3 Algoritm inerțial în doi pași pentru SCFP

Inițializare: Fie $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $0 < \gamma < 1$, $\lambda \in (0, 1 - k_1)$ și x_{-1} , x_0 , $x_1 \in H_1$ arbitrare. Presupunem că șirurile $\{\beta_n\} \subset (0, \frac{1}{1+\alpha})$, $\{\epsilon_{1,n}\}$, $\{\epsilon_{2,n}\}$ sunt șiruri pozitive astfel încât:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{1,n}}{\beta_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{2,n}}{\beta_n} = 0.$$

Pași iterativi: Se calculează x_{n+1} astfel:

Pasul 1.

$$\begin{cases} t_n = x_n + \xi_{1,n}(x_n - x_{n-1}) + \xi_{2,n}(x_{n-1} - x_{n-2}), \\ v_n = \beta_n(1 - \alpha)x_n + (1 - \beta_n)t_n, \\ z_n = v_n - \tau_n A^*(I - T)Av_n, \end{cases}$$

unde

$$\tau_n = (1 - k_2)\gamma \frac{\|(I - T)Av_n\|^2}{\|v_n - Sv_n\|^2 + \|A^*(I - T)Av_n\|^2}.$$

Dacă $\|v_n - Sv_n\|^2 + \|A^*(I - T)Av_n\|^2 = 0$, atunci se oprește și v_n este soluție.

Pasul 2.

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)z_n + \lambda Sz_n.$$

Un instrument tehnic important în analiza convergenței este Lema 6, care furnizează un rezultat de mărginire pentru operatori β -demicontractivi.

Lema 6. Fie $U: H \rightarrow H$ un operator β -demicontractiv cu $\text{Fix}(U) \neq \emptyset$. Definim operatorul λ -mediat $U_\lambda = (1 - \lambda)I + \lambda U$, pentru $\lambda \in (0, 1 - \beta)$. Atunci, pentru orice $x \in H$ și $u \in \text{Fix}(U)$, are loc inegalitatea

$$\|U_\lambda x - u\|^2 \leq \|x - u\|^2 - \lambda(1 - \beta - \lambda) \|(I - U)x\|^2.$$

Analiza convergenței este realizată în condițiile existenței a trei ipoteze naturale: faptul că mulțimea soluțiilor Ω este nevidă, demicontractivitatea operatorilor și proprietatea de semiînchidere a operatorilor S și T , precum și liniaritatea și mărginirea operatorului A . În aceste ipoteze, teorema principală a capitolului stabilește convergența către soluția de normă minimă a problemei SCFP.

Teorema 13. *În contextul ipotezelor de mai sus, șirul $\{x_n\}$ generat de Algoritmul 3 converge către un element $x^* \in \Omega$, unde $x^* = P_\Omega(0)$.*

Capitolul 5, **Generarea fractalilor cu TTP16-PR** ([31], [27]), studiază o aplicație a schemei iterative introduse în Capitolul 3 în domeniul dinamicii complexe. Procesul TTP16-PR este interpretat ca o regulă de iterare în planul complex, înlocuind orbita clasică Picard printr-o structură cu doi operatori. Această abordare conduce la obținerea de structuri fractale de tip Julia și Mandelbrot, a căror geometrie depinde atât de parametrul c , cât și de parametrii de control α și β .

Capitolul începe prin reamintirea noțiunilor standard de mulțimi Julia și Mandelbrot. Pentru o aplicație complexă $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, mulțimea Julia plină [13] este definită prin

$$K(f) = \{x \in \mathbb{C} : \sup_{n \geq 0} |f^n(x)| < \infty\},$$

iar mulțimea Julia este frontiera acesteia, $J(f) = \partial K(f)$.

În mod similar, mulțimea Mandelbrot [22] este asociată clasic familiei de funcții de gradul al doilea $f_c(x) = x^2 + c$ și este alcătuită din acei parametri $c \in \mathbb{C}$ pentru care orbita originii rămâne mărginită, adică

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^n(0)\} \text{ este mărginită}\}.$$

În cadrul acestui capitol, dinamica este generată de interacțiunea a două familii de aplicații, anume

$$f_c(x) = x^2 + c$$

și

$$g_c(x) = a x^m + \frac{b}{x^p} + c,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{C}$ și $m, p \geq 2$. Prima este aplicația pătratică clasică, în timp ce a doua introduce o componentă rațională, combinând creșterea polinomială cu un comportament de tip pol. Acest cadru cu doi operatori este cel ce permite schemei TTP16-PR să genereze o geometrie fractală mai bogată decât cea obținută prin iterația Picard clasică.

Procedura TTP16-PR este apoi adaptată planului complex prin considerarea a doi

operatori $T: C \rightarrow C$ și $S: C \rightarrow C$ și fixarea parametrilor de control $\alpha, \beta \in (0, 1)$. În acest context, iterația are forma

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ z_n = (1 - \beta) x_n + \beta T x_n, \\ y_n = T((1 - \alpha) S x_n + \alpha z_n), \\ x_{n+1} = T y_n, \end{cases}$$

pentru orice $n \geq 1$.

Astfel, în locul iterării unui singur operator, orbita se generează printr-o interacțiune îmbricată între doi operatori, parametrii α și β controlând contribuția fiecărui nivel. Acesta este mecanismul de bază utilizat în generarea numerică a mulțimilor fractali în acest capitol.

Deoarece iterația este construită din două aplicații și poate fi organizată în două configurații diferite, capitolul stabilește două criterii de ieșire distincte, în funcție de modul de atribuire a operatorilor. Prima configurație este $Tx = f_c(x)$ și $Sx = g_c(x)$, iar a doua este $Tx = g_c(x)$ și $Sx = f_c(x)$.

Deoarece termenii polinomiali și raționali au comportamente asimptotice diferite, analiza ieșirii trebuie realizată separat în aceste două situații.

Primul rezultat teoretic principal furnizează un criteriu suficient de ieșire pentru prima configurație.

Teorema 14. *Considerăm $Tx = f_c(x)$ și $Sx = g_c(x)$, unde $m \geq 3$, $p \geq 2$, și $a, b, c \in \mathbb{C}$ cu $|a| > 1$. Dacă*

$$|x_1| > \max \left\{ |c|, 2, |b|^{\frac{1}{m+p}}, \left(\frac{2 + \alpha \beta}{(1 - \alpha)(|a| - 1)} \right)^{\frac{1}{m-2}} \right\},$$

atunci $|x_n| \rightarrow \infty$ când $n \rightarrow \infty$.

Al doilea rezultat oferă criteriul analog pentru atribuirea inversă celor două aplicații.

Teorema 15. *Considerăm $Tx = g_c(x)$ și $Sx = f_c(x)$, unde $m \geq 3$, $p \geq 2$, și $a, b, c \in \mathbb{C}$ cu $|a| > 1$. Dacă*

$$|x_1| > \max \left\{ |c|, |b|^{\frac{1}{m+p}}, 2, \left(\frac{3 - \alpha}{\alpha \beta (|a| - 1)} \right)^{\frac{1}{m-2}}, \left(\frac{2}{|a| - 1} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \left(\frac{1}{|a| - 1} \right)^{\frac{1}{m-2}} \right\},$$

atunci $|x_n| \rightarrow \infty$ când $n \rightarrow \infty$.

Aceste două criterii de ieșire reprezintă contribuția teoretică centrală a capitolului, justificând construcția numerică a mulțimilor de tip Julia și Mandelbrot generați prin TTP16-PR.

În continuare, este analizată generarea mulțimilor Julia prin discretizarea unei regiuni din planul complex și aplicarea iterației TTP16-PR fiecărui punct. Timpul de ieșire este utilizat pentru clasificarea punctelor și aproximarea mulțimii Julia pline. Sunt utilizate două proceduri computaționale, corespunzătoare celor două configurații ale operatorilor.

Sunt testate mai multe configurații de parametri, evidențiind faptul că geometria rezultantă depinde de c , α , β , m , p , a și b . Mulțimile obținute variază de la forme compacte la structuri mai neregulate, fragmentate sau cu simetrie radială. În plus, interschimbarea rolurilor celor două aplicații conduce la comportamente dinamice și modele geometrice vizibil diferite.

Capitolul se concentrează apoi asupra generării mulțimilor de tip Mandelbrot. În acest context, parametrul complex c nu mai este fix, ci variază într-o anumită regiune a planului complex, iar valoarea inițială este aleasă ca fiind $x_1 = c$. Această alegere este naturală în cadrul considerat, deoarece termenul rațional nu permite utilizarea inițializării clasice $x_1 = 0$. În consecință, se definește mulțimea de tip Mandelbrot asociată iterației TTP16-PR prin

$$M^* = \{c \in \mathbb{C} : \{x_n\} \text{ este mărginită}\}.$$

Sunt utilizate din nou două proceduri computaționale, corespunzătoare celor două configurații ale operatorilor.

Experimentele numerice arată că geometria mulțimilor depinde de toți parametrii c , α , β , p , a , b și, în special, de gradul m . Pentru valori mici, mulțimile rămân apropiate de forma clasică Mandelbrot, în timp ce creșterea gradului conduce la frontiere mai groase și structuri mai complexe, cu mai mulți lobi sau simetrii accentuate. În a doua configurație, mulțimile prezintă modele radiale și florale mai pronunțate, numărul de lobi fiind influențat de parametrul m .

Toate calculele sunt realizate pentru un număr fix de iterații și o rezoluție uniformă atât în planul dinamic, cât și în planul parametrilor. În ansamblu, rezultatele arată că schema TTP16-PR generează o gamă largă de structuri fractale și extinde dinamica clasică prin formularea sa cu doi operatori și cu mai mulți pași.

Bibliografie

1. M. Abbas, T. Nazir, A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems, *Mat. Vesn.* 66(2014), No. 2, 223-234.
2. H. Aydi, A. Felhi, T. Kamran, E. Karapinar, and M. U. Ali, On nonlinear contractions in new extended b -metric spaces, *Appl. Appl. Math.* 14(2019), 537-547.
3. O. A. Boikanyo, A strongly convergent algorithm for the split common fixed point problem, *Appl. Math. Comput.* 265(2015), 844-853.
4. C. Byrne, Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem, *Inverse Problems* 18(2002), 441-453.
5. Y. Censor, A. Segal, The split common fixed point problem for directed operators, *J. Convex Anal.* 16(2009), 587-600.
6. L. B. Ćirić, On contraction type mappings, *Math. Balkanica* 1(1971), 52-57.
7. H. Cui, F. Wang, Iterative methods for the split common fixed point problem in Hilbert spaces, *Fixed Point Theory Appl.* 2014(2014), 1-8.
8. H. H. Cui, H. X. Zhang, L. C. Ceng, An inertial Censor-Segal algorithm for split common fixed-point problems, *Fixed Point Theory* 22(2021), No. 1, 93-103.
9. Y. Z. Dang, J. Sun, H. K. Xu, Inertial accelerated algorithms for solving a split feasibility problem, *J. Ind. Manag. Optim.* 13(2017), No. 3, 1383-1394.
10. G. Das, J. P. Debata, Fixed points of quasi-non-expansive mappings, *Indian J. Pure. Appl. Math.* 17(1986), 1263-1269.
11. S. Dashputre, R. Tiwari, J. Shrivastava, A new iterative algorithm for generalized (α, β) -nonexpansive mapping in $CAT(0)$ space, *Adv. Fixed Point Theory* 1(2023), 1-18.
12. J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, T. Suzuki, Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 375(2011), 185-195.

13. G. Julia, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, J. Math. Pures Appl. 8(1918), No. 1, 47-246.
14. T. Kamran, M. Samreen, Q. U. Ain, A generalization of b -metric space and some fixed point theorems, Mathematics 5(2017), Art. No. 19.
15. A. R. Khan, H. Fukhar-ud-din, M. A. A. Khan, An implicit algorithm for two finite families of nonexpansive maps in hyperbolic space, Fixed Point Theory Appl. 2012(2012), Art. No. 54.
16. U. Kohlenbach, Some logical metatheorems with applications in functional analysis, Trans. Amer. Math. Soc. 357(2005), No. 1, 89-128.
17. M. Kumar, H. K. Pathak, Numerical reckoning of fixed points for generalized non-expansive mapping in CAT(0) space with applications, U. Politeh. Buch. Ser. A 84(2022), No. 2, 117-128.
18. A. Latif, M. Postolache, M. O. Alansari, Numerical reckoning common fixed point in CAT(0) spaces for a general class of operators, U. Politeh. Buch. Ser. A 84(2022), No. 2, 3-12.
19. Z. Liu, C. Feng, J. S. Ume, S. M. Kang, Weak and strong convergence for common fixed points of a pair of non-expansive and asymptotically non-expansive mappings, Taiwan J. Math. 11(2007), No. 1, 27-42.
20. E. Llorens-Fuster, E. Moreno-Gálvez, The fixed point theory for some generalized nonexpansive mappings, Abstr. Appl. Anal. 2011(2011), Art. No. 435686.
21. L. V. Long, P. T. H. Huyen, N. T. An, **D. I. Ricinschi**, A new strong convergent two-step inertial algorithm for split common fixed point problems, U. Politeh. Buch. Ser A 88(2026), No. 1, 3-16.
22. B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman: New York, NY, USA, 1982, Volume 2.
23. A. Moudafi, The split common fixed point problem for demicontractive mappings, Inverse Problems 26(2010), No. 5, Art. No. 055007.
24. M. A. Navascués, An iterative method for the approximation of common fixed points of two mappings: Application to fractal functions, Fractal Fract. 8(2024), Art. No. 745.

25. Y. Nesterov, A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(\frac{1}{k^2})$, Dokl. Akad. Nauk SSSR 269(1983), 543-547.
26. H. Piri, B. Daraby, S. Rahrovi, M. Ghasemi, Approximating fixed points of generalized α -nonexpansive mappings in Banach spaces by new faster iteration process, Numer. Algorithms 81(2019), 1129-1148.
27. A. Pitea, **D. I. Ricinschi**, Reckoning common solutions of nonlinear problems with application to fractal generation, Chaos Solitons Fractals 207(2026), Art. No. 118050.
28. B. T. Polyak, Some methods of speeding up the convergence of iterative methods, USSR Comput. Math. Math. Phys. 4(1964), No. 5, 1-17.
29. **D. Ricinschi**, Convex contractions on extended b -metric spaces, AIMS Math. 9(2024), No. 7, 18163-18185.
30. **D. I. Ricinschi**, Istrăţescu type contractions on new extended b -metric spaces, Filomat 40(2026), No. 6, 2225-2238.
31. **D. I. Ricinschi**, Some classes of operators for nonlinear problems with real world applications, National University of Science and Technology Politehnica Bucharest, 2026 (PhD Thesis).
32. H. F. Senter, W. G. Dotson, Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 44(2)(1974), 375-380.
33. J. Shrivastava, **D. I. Ricinschi**, On SRJ iteration of E-operators in hyperbolic spaces with numerical analysis and application, Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. 2 75(2026), Art. No. 45.
34. R. Suparatulatorn, S. Suantai, N. Phudolsitthiphat, Reckoning solution of split common fixed point problems by using inertial self-adaptive algorithms, RACSAM 113(2019), 3101-3114.
35. B. S. Thakur, D. Thakur, M. Postolache, A new iterative scheme for numerical reckoning fixed point of Suzuki's generalized nonexpansive mappings, Appl. Math. Comput. 275(2016), 147-155.
36. M. R. Yadav, Two-step iteration scheme for nonexpansive mappings in Banach space, Math. Moravica 19(2015), 95-105.